Matematický ústav Slezské univerzity v Opavě
Učební texty k přednášce ALGEBRA II, letní semestr 2000/2001
Michal Marvan

19. Druhý rozklad lineární transformace

Úmluva. Všude $P = \mathbf{C}$.

V přednášce o vlastních vektorech jsme se seznámili s diagonalizovatelnými transformacemi. V bázi složené z vlastních vektorů v_i mají diagonální matici s vlastními čísly λ_i na diagonále.

Obecná lineární transformace nemusí mít bázi složenou z vlastních vektorů. Nicméně, jak ukážeme, lze zkonstruovat jinou významnou bázi — Jordanovu. Matice lineární transformace v Jordanově bázi je tzv. Jordanova matice. Opět má na diagonále vlastní čísla, ale může obsahovat i nenulové prvky v řadě sousedící s diagonálou (všechny ovšem rovny 1).

Východiskem pro nalezení Jordanovy báze bude první rozklad, příslušný rozkladu charakteristického polynomu (nebo libovolného jiného anulujícího polynomu) χ_f na nesoudělné součinitele. Při $P = \mathbf{C}$ ovšem existuje rozklad na kořenové činitele

$$\chi_f = (x - \xi_1)^{k_1} \cdots (x - \xi_s)^{k_s}, \qquad \xi_i \neq \xi_j \text{ pro } i \neq j,$$

a pro $i \neq j$ jsou polynomy $(x - \xi_i)^{k_i}$ a $(x - \xi_j)^{k_j}$ nesoudělné. Invariantní podprostory prvního rozkladu pak jsou

$$U_i = \operatorname{Ker}(f - \xi_i \operatorname{id})^{k_i}.$$

Na jednotlivých invariantních podprostorech vznikají restrikce $f|_{U_i} : U_i \to U_i$. Označíme-li $g_i = f - \xi_i \operatorname{id}$, pak $\operatorname{Ker} g_i^{k_i} = U_i$, a tedy $(g|_{U_i})^{k_i} = 0$.

Má tedy smysl studovat transformace $f : U \to U$ takové, že pro některé číslo ξ transformace $g = f - \xi \operatorname{id}$ splňuje $g^k = 0$. Výsledky použijeme pro $U = U_i$ a $g = f|_{U_i} - \xi_i \operatorname{id}_{U_i}$, $i = 1, \dots, s$.

1. Cyklické podprostory

Definice. Transformace $g : U \to U$ (resp. čtvercová matice B) se nazývá *nilpotentní*, jestliže existuje celé číslo $k \geq 1$ takové že $g^k = 0$ (resp. $B^k = 0$).

Cvičení. Transformace g je nilpotentní právě tehdy, když je její matice B (v libovolné bázi) nilpotentní.

Definice. Podprostor $T \subseteq U$ se nazývá *cyklický* vzhledem k transformaci $g : U \to U$, jestliže má bázi $e_1, e_2, \dots, e_n$ takovou, že

$$g(e_1) = e_2, \quad g(e_2) = e_3, \quad \dots, \quad g(e_{n-1}) = e_n, \quad g(e_n) = 0.$$

Báze $e_1, e_2, \dots, e_n$ se nazývá *Jordanova báze*.

Schematicky,

$$e_1 \xrightarrow[g]{} e_2 \xrightarrow[g]{} \cdots e_{n-1} \xrightarrow[g]{} e_n \xrightarrow[g]{} 0.$$

Definice. Matice

$$J_1(\xi) = \begin{pmatrix}\xi\end{pmatrix}, \quad J_2(\xi) = \begin{pmatrix}\xi & 0\\ 1 & \xi\end{pmatrix}, \quad J_3(\xi) = \begin{pmatrix}\xi & 0 & 0\\ 1 & \xi & 0\\ 0 & 1 & \xi\end{pmatrix},$$

$$J_4(\xi) = \begin{pmatrix}\xi & 0 & 0 & 0\\ 1 & \xi & 0 & 0\\ 0 & 1 & \xi & 0\\ 0 & 0 & 1 & \xi\end{pmatrix}, \quad \text{atd.}$$

se nazývají *Jordanovy bloky* (též *Jordanovy buňky*).

Tvrzení. *Buď T cyklický podprostor nilpotentní transformace g, buď $f = g + \xi\,\mathrm{id}$. Pak*
(1) *T je invariantní vzhledem k lineárním transformacím g i f;*
(2) *$g|_T$ má v Jordanově bázi $e_1, e_2, \dots, e_n$ matici $J_n(0)$;*
(3) *$f|_T$ má v Jordanově bázi $e_1, e_2, \dots, e_n$ matici $J_n(\xi)$.*

Důkaz. Cvičení.

