Domácí úkol č. 2.

1) Vypočtěte plošný integrál $\iint_S z\cdot\sqrt{1+x^2+y^2}\,dS$, kde S ležící v 1. oktantu $(x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0)$ je hyperbolický paraboloid $z=xy$ ohraničený válcem $x^2+y^2=1$.

1. způsob:

Polární souřadnice: $x = r\cos\varphi$ $\quad r\in[0,1]$ - poloměr válce

$y = r\sin\varphi$ $\quad \varphi\in[0,\pi/2]$ - chci jen 1. oktant $(x\geq 0,\ y\geq 0)$

$\Rightarrow z = x\cdot y = r^2\cos\varphi\sin\varphi = \frac{r^2}{2}\sin(2\varphi)$

$$J_1 = \begin{vmatrix} \sin\varphi & r\cos\varphi \\ r\sin(2\varphi) & r^2\cos(2\varphi)\end{vmatrix} = r^2\cos(2\varphi)\sin\varphi - r^2\cos\varphi\cdot\sin(2\varphi) = r^2(\sin\varphi - 2\varphi) = r^2\sin(-\varphi) = -r^2\sin\varphi$$

$\sin(x-y)=\sin(x)\cos(y)-\cos(x)\sin(y)$ $\qquad$ sin je lichá fce.

$$J_2 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ r\sin(2\varphi) & r^2\cos(2\varphi)\end{vmatrix} = r^2\cos\varphi\cos(2\varphi) + r^2\sin(2\varphi)\sin\varphi = r^2\cos(2\varphi-\varphi) = r^2\cos\varphi$$

$\cos(x-y)=\cos(x)\cdot\cos(y)+\sin(x)\sin(y)$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi = 1$

$$\iint_S z\cdot\sqrt{1+x^2+y^2}\,dS = \int_0^1\int_0^{\pi/2}\frac{r^2}{2}\overbrace{}^{\sin(2\varphi)}\sqrt{1+r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}\cdot\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2}\,d\varphi\,dr =$$

$$= \int_0^1\int_0^{\pi/2}\frac{r^2}{2}\sin(2\varphi)\cdot\sqrt{1+r^2}\cdot\sqrt{r^4\sin^2\varphi+r^4\cos^2\varphi+r^2}\,d\varphi\,dr =$$

$$= \int_0^1\int_0^{\pi/2}\frac{r^2}{2}\sin(2\varphi)\cdot\sqrt{1+r^2}\cdot\sqrt{r^4+r^2}\,d\varphi\,dr = \int_0^1\int_0^{\pi/2}\frac{r^2}{2}\sin(2\varphi)\cdot\sqrt{1+r^2}\cdot$$

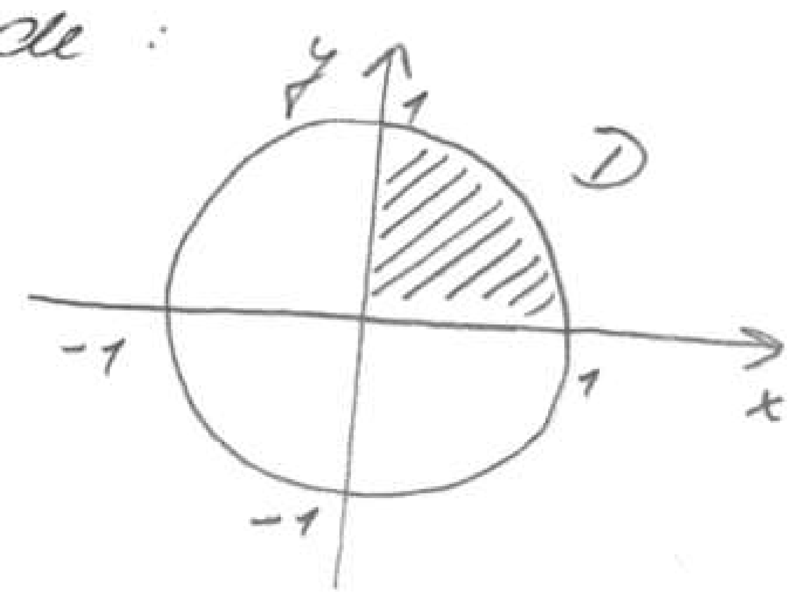
$$\cdot\sqrt{r^2(1+r^2)}\,d\varphi\,dr = \int_0^1\int_0^{\pi/2}\frac{r^3}{2}\sin(2\varphi)\cdot(1+r^2)\,d\varphi\,dr = \int_0^1\left[\left(\frac{r^3}{2}+\frac{r^5}{2}\right)\cdot(-\cos 2\varphi)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{2}\right]_0^{\pi/2}dr = \int_0^1\left(\frac{r^3}{2}+\frac{r^5}{2}\right)\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}_{1}dr = \left[\frac{r^4}{4\cdot 2}+\frac{r^6}{6\cdot 2}\right]_0^1 = \frac{1}{8}+\frac{1}{12} = \underline{\underline{\frac{5}{24}}}$$

