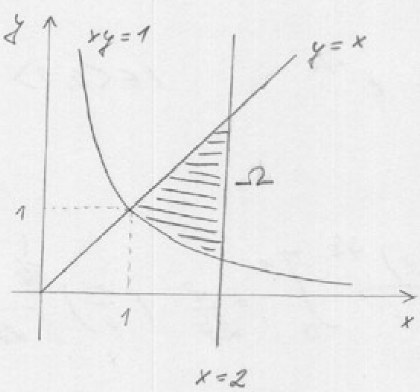
Domácí úkol č. 1.

1) Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, kde Ω je určena vztahy $x=2,\ y=x,\ xy=1$.



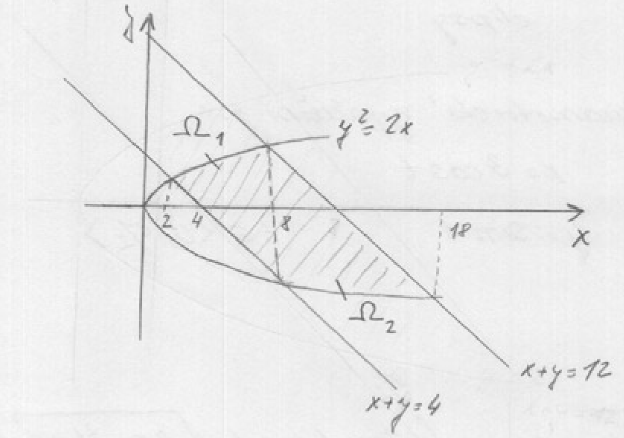
$$\iint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy \right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y} \right]_{1/x}^{x} dx = \int_1^2 (-x + x^3)\,dx =$$

dosazuji za y

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x^4 \right]_1^2 = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$$

2) Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} dx\,dy$, kde Ω je určena vztahy $x+y=4,\ x+y=12,\ y^2=2x$.



$$\iint\limits_{\Omega} dx\,dy = \iint\limits_{\Omega_1} dx\,dy + \iint\limits_{\Omega_2} dx\,dy =$$

$$= \int_0^8 \left(\int_{4-x}^{\sqrt{2x}} dy \right) dx + \int_8^{18} \left(\int_{-\sqrt{2x}}^{12-x} dy \right) dx$$

$$= \int_0^8 (\sqrt{2x} + x - 4)\,dx + \int_8^{18} (\sqrt{2x} - x + 12)\,dx$$

$$= \frac{74}{3} + \frac{112}{3} = \underline{\underline{62}}$$

3) Určete délku jednoho závitu šroubovice, která je dána parametrickými rovnicemi: $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = \frac{3}{2\pi}t,\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

$x' = -2\sin t \qquad y' = 2\cos t \qquad z' = \frac{3}{2\pi}$

$$\int_{p} 1\,ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{9}{4\pi^2}}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 + \frac{9}{4\pi^2}}\,dt = \left[\sqrt{\frac{16\pi^2+9}{4\pi^2}}\,t \right]_0^{2\pi} =$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{16\pi^2+9}}}$$

4) Spočtěte $\int_{\varphi} ds$, kde $\varphi = \{[x,y] : y = x\sqrt{x},\ 0 \le x \le 1\}$

Parametricky vyjádříme φ: $x = t$

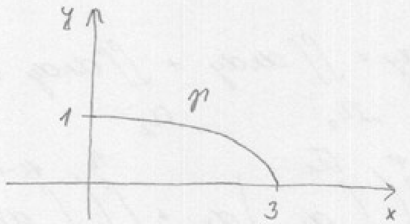
$y = t\sqrt{t} = t^{3/2}$ $\qquad t \in \langle 0, 1 \rangle$

$x' = 1 \qquad y' = \frac{3}{2} t^{1/2}$

$$\int_{\varphi} ds = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}\, dt = \left[\frac{4}{9} \cdot \frac{(1 + 9/4 t)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \frac{8}{27} \cdot \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - \frac{8}{27} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{8}{27} \left(\frac{13 \cdot \sqrt{13}}{8} - 1 \right)}}$$

5) Spočtěte $\int_{\varphi} xy\, ds$, kde $\varphi = \{[x,y] : \underbrace{\frac{x^2}{9} + y^2 = 1}_{\text{rce. elipsy}},\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.