Často se setkáváme s odlišnou definicí Jordanových buněk — jedničky stojí v řadě *nad* diagonálou. To odpovídá opačnému pořadí vektorů Jordanovy báze, tj. $e_n, \dots, e_2, e_1$.

2. Nalezení Jordanovy báze

Tvrzení. *Buď $g : U \to U$ nilpotentní transformace. Pak existují cyklické podprostory $T_1, \dots, T_r \subseteq U$ takové, že $U = T_1 \dotplus \cdots \dotplus T_r$.*

V důkazu budeme potřebovat následující lemma.

Lemma. *Buď $h : U \to V$ lineární zobrazení. Zvolme libovolně bázi v $\mathrm{Ker}\, h$ a doplňme ji do báze v U nějakými vektory $e_1, \dots, e_m$. Pak jsou vektory $h(e_1), \dots, h(e_m)$ nezávislé a tvoří bázi v $\mathrm{Im}\, h$.*

Důkaz. Cvičení. (Viz důkaz formule $\dim U = \dim \mathrm{Ker}\, h + \dim \mathrm{Im}\, h$.)

Tvrzení dokážeme uvedením praktického algoritmu pro nalezení Jordanovy báze. Popis algoritmu tvoří věty psané kurzívou.

Máme $U = \mathrm{Ker}\, g^k$ pro jisté k (protože g je nilpotentní). Bez újmy na obecnosti je číslo k minimální, to jest, $g^{k-1} \neq 0$, a tudíž $\mathrm{Ker}\, g^{k-1} \neq U$.

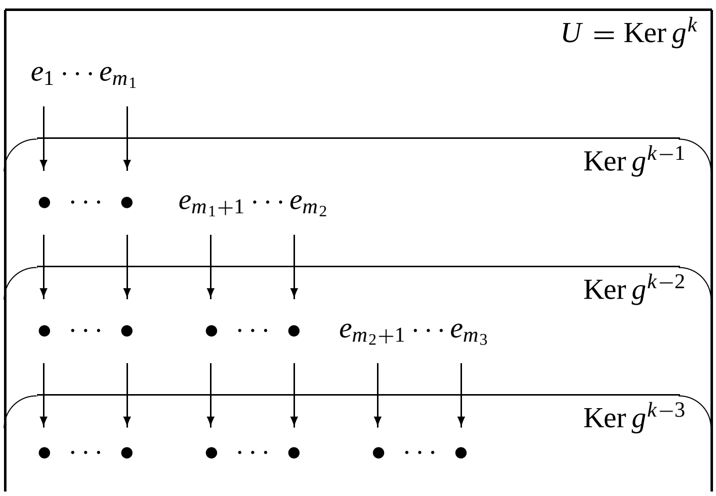
1. *Zvolíme libovolně bázi v $\mathrm{Ker}\, g^{k-1}$ a doplníme ji do báze v $U = \mathrm{Ker}\, g^k$ nějakými vektory $e_1, \dots, e_{m_1}$.* Podle lemmatu potom vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1})$ tvoří bázi v $\mathrm{Im}\, g^{k-1}$ a jsou tedy nezávislé.

2. *Zvolíme libovolně bázi v $\mathrm{Ker}\, g^{k-2}$ a přidáme k ní vektory $g(e_1), \dots, g(e_{m_1}) \in \mathrm{Ker}\, g^{k-1}$* (protože $g^k = 0$). Tato sestava je lineárně nezávislá. [Skutečně, lineární závislost by znamenala, že existují skaláry $c_1, \dots, c_{m_1}$ takové, že $c_1 g(e_1) + \cdots + c_{m_1} g(e_{m_1}) \in \mathrm{Ker}\, g^{k-2}$. Pak ovšem $0 = g^{k-2}(c_1 g(e_1) + \cdots + c_{m_1} g(e_{m_1})) = c_1 g^{k-1}(e_1) + \cdots + c_{m_1} g^{k-1}(e_{m_1})$, a tedy $c_1 = 0, \dots, c_{m_1} = 0$, protože vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1})$ jsou nezávislé (viz výše).]

Sestavu doplníme do báze v $\operatorname{Ker} g^{k-1}$ *nějakými vektory* $e_{m_1+1}, \dots, e_{m_2}$. Tím se vlastně doplní báze v $\operatorname{Ker} g^{k-2}$ do báze v $\operatorname{Ker} g^{k-1}$ vektory $g(e_1), \dots, g(e_{m_1}), e_{m_1+1}, \dots, e_{m_2}$. Z lemmatu potom vyplývá, že vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2})$ tvoří bázi v obrazu $g^{k-2} \operatorname{Ker} g^{k-1}$ a jsou tedy nezávislé.