2. způsob:

$$dS = \sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dx\,dy = \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$$

D... pravoúhlý průmět plochy S do roviny $z=0$,
v našem případě to bude:



Tedy:

$$\iint_S z\cdot\sqrt{1+x^2+y^2}\,dS = \iint_D xy\cdot\sqrt{1+x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D xy(1+x^2+y^2)\,dx\,dy$$ – klasický dvojný integrál

Polární souřadnice: $x = r\cos\varphi$ $\quad r\in[0,1]$

$y = r\sin\varphi$ $\quad \varphi\in[0,\pi/2]$

Jakobián:
$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

$$\iint_D r\cos\varphi\cdot r\sin\varphi\,(1+r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi)\cdot|J|\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^1\int_0^{\pi/2} \frac{r^2}{2}\sin(2\varphi)\cdot(1+r^2)\cdot r\,d\varphi\,dr = \dots$$ stejný integrál jako v 1. případě

2) Vypočtěte plošný integrál $\iint_S xy\,dS$, kde S je část kuželové plochy $z^2 = x^2+y^2$ mezi rovinami $z=0$, $z=9$

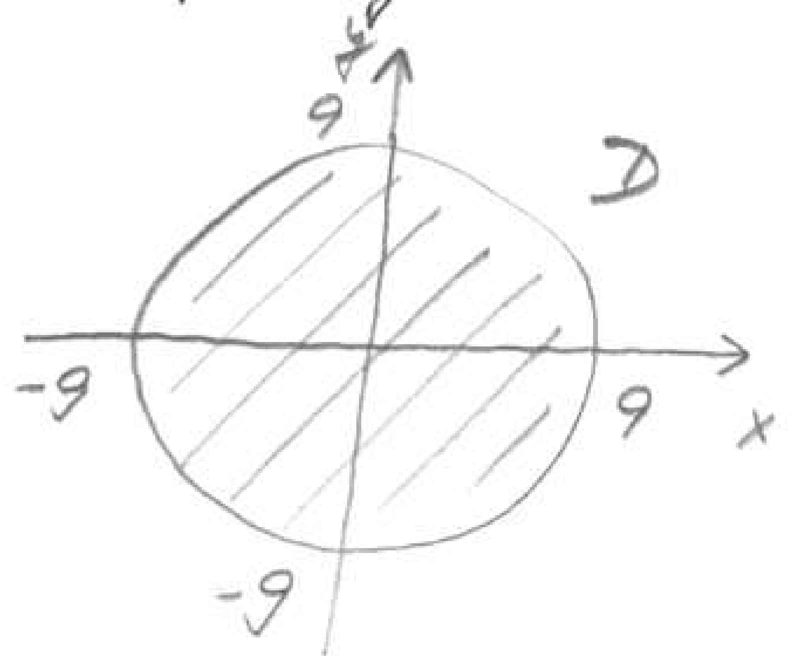
$z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$

Chceme aby $0\le z\le 9 \Rightarrow z = \sqrt{x^2+y^2}$

$$dS = \sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dx\,dy = \sqrt{1+\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dx\,dy =$$

$$= \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \sqrt{2}\,dx\,dy$$

Pravoúhlý průmět plochy S do roviny $z = 0$ ... D



$$\iint_S xy \, dS = \iint_D xy \cdot \sqrt{2} \, dx\, dy$$

Polární souřadnice:
$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow J = r$$
$$r \in [0, 9]$$
$$\varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\iint_D \sqrt{2}\, xy \, dx\, dy = \int_0^9 \int_0^{2\pi} r\cdot\cos\varphi \cdot r \cdot \sin\varphi \cdot \sqrt{2} \cdot r \, d\varphi \, dr =$$
$$= \int_0^9 \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} r^3 \sin(2\varphi)\, d\varphi\, dr = \int_0^9 \frac{\sqrt{2}}{2} r^3 \cdot \left[-\frac{\cos(2\varphi)}{2}\right]_0^{2\pi} dr =$$
$$= \int_0^9 0 \, dr = \underline{\underline{0}}$$

