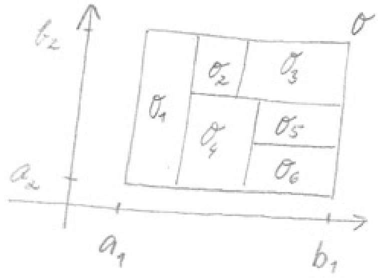
Integrální počet funkcí více proměnných

Definice: Buď $O = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^2$ obdelník, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkce ohraničená na $O \subseteq D(f)$. Definujme

- $|O| = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$ obsah obdelníku O
- $d(O) = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}$ průměr obdelníku O (délka úhlopříčky)
- dělení obdelníku O jako libovolnou konečnou množinu $D = \{O_1, \dots, O_m\}$ obdelníků tak, že $\bigcup_{i=1}^{m} O_i = O$ a průnik libovolných dvou obdelníků z D obsahuje nejvýše jejich hraniční body.

$D = \{O_1, O_2, \dots, O_6\}$



Dále postupujme následovně:

- V každém obdelníku O_i, $i = 1, \dots, m$, zvolme bod $[\alpha_i, \beta_i] \in O_i$ (tzv. reprezentant obdelníku O_i)
- Položme $\nu(D) = \max\{d(O_1), d(O_2), \dots, d(O_m)\}$ ... tzv. norma dělení D.
  - délka největší úhlopříčky.
- Posloupnost dělení $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ je normální, jestliže $\lim_{m\to\infty} \nu(D_m) = 0$.

Definice: Řekneme, že ohraničená funkce f je Riemannovsky integrovatelná na O a číslo $a \in \mathbb{R}$ nazveme Riemannův integrál funkce f na množině O, když pro každou normální posloupnost D_m dělení obdelníku O a pro každou volbu reprezentantů v těchto děleních platí $\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} f(\alpha_i, \beta_i) \cdot |O_i| = a$.

$\lim \sum_i f(\alpha_i, \beta_i) \cdot |O_i|$ je Riemannův integrál, jestliže tato limita existuje, nezávisí na volbě posloupnosti D_m a volbě bodů $[\alpha_i, \beta_i]$

Značení: $\iint_O f(x,y)\,dx\,dy$ - dvojný

(analogicky trojný, n-rozměrný)

Věta 1: Nechť fce. $f(x,y)$, $g(x,y)$ jsou integrovatelné na obdélníku D, $D = D_1 \cup D_2$, $\{D_1, D_2\}$ je dělení obdélníku D. Pak platí:

1) $$\iint_D c \cdot f(x,y)\,dx\,dy = c \cdot \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \qquad c \in \mathbb{R}$$

2) $$\iint_D (f(x,y) + g(x,y))\,dx\,dy = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

3) $$\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Věta 2: (Dirichletova) Nechť $f(x,y)$ je spojitá na obdélníku $D = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle$. Potom platí:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Důsledek: Nechť fce. $u(x)$, $v(y)$ jsou spojité na intervalu $\langle a_1, b_1 \rangle$, resp. $\langle a_2, b_2 \rangle$. Potom platí:

$$\iint_D u(x)\,v(y)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{b_1} u(x)\,dx \int_{a_2}^{b_2} v(y)\,dy$$

Př: $\iint_D (x - 3y^2)\,dx\,dy \qquad D = \{[x,y] : 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$

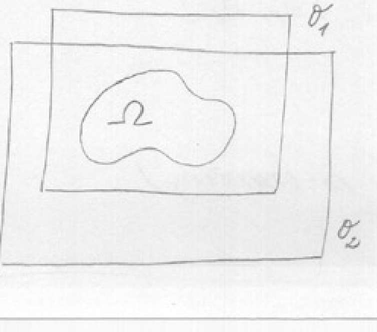
$$\iint_D (x-3y^2)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_0^2 (x - 3y^2)\,dx \right) dy = \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - 3y^2 x \right]_0^2 dy =$$

$$= \int_1^2 2 - 6y^2\,dy = \left[2y - 6\frac{y^3}{3} \right]_1^2 = 4 - 16 - 2 + 2 = \underline{-12}$$