3. *Zvolíme libovolně bázi v* $\operatorname{Ker} g^{k-3}$ *a připojíme k ní vektory* $g^2(e_1), \dots, g^2(e_{m_1})$, $g(e_{m_1+1}), \dots, g(e_{m_2}) \in \operatorname{Ker} g^{k-2}$. Tato sestava je lineárně nezávislá. [Skutečně, jinak by existovaly skaláry $c_1, \dots, c_{m_1}, c_{m_1+1}, \dots, c_{m_2}$ takové, že $c_1 g^2(e_1) + \cdots + c_{m_1} g^2(e_{m_1}) + c_{m_1+1} g(e_{m_1+1}) + \cdots + c_{m_2} g(e_{m_2}) \in \operatorname{Ker} g^{k-3}$. Pak ovšem $0 = g^{k-3}(c_1 g^2(e_1) + \cdots + c_{m_1} g^2(e_{m_1}) + c_{m_1+1} g(e_{m_1+1}) + \cdots + c_{m_2} g(e_{m_2})) = c_1 g^{k-1}(e_1) + \cdots + c_{m_1} g^{k-1}(e_{m_1}) + c_{m_1+1} g^{k-2}(e_{m_1+1}) + \cdots + c_{m_2} g^{k-2}(e_{m_2})$, a tedy $c_1 = 0, \dots, c_{m_1} = 0, c_{m_1+1} = 0, \dots, c_{m_2} = 0$, protože vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \dots g^{k-2}(e_{m_2})$ jsou nezávislé (viz výše).]

Sestavu doplníme do báze v $\operatorname{Ker} g^{k-2}$ *nějakými vektory* $e_{m_2+1}, \dots, e_{m_3}$. Tím se doplní báze v $\operatorname{Ker} g^{k-3}$ do báze v $\operatorname{Ker} g^{k-2}$ vektory $g^2(e_1), \dots, g^2(e_{m_1}), g(e_{m_1+1}), \dots, g(e_{m_2}), e_{m_2+1}, \dots, e_{m_3}$.



Podobných kroků provedeme k (v posledním kroku doplňujeme bázi podprostoru $\operatorname{Ker} g^0 = \operatorname{Ker} \mathrm{id} = \{0\}$ do báze v podprostoru $\operatorname{Ker} g$). Celkově získáme bázi

$$e_1, \dots, e_{m_1},$$
$$g(e_1), \dots, g(e_{m_1}), e_{m_1+1}, \dots, e_{m_2},$$
$$g^2(e_1), \dots, g^2(e_{m_1}), g(e_{m_1+1}), \dots, g(e_{m_2}), e_{m_2+1}, \dots, e_{m_3},$$
$$\dots$$

v prostoru U. Podprostory

$$[\![e_1, g(e_1), g^2(e_1), \dots]\!], \quad \dots, \quad [\![e_{m_1}, g(e_{m_1}), g^2(e_{m_1}), \dots]\!],$$
$$[\![e_{m_1+1}, g(e_{m_1+1}), g^2(e_{m_1+1}), \dots]\!], \quad \dots, \quad [\![e_{m_2}, g(e_{m_2}), g^2(e_{m_2}), \dots]\!],$$
$$\dots$$

jsou pak cyklické podprostory s příslušnými Jordanovými bazemi.

3. Invarianty lineární transformace

Nalezli jsme cyklické podprostory a v každém z nich Jordanovu bázi. Situaci můžeme znázornit diagramem, jehož vrcholy jsou vektory Jordanovy báze a šipky znamenají zobrazení g:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & & & & & & & & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & & & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array} \tag{$*$}$$

Sloupce znamenají jednotlivé cyklické podprostory. Vektory spodní řady se zobrazují na nulový vektor. Tvoří vlastně bázi v $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}(f - \xi \operatorname{id}) = V_\xi$, což je prostor vlastních vektorů s vlastním číslem ξ. Tudíž, počet sloupců = počet cyklických podprostorů = $\dim V_\xi$.

Vektory dolních j řádků tvoří bázi v $\operatorname{Ker} g^j$. V j-tém řádku zdola je proto právě

$$m_{k-j} = \dim \operatorname{Ker} g^j - \dim \operatorname{Ker} g^{j-1} \tag{$**$}$$

bodů. Čísla $m_1 \le m_2 \le \cdots \le m_k$ jednoznačně určují délku sloupců diagramu, a tím i dimenze cyklických podprostorů.