3) Dokažte, že pro každé komplexní číslo z platí $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

$$z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$$
$$\operatorname{Im} z = y$$
$$\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i}\left(x + iy - (x - iy)\right) = \frac{1}{2i}\cdot 2iy = y$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})}}.$$

4) Dokažte, že pro každá 2 komplexní čísla z_1, z_2 platí: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

$$z_1 = x_1 + iy_1 \Rightarrow \bar{z}_1 = x_1 - iy_1$$
$$z_2 = x_2 + iy_2 \Rightarrow \bar{z}_2 = x_2 - iy_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2)} = \overline{x_1x_2 + x_2y_1 i + x_1y_2 i - y_1y_2} =$$

$= x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$

$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 - ix_2 y_1 - i x_1 y_2$

$= x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}}}$

5) Určete, ve kterých bodech má funkce $f(z) = \overline{z}$ derivaci.

$f(z) = \overline{z} = \overline{x+iy} = x - iy$

$\Rightarrow \quad u(x,y) = x$

$v(x,y) = -y$

Cauchy-Riemannovy podmínky nejsou splněny v žádném bodě, protože

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Funkce $f(z) = \overline{z}$ tedy nemá v žádném bodě derivaci. Tato funkce představuje jednoduchý příklad spojité funkce bez derivace.

6) Spočtěte integrál $\int_C z \cdot e^{z^2} dz$, kde C je křivka s počátečním bodem $z_1 = 0$ a koncovým bodem $z_2 = i$.

$f(z) = ze^{z^2}$ je analytická na celém $\mathbb{C}$

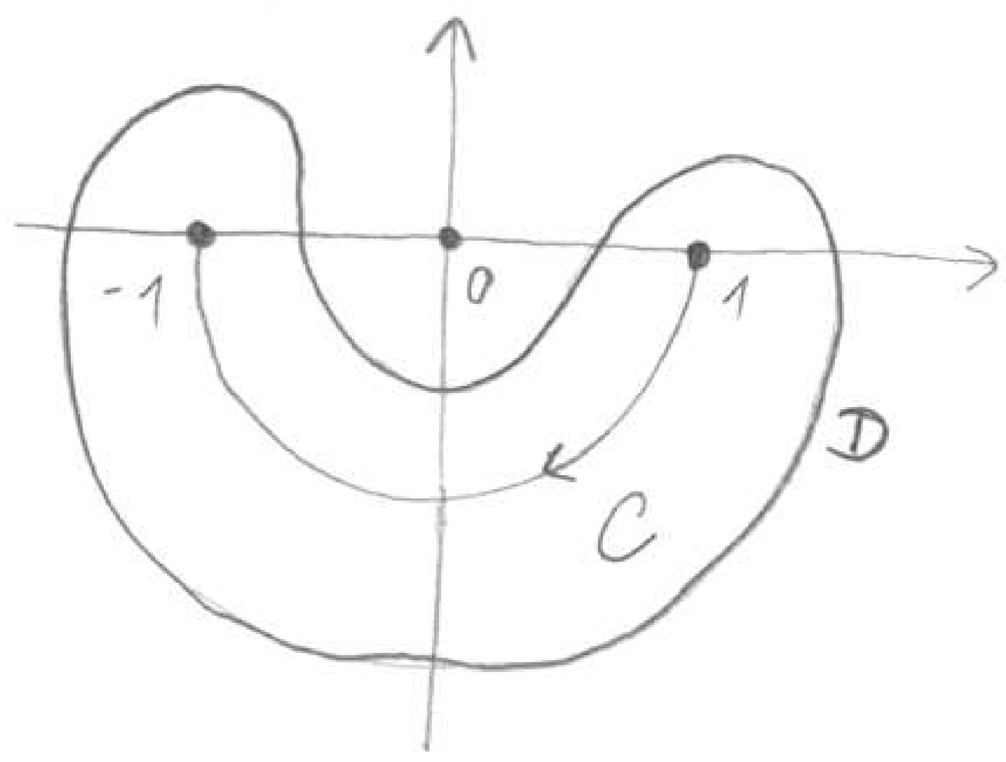
$\Rightarrow$ křivka C leží v nějaké jednoduše souvislé oblasti D na které je f analytická.