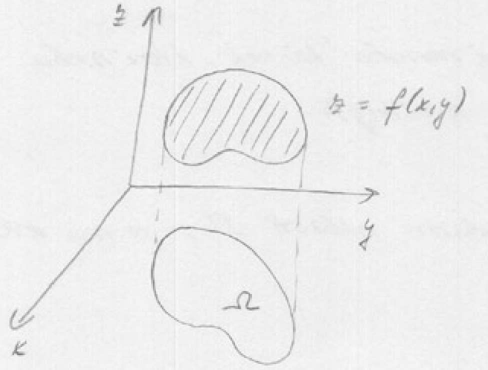
Dvojrozměrný integrál na obecné uzavřené oblasti

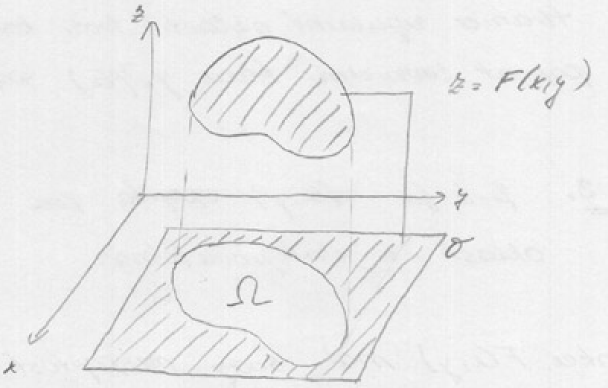
Ω ... dvojrozměrná (rovinná) uzavřená oblast

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset D(f)$



Definujme funkci $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \forall [x,y] \in \Omega \\ 0 & \forall [x,y] \notin \Omega \end{cases}$





$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy := \iint_{\sigma} F(x,y)\,dx\,dy \quad \left(= \iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy + \underbrace{\iint_{\sigma \setminus \Omega} 0\,dx\,dy}_{=0} \right)$$

Definice: Uzavřená rovinná oblast Ω se nazývá normální

a) vzhledem k ose x, jestliže pro $\forall [x,y] \in \Omega$ platí

$$x_1 \le x \le x_2$$
$$g_1(x) \le y \le g_2(x)$$

kde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ a g_1, g_2 jsou fce spojité na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$

b) vzhledem k ose y, jestliže pro $\forall [x,y] \in \Omega$ platí

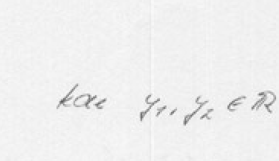
$$y_1 \le y \le y_2$$
$$h_1(y) \le x \le h_2(y)$$

kde $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ a h_1, h_2 jsou spojité fce na intervalu $\langle y_1, y_2 \rangle$

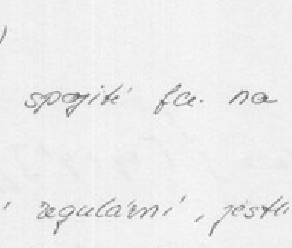
Uzavřená rovinná oblast se nazývá regulární, jestliže je možné ji rozdělit na konečně mnoho oblastí normálních vzhledem k některé ze souřadnicových os.