Formule ($**$) ukazuje, že čísla $m_1 \le m_2 \le \cdots \le m_k$ závisí jen a jen na nilpotentní transformaci g a nikoliv na konkrétním postupu, kterým byla získána Jordanova báze. Jsou to *invarianty lineární transformace* g.

Důsledek. *Buď* $g : U \to U$ *nilpotentní transformace. Pak existuje báze prostoru* U *taková, že*

(a) *transformace* g *má blokově diagonální matici, která je přímým součtem Jordanových bloků* $J_s(0)$*;*

(b) *transformace* $f = g + \xi \operatorname{id}$ *má blokově diagonální matici, která je přímým součtem Jordanových bloků* $J_s(\xi)$.

Příklad. Uvažujme o lineárním zobrazení $\mathbf{C}^5 \to \mathbf{C}^5$ s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -4 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Anulující polynom nejmenšího stupně je $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3$, s jediným kořenem -2, což je současně jediná vlastní hodnota matice A. První rozklad má proto jediného sčítance $U = \mathbf{C}^5$ a

$$B = A + 2E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

je nilpotentní matice, $B^3 = 0$. Spočítáme

$$B^2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

načež

$$\operatorname{Ker} B^2 = [\![(5,0,0,0,-4),(0,5,0,0,-1),(0,0,5,0,-2),(0,0,0,5,4)]\!].$$

Tento čtyřrozměrný podprostor můžeme doplnit do báze v $\mathbf{C}^5$ libovolným vektorem, který v něm neleží, zvolme například

$$e_1 = (0,0,0,0,1).$$

Tím je ukončen první krok. Ve druhém kroku spočítáme

$$\operatorname{Ker} B = [\![(1,0,0,1,0),(0,-5,1,-2,-1)]\!],$$

a přidáme vektor $Be_1 = (0,0,3,4,2)$. Získanou sestavu tří nezávislých vektorů je třeba doplnit do báze ve čtyřrozměrném $\operatorname{Ker} B^2$ jedním vektorem; zvolme například

$$e_2 = (0,0,0,5,4)$$

(ve skutečnosti bylo možné vzít kterýkoliv ze shora uvedených generátorů podprostoru $\operatorname{Ker} B^2$). Tím je ukončen druhý krok. Ve třetím kroku je $\operatorname{Ker} B^0 = \operatorname{Ker} E = 0$ a doplňujeme dva vektory $g^2(e_1) = (-5,0,0,-5,0)$ a $g(e_2) = (-10,15,-3,-4,3)$ do báze v dvourozměrném $\operatorname{Ker} B$, což ovšem nevyžaduje žádný doplňující vektor a jsme hotovi.

Hledaná Jordanova báze je proto tvořena vektory e_1, $g(e_1)$, $g^2(e_1)$, e_2, $g(e_2)$. Příslušný diagram je

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
\bullet \arrow[d] & \\
\bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet & \bullet
\end{tikzcd}$$

a jeho dva sloupce odpovídají dvěma Jordanovým blokům rozměru 3 a 2. Dostáváme Jordanův tvar matice B resp. A jako

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} -2&0&0&0&0\\ 1&-2&0&0&0\\ 0&1&-2&0&0\\ 0&0&0&-2&0\\ 0&0&0&1&-2 \end{pmatrix}$$

(při obráceném pořadí vektorů Jordanovy báze by jedničky stály nad diagonálou; odlišné může být i pořadí Jordanových bloků).

Cvičení. Spočtěte Jordanův tvar transponované matice $A^\top$. (Výsledek: je týž.)

Vraťme se nyní k obecné transformaci $f : V \to V$ a prvnímu rozkladu $V = U_1 \dot{+} \cdots \dot{+} U_s$ podle některého anulujícího polynomu. Pro každý z prostorů U_l, $l = 1, \dots, s$ dostáváme rozklad na cyklické podprostory $T_{l,i}$, kde $i = 1, \dots, k_l$, celkem tedy

$$V = T_{1,1} \dot{+} \cdots \dot{+} T_{1,k_1} \dot{+} \cdots \dot{+} T_{s,1} \dot{+} \cdots \dot{+} T_{s,k_s}.$$

Tento rozklad se nazývá *druhý rozklad* prostoru lineární transformace.

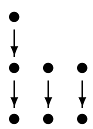
Připomeňme, že cyklické podprostory $T_{i,j}$ jsou invariantní a zobrazení $f|_{T_{i,j}}$ mají v Jordanově bázi matici tvaru $J_r(\xi)$, $r = \dim T_{i,j}$.

Definice. Matice, která je přímým součtem matic $J_r(\xi)$, se nazývá *matice v Jordanově tvaru*.