Tedy

$$\int_C z \cdot e^{z^2} dz = \int_0^i z e^{z^2} dz = \left[\frac{1}{2} e^{z^2} \right]_0^i = \frac{1}{2} e^{-1} - \frac{1}{2} e^0 = \underline{\underline{\frac{1}{2}(e^{-1} - 1)}}$$

7) Spočtěte $\int_C \left(e^z - \frac{1}{z^2}\right) dz$, kde C je spodní část jednotkové kružnice $|z|=1$ začínající v bodě 1 a končící v bodě -1.

Funkce $f(z) = e^z - \frac{1}{z^2}$ není analytická v 0.
Nicméně snadno lze nalézt jednoduše souvislou oblast D obsahující křivku C tak, aby f na D byla analytická.

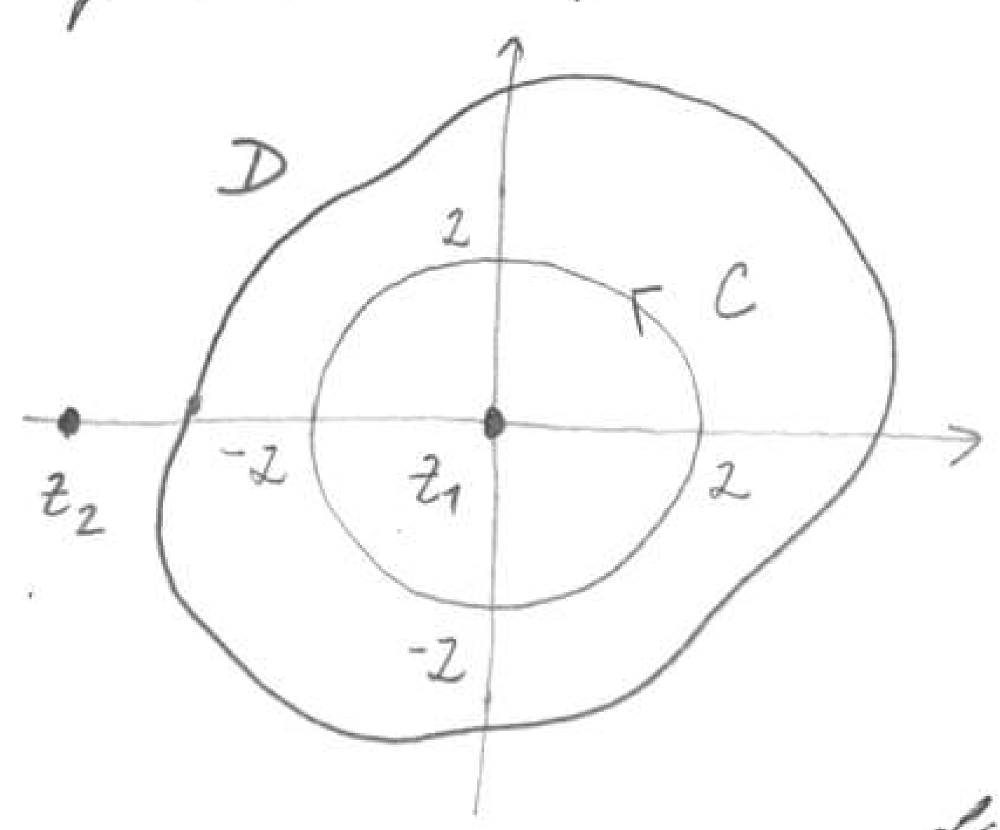


Tedy

$$\int_C \left(e^z - \frac{1}{z^2}\right) dz = \int_1^{-1} \left(e^z - \frac{1}{z^2}\right) dz = \left[e^z + \frac{1}{z}\right]_1^{-1} = e^{-1} - 1 - e - 1 = \underline{\underline{e^{-1} - e - 2}}$$

8) Spočtěte $\int_C \frac{1}{z^3(z+4)} dz$, kde C je kladně orientovaná kružnice $|z|=2$.

Singulární body (body v nichž není zadaná fce. analytická)
$z_1 = 0$
$z_2 = -4$



Každá jednoduše souvislá oblast D obsahující křivku C bude obsahovat bod, ve kterém není funkce $f(z) = \frac{1}{z^3(z+4)}$ analytická.