Parametrické vyjádření φ:

$x = 3\cos t$

$y = \sin t \qquad t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$

$x' = -3\sin t \qquad y' = \cos t$

$$\int_0^{\pi/2} 3 \cdot \cos t \sin t \cdot \sqrt{9\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = \int_0^{\pi/2} 3\cos t \sin t \cdot \sqrt{8\sin^2 t + 1}\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{8} (8\sin^2 t + 1)^{3/2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{27}{8} - \frac{1}{8} = \frac{26}{8} = \underline{\underline{\frac{13}{4}}}$$

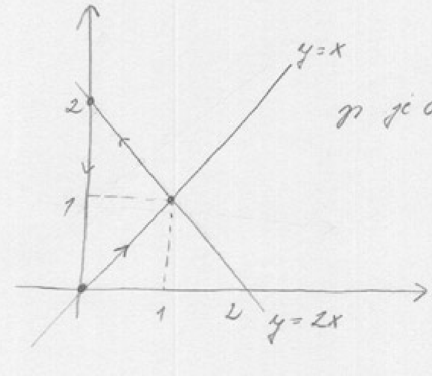
6) Spočtěte $\int_{\varphi} (y^2 - z^2)\,dx + 2yz\,dy - x^2 dz$, kde φ je kladně orientovaná hladká křivka s parametrizací $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,\ t \in \langle 0, 1 \rangle$.

$x' = 1 \qquad y' = 2t \qquad z' = 3t^2$

$$\int_0^1 (t^4 - t^6) + 2t^2 \cdot t^3 2t - t^2 \cdot 3t^2 dt = \int_0^1 3t^6 - 2t^4\, dt = \left[\frac{3t^7}{7} - \frac{2t^5}{5} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{3}{7} - \frac{2}{5} = \underline{\underline{\frac{1}{35}}}$$

7) Vypočítejte $\int_\gamma (2-y)\,dx + (1+x)\,dy$, kde γ je obvod trojúhelníku s vrcholy $[0,0]$, $[1,1]$, $[0,2]$ a orientace je dána uvedeným pořadím vrcholů.



γ je orientovaná kladně

γ není hladká křivka, vznikne spojením 3 na sebe navazujících křivek (úseček - stran trojúhelníka) $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ s parametrizací:

γ_1: $x = t$, $y = t$, $t \in \langle 0,1 \rangle$

γ_2: $x = t$, $y = 2-t$, $t \in \langle 0,1 \rangle$

γ_3: $x = 0$, $y = t$, $t \in \langle 0,2 \rangle$

γ_1 je orientovaná kladně, γ_2 je orientovaná záporně

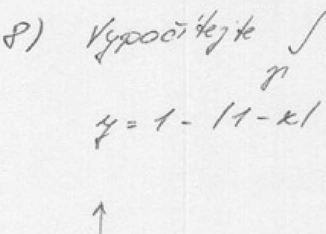
$$\int_\gamma (2-y)\,dx + (1+x)\,dy = +\int_{\gamma_1} (2-y)\,dx + (1+x)\,dy - \int_{\gamma_2} (2-y)\,dx + (1+x)\,dy$$

$$- \int_{\gamma_3} (2-y)\,dx + (1+x)\,dy = \int_0^1 (2-t) + 1 + t \, dt - \int_0^1 (2-2+t) - (1+t)\,dt$$

γ_3 je orientovaná záporně

$$- \int_0^2 1\,dt = [3t]_0^1 - [-t]_0^1 - [t]_0^2 = \underline{\underline{2}}$$

8) Vypočítejte $\int_\gamma (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$, kde γ je křivka $y = 1 - |1-x|$, $x \in \langle 0,2 \rangle$ s počátečním bodem $[0,0]$.



γ rozložíme na dvě křivky s parametrizací:

γ_1: $x = t$, $y = t$, $t \in \langle 0,1 \rangle$

γ_2: $x = t$, $y = 2-t$, $t \in \langle 1,2 \rangle$

γ_1, γ_2 ... kladně orientované

$$\int_{\gamma_1} (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy + \int_{\gamma_2} (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy = \int_0^1 2t^2\,dt + \int_1^2 \overbrace{t^2 + (2-t)^2 - \left(t^2 - (2-t)^2\right)}^{2t^2-8t+4}\,dt = \left[2\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{2t^3}{3} - 4t^2 + 8t\right]_1^2 = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$