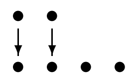
Příklad. Matice

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc||cc|cc|c|c}
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{array}\right)$$

je v Jordanově tvaru. Bloky prvního rozkladu jsou vyznačeny dvojitou čarou. Blokům druhého rozkladu odpovídají diagramy



resp.



Šipky zde znamenají zobrazení $f - 2\,\mathrm{id}$ resp. $f - 3\,\mathrm{id}$. Délky spodních řádků jsou dimenze prostorů vlastních vektorů s vlastními hodnotami 2 resp. 3.

Důsledek. 1. *Buď $f : V \to V$ lineární transformace. Pak existuje báze prostoru V taková, že f má matici v Jordanově tvaru.*

2. *Buď A čtvercová komplexní matice. Pak je podobná matici v Jordanově tvaru.*

Odpovídající báze se nazývá Jordanova báze a získáme ji sjednocením Jordanových bazí v jednotlivých cyklických podprostorech $T_{i,j}$.

Při praktickém převodu na Jordanův tvar nejdříve nalezneme invariantní podprostory $U = \operatorname{Ker} g^k = \operatorname{Ker}(f - \xi\,\mathrm{id})^k$ prvního rozkladu, pro každou vlastní hodnotu ξ zvlášť. V každém z nich pak hledáme Jordanovu bázi známým postupem.

Zbývá rozhodnout, nakolik je Jordanův tvar matice lineárního zobrazení určen jednoznačně. Postup k nalezení Jordanovy báze, který jsme popsali, udává jednoznačně všechny Jordanovy buňky $J_s(\xi)$. Čísla ξ probíhají všechny vlastní hodnoty a rozměr s je určen prostřednictvím diagramů $(*)$, tj. prostřednictvím čísel $m_1 \le m_2 \cdots \le m_k$, která jsou zase jednoznačně určena formulemi $(**)$, kde $g = f - \xi\,\mathrm{id}$. Neurčeno pak zůstává pouze pořadí Jordanových buněk.

4. Minimální polynom

Minimální polynom můžeme jednoduše stanovit z Jordanova tvaru jako polynom

$$(x - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (x - \lambda_s)^{\mu_s},$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou vlastní hodnoty matice A a $\mu_1, \dots, \mu_s$ jsou výšky (maximální délky sloupců) diagramů $(*)$ pro jednotlivé vlastní hodnoty $\xi_1, \dots, \xi_s$. (Dokažte jako cvičení.)

Příklad. Matice z posledního příkladu má minimální polynom $(x-2)^3(x-3)^2$.

5. Kriterium podobnosti matic

Připomeňme, že dvě čtvercové matice A, B jsou podobné, jestliže existuje invertibilní matice Q taková, že $B = Q^{-1}AQ$. Zapisujeme $A \approx B$. Dále připomeňme, že matice jedné a téže lineární transformace v různých bazích jsou si podobné (maticí Q je v tomto případě matice přechodu mezi bázemi).

Tvrzení. *Každá komplexní matice A je podobná některé matici B v Jordanově tvaru.*

Důkaz. Matice A typu n/n je maticí lineárního zobrazení $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n, u \mapsto Au$. V Jordanově bázi má zobrazení f matici B v Jordanově tvaru. Pak $B \approx A$.

Matice B z předchozího tvrzení se nazývá *Jordanův tvar* matice A. Jordanův tvar je určen jednoznačně až na pořadí bloků a rozhoduje o podobnosti matic:

Tvrzení. *Matice A', A'' jsou si podobné právě tehdy, když mají stejný Jordanův tvar až na pořadí Jordanových bloků.*

Důkaz. Jsou-li si matice A', A'' podobné, pak mají zobrazení $u \mapsto A'u$, $u \mapsto A''u$ stejné vlastní hodnoty a stejné jsou i dimenze m'_j a m''_j určené formulemi $(**)$ (cvičení). Proto jsou stejné i Jordanovy tvary.

Naopak, buďte $B' \approx A'$ a $B'' \approx A''$ Jordanovy tvary matic A' a A''. Jestliže se B' a B'' liší jen pořadím Jordanových bloků, pak jsou si podobné (cvičení), načež $A' \approx B' \approx B'' \approx A''$.

Cvičení. Dokažte, že pro libovolnou čtvercovou matici platí $A \approx A^\top$.
Návod: Dokažte postupně
(a) $J \approx J^\top$ pro libovolnou Jordanovu matici J (stačí zpřeházet vektory v Jordanově bázi);
(b) je-li $A \approx J$, pak $A^\top \approx J^\top$.