Počítám $\lim_{z \to z_1} (z - z_1)^m f(z)$ — najdu nejmenší možné m tak, aby tato lim byla konečná

- $m=1$: $\lim_{z\to 0} z \cdot \frac{1}{z^3(z+4)} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{z^2(z+4)} = \infty$
- $m=2$: $\lim_{z\to 0} z^2 \frac{1}{z^3(z+4)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z(z+4)} = \infty$

• $m = 3$: $\lim\limits_{z\to 0} z^3 \dfrac{1}{z^3(z+4)} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{z+4} = \dfrac{1}{4} < \infty$

$\Rightarrow$ z_1 je pól 3. řádu

(budou nás zajímat pouze body, které daná křivka obíhá)

Obecně:

Reziduum funkce $f(z)$ v bodě a, kde a je pól řádu m

$$\mathrm{Rez}_a f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \underbrace{\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-a)^m f(z)\right)}_{\text{derivace } m-1 \text{ řádu funkce } (z-a)^m f(z) \text{ podle proměnné } z}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Rez}_{z_1} f(z) = \mathrm{Rez}_0 f(z) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z\to 0} \frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}} \left(z^3 \cdot \frac{1}{z^3(z+4)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{z\to 0} \left(\frac{1}{z+4}\right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \left(-\frac{1}{(z+4)^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{2}{(z+4)^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(4)^3} = \frac{1}{64}$$

Z Reziduové věty:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Rez}_{z_1} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{1}{64} = \underline{\underline{\frac{\pi i}{32}}}$$

9) Spočtěte $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\, dz$, kde C je kladně orientovaná kružnice $|z - i| = 2$. (C je se středem v bodě i, poloměr je roven 2)

Singulární body : $z_1 = 0$

$z_2 = 1$

Obě tyto singularity leží v kružnici.

($|z_1 - i| = |-i| = 1 < 2$; $|z_2 - i| = |1 - i| = \sqrt{2} < 2$)

$z_1 = 0$

- $n=1$: $\lim\limits_{z\to 0} z \cdot \dfrac{e^z}{z(1-z)^3} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{e^z}{(1-z)^3} = 1 < \infty \Rightarrow z_1$ je pól 1. řádu

$z_2 = 1$

- $n=1$: $\lim\limits_{z\to 1} (z-1)\dfrac{e^z}{z(1-z)^3} = \lim\limits_{z\to 1} -\dfrac{e^z}{z(1-z)^3} = \infty$

- $n=2$: $\lim\limits_{z\to 1} (z-1)^2\dfrac{e^z}{z(1-z)^3} = \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{e^z}{z(1-z)} = \infty$

- $n=3$: $\lim\limits_{z\to 1} (z-1)^3\dfrac{e^z}{z(1-z)^3} = \lim\limits_{z\to 1} -\dfrac{e^z}{z} = -e < \infty \Rightarrow z_2$ je pól 3.řádu

$$\operatorname{Rez}_{z_1} f(z) = \frac{1}{(1-1)!} \lim_{z\to 0} \frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}} \left(z \cdot \frac{e^z}{z(1-z)^3}\right) = \frac{1}{1} \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{(1-z)^3} = 1$$

$$\operatorname{Rez}_{z_2} f(z) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z\to 1} \frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}} \left((z-1)^3 \cdot \frac{e^z}{z(1-z)^3}\right) = \frac{1}{2} \lim_{z\to 1} \left(-\frac{e^z}{z}\right)'' =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z\to 1} \left(-\frac{e^z z - e^z}{z^2}\right)' = \frac{1}{2} \lim_{z\to 1} \left(-\frac{(e^z z + e^z - e^z)\cdot z^2 - 2z(e^z z - e^z)}{z^4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{z\to 1} \left(-\frac{z^3 e^z - 2z^2 e^z + 2z e^z}{z^4}\right) = -\frac{1}{2} \cdot (e - 2e + 2e) = -\frac{1}{2} e$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\, dz = 2\pi i \left(\operatorname{Rez}_{z_1} f(z) + \operatorname{Rez}_{z_2} f(z)\right) = 2\pi i \left(1 - \frac{1}{2} e\right) =$$

$$= \underline{\underline{\pi i (2-e)}}$$