Oblast je normální vzhledem k ose x, potom každá rovnoběžka s osou y jdoucí libovolným bodem $x \in (x_1, x_2)$ protíná hranici Ω nejvýše ve 2 bodech

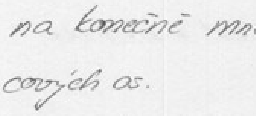
Př:



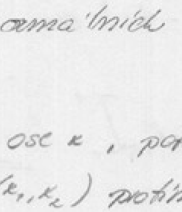
normální k ose x



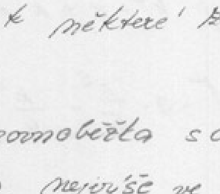
normální k ose x (i k y)



normální k ose y



je regulární



Pozn: • Fce. g_1, popř. g_2 (h_1, popř. h_2) jsou tzv. horní a dolní hraniční křivky oblasti Ω

• Hranice regulární oblasti tvoří konečně mnoho křivek, které mohu popsat rovnicemi tvaru $y = \varphi(x)$ popř. $x = \psi(y)$.

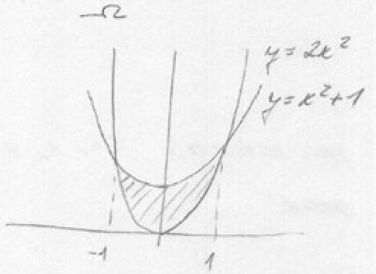
Věta 3. Je-li fce. $f(x,y)$ spojitá na regulární oblasti Ω, je na této oblasti i integrovatelná.

Věta 4 (Fubiniova): Nechť je fce. $f(x,y)$ spojitá na oblasti Ω, která je normální vzhledem k ose x, pak platí:

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

Př: $\iint_\Omega (x+2y)\,dx\,dy$ $\quad\Omega$ je ohraničená parabolami

$y = 2x^2 \quad y = x^2+1$



$2x^2 = x^2+1$

$x = \pm 1$

Fubiniova věta:

$$\int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{x^2+1} x+2y\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\left[xy+y^2\right]_{2x^2}^{x^2+1} dx = \int_{-1}^{1} x\cdot(x^2+1)+(x^2+1)^2 - x\cdot 2x^2 - 4x^4\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^3+x+x^4+2x^2+1-2x^3-4x^4\,dx = \int_{-1}^{1} -3x^4-x^3+2x^2+x+1\,dx$$

$$= \left[-3\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1} = \underline{\underline{\frac{32}{15}}}$$

TRANSFORMACE DVOJROZMĚRNÝCH INTEGRÁLŮ

Věta 5:

1) Nechť se regulární oblast Ω^* zobrazí pomocí vztahů

$$x = \varphi(u,v)$$
$$y = \psi(u,v)$$

na oblast Ω, přičemž zobrazení vnitřku oblasti Ω^* je vzájemně jednoznačné.

2) Nechť fce. $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ mají spojitou parciální derivaci 1. řádu na Ω^* a funkce $f(x,y)$ je spojitá na Ω

3) Nechť je pro každý vnitřní bod oblasti Ω^* nenulový Jakobián příslušné transformace

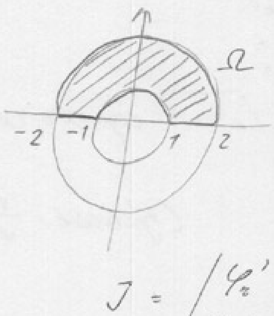
$$J(\varphi,\psi) = \begin{vmatrix} \varphi_u' & \varphi_v' \\ \psi_u' & \psi_v' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Potom platí

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega^*} f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \cdot |J(\varphi,\psi)|\,du\,dv.$$

Př: $\iint_{\Omega} (3x + 4y^2)\,dx\,dy$

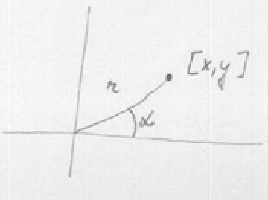
Ω ... oblast nad osou x ohraničená kružnicemi $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$



Transformace do polárních souřadnic:

$$x = r\cos\alpha = \varphi(r,\alpha)$$
$$y = r\sin\alpha = \psi(r,\alpha)$$

$$J = \begin{vmatrix} \varphi_r' & \varphi_\alpha' \\ \psi_r' & \psi_\alpha' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{vmatrix} = r(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = r$$

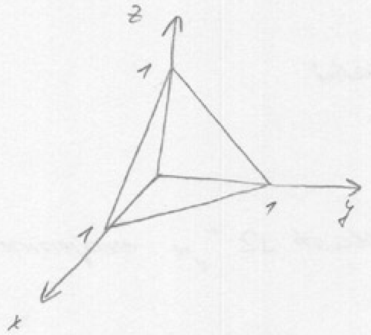


$$\iint_{\Omega^*} (3r\cos\alpha + 4r^2\sin^2\alpha)\cdot r\,dr\,d\alpha = \int_0^{\pi}\int_1^2 3r^2\cos\alpha + 4r^3\sin^2\alpha\,dr\,d\alpha = \int_0^{\pi} \underbrace{\left[3\cos\alpha\cdot\frac{r^3}{3} + 4\sin^2\alpha\cdot\frac{r^4}{4}\right]_1^2}_{7\cos\alpha + 15\sin^2\alpha} d\alpha = \underline{\underline{\frac{15\pi}{2}}}$$

obdélník

Analogicky definujeme trojrozměrný integrál

Př: $\iiint_\Omega z \, dx\, dy\, dz$, kde Ω je čtyřstěn ohraničený rovinami $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$.



$$\int_\Omega z\, dx dy dz = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} z \, dz\, dy\, dx =$$

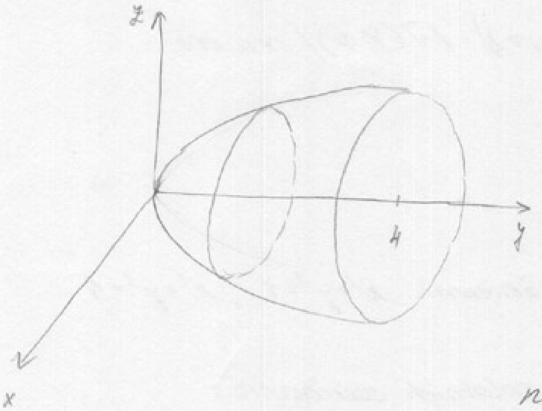
$$= \frac{1}{2} \int_0^1\int_0^{1-x} \left[z^2\right]_0^{1-x-y} dy\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1\int_0^{1-x} \left[1-x-y\right]^2 dy\, dx =$$

$$= -\frac{1}{6} \int_0^1 \left[\left[1-x-y\right]^3\right]_0^{1-x} dx = -\frac{1}{6}\int_0^1 (0-1+x)^3 dx$$

$$= -\frac{1}{6}\left[\frac{(x-1)^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{24}\cdot(0-1) = \underline{\underline{\frac{1}{24}}}$$

Př: $\iiint_\Omega \sqrt{x^2+z^2}\, dx dy dz$, Ω je ohraničená paraboloidem $y = x^2+z^2$ a rovinou $y=4$



$$\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\, dx dy dz =$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{x^4}^{4}\int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2+z^2}\, dz\, dy\, dx$$

nebo

$$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2+z^2}\, dy\, dz\, dx$$

(výsledek: $\frac{128}{15}\pi$)

Transformace trojného integrálu analogicky:
jen jakobián

$$J(\varphi,\psi,\chi) = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w \\ \psi'_u & \psi'_v & \psi'_w \\ \chi'_u & \chi'_v & \chi'_w \end{vmatrix}$$

Křivkový integrál

$x(t), y(t)$ ... spojité fce. na intervalu $\langle a,b \rangle$

Množina bodů $\varphi := \{[x(t), y(t)] : t \in \langle a,b \rangle\}$ ... křivka v rovině

$A = [x(a), y(a)]$, $B = [x(b), y(b)]$ ... krajní body křivky

Křivka φ je:

1) uzavřená, jestliže její krajní body jsou totožné
2) jednoduchý oblouk, jestliže $\forall t_1, t_2 \in \langle a,b \rangle$, $t_1 \neq t_2$ platí:
$$[x(t_1), y(t_1)] \neq [x(t_2), y(t_2)]$$
3) hladká, je-li jednoduchým obloukem, fce. $x(t), y(t)$ mají spojité derivace na $\langle a,b \rangle$ a platí $[x(t), y(t)] \neq [0,0]$ $\forall t \in \langle a,b \rangle$

Kladně orientovaná křivka:

$\forall t_1, t_2 \in \langle a,b \rangle$ $t_1 < t_2$ je bod $T_1 = [x(t_1), x(t_2)]$ vždy před bodem $T_2 = [x(t_2), y(t_2)]$

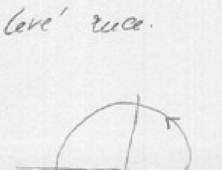
(jestliže je T_1 za T_2, je φ orientovaná záporně vzhledem ke svému parametrickému vyjádření)

(volněji řečeno, orientaci udává směr pohybu po křivce)

V tomto smyslu je tedy parametrickými rovnicemi současně dána i její orientace)

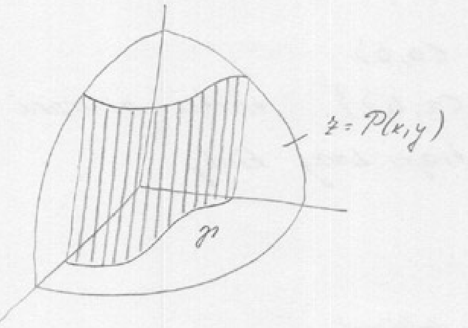
Křivka je kladně orientovaná vzhledem k oblasti Ω, kterou ohraničuje, jestliže pozorovatel, který se po křivce pohybuje v souladu s orientací má oblast Ω po levé ruce.

Př: $x = \cos t$
$y = \sin t$
$t \in \langle 0, 2\pi \rangle$



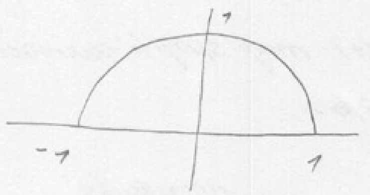
orientovaná kladně vzhledem k oblasti kterou ohraničuje

Křivkový integrál 1. druhu:



$$\int_\gamma P(x,y)\,ds = \int_a^b P(x(t),y(t))\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

Př: $\int_\gamma (2+x^2y)\,ds$ $\quad\gamma$... horní půloblouk $x^2+y^2=1$



$x = \cos t \qquad x' = -\sin t$

$y = \sin t \qquad y' = \cos t$

$t \in \langle 0, \pi \rangle$

$$\int_\gamma (2+x^2y)\,ds = \int_0^\pi (2+\cos^2 t\cdot\sin t)\cdot\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt =$$

$$= \int_0^\pi 2+\cos^2 t\cdot\sin t\,dt = \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi = 2\pi + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{2\pi + \frac{2}{3}}}$$

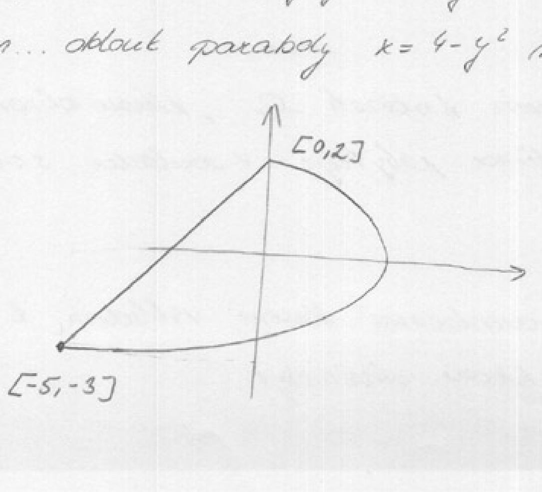
Křivkový integrál II. druhu:

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \varepsilon\int_a^b P(x(t),y(t))\cdot x'(t) + Q(x(t),y(t))\cdot y'(t)\,dt$$

Př: $\int_\gamma y^2\,dx + x\,dy$

a) γ... úsečka spojující body $[-5,-3]$, $[0,2]$

b) γ... oblouk paraboly $x = 4-y^2$ mezi stejnými body



a) $x = -5 + 5t \qquad x' = 5$

$y = -3 + 5t \qquad y' = 5$

$t \in \langle 0, 1 \rangle$

$$\int_0^1 (5t-3)^2 \cdot 5 + (5t-5) \cdot 5 \, dt = 5 \cdot \int_0^1 25t^2 - 30t + 9 + 5t - 5 \, dt =$$

$$= 5 \cdot \left[25 \cdot \frac{t^3}{3} - 25 \cdot \frac{t^2}{2} + 4t \right]_0^1 = 5 \cdot \left(\frac{25}{3} - \frac{25}{2} + 4 \right) = \underline{\underline{-\frac{5}{6}}}$$

b) $y = t \qquad y' = 1$

$x = 4 - t^2 \qquad x' = -2t$

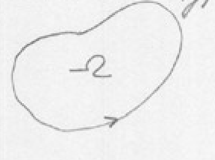
$t \in \langle -3, 2 \rangle$

$$\int_{-3}^{2} t^2(-2t) + (4 - t^2) \cdot 1 \, dt = \int_{-3}^{2} -2t^3 + 4 - t^2 \, dt = \left[-2 \frac{t^4}{4} + 4t - \frac{t^3}{3} \right]_{-3}^{2} = \underline{\underline{\frac{245}{6}}}$$

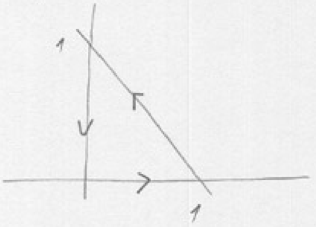
Věta 6: Greenova

Nechť fce. $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ mají spojité parciální derivace na oblasti, ve které leží oblast Ω se svou hraniční křivkou p. Je-li Ω normální k oběma osám a křivka p je po částech hladká a kladně orientovaná k oblasti Ω, platí

$$\int_p P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_\Omega \left[Q'_x(x,y) - P'_y(x,y) \right] dx\,dy$$



Př: $\int_p \underset{P(x,y)}{x^4}\,dx + \underset{Q(x,y)}{xy}\,dy \qquad p$ je kladně orientovaný Δ s vrcholy $[0,0], [1,0], [0,1]$



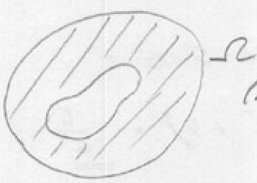
$$\iint_\Omega y - 0 \, dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} y \, dy\,dx =$$

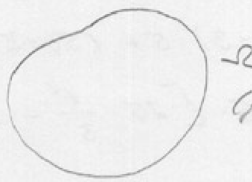
$$= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 1 - 2x + x^2 \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \underline{\frac{1}{6}}$$

Jednoduše souvislá oblast Ω:

Zvolíme-li v Ω libovolnou uzavřenou křivku γ, pak všechny body ohraničené křivkou γ leží v Ω.



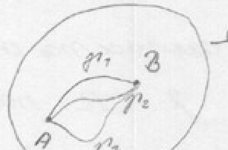


Věta 7: Nechť jsou fce. $P(x,y)$, $Q(x,y)$ spojitě diferencovatelné na jednoduše souvislé oblasti Ω, ve které leží jednoduchá po částech hladká křivka γ.

Pak platí:

$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ nezávisí na integrační cestě v oblasti Ω

$\iff \quad P_y'(x,y) = Q_x'(x,y) \qquad \forall [x,y] \in \Omega$



$$\int_{\gamma_1} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{\gamma_2} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$