Matematický ústav Slezské univerzity v Opavě
Učební texty k přednášce ALGEBRA II, letní semestr 2000/2001
Michal Marvan

16. Skalární součin

Vektory obecně jsme definovali jako prvky vektorového prostoru. Algebraická struktura vektorového prostoru určuje, jak se vektory sčítají a násobí skaláry. V geometrii (např. v prostorech E^2, E^3) se s vektory spojují další užitečné veličiny, např. délka vektoru či odchylka dvou vektorů, které nejsou odvoditelné z pouhých algebraických operací vektorového prostoru. Tyto veličiny mohou být zavedeny i v případě obecného vektorového prostoru, je k tomu ovšem potřebná ještě jistá dodatečná struktura s vlastními axiomy. Příslušné axiomy vycházejí velmi jednoduše, je-li onou dodatečnou strukturou skalární součin. Je to speciální zobrazení, které dvojici vektorů přiřazuje skalár. Obecný skalární součin nejen obohacuje algebru o geometrické ideje, ale má i důležité fyzikální aplikace.

Definice. Buď V vektorový prostor nad polem reálných čísel $\mathbf{R}$. *Eukleidovský skalární součin* na V je zobrazení $g : V \times V \to \mathbf{R}$, splňující pro libovolnou trojici vektorů $u, v, w \in V$ a libovolný skalár $a \in \mathbf{R}$

1° $g(u+v, w) = g(u, w)+g(v, w)$ a $g(au, w) = ag(u, w)$ (linearita v prvním argumentu);
2° $g(u, v) = g(v, u)$ (symetrie);
3° Jestliže $u \neq 0$, pak $g(u, u) > 0$ (pozitivní definitnost).

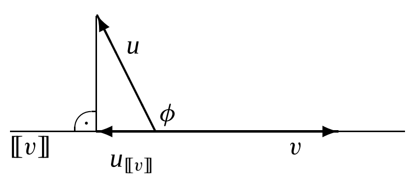
Cvičení. (1) Ukažte, že eukleidovský skalární součin je lineární i v druhém argumentu.
(2) Ukažte, že pro libovolný vektor u platí $g(0, u) = g(0, u) = 0$. Návod: $g(0, u) = g(0 \cdot u, u)$.
(3) Důsledek: $g(u, u) \geq 0$ pro každé $u \in V$, přičemž $g(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Příklad. Ve vektorovém prostoru E^3 nad polem $\mathbf{R}$ uvažujme o dvou vektorech u, v. Kolmý průmět vektoru u do podprostoru $[\![v]\!]$ označme $u_{[\![v]\!]}$. Je-li ϕ odchylka vektorů u, v a $|u|$ délka vektoru u, je $|u| \cos\phi = \pm|u_{[\![v]\!]}|$ délka vektoru $u_{[\![v]\!]}$ opatřená znaménkem $+$ nebo $-$ podle toho, jsou-li vektory $u_{[\![v]\!]}$ a v orientovány souhlasně či opačně.

Součin

$$g(u, v) = \pm|u_{[\![v]\!]}|\,|v| = |u||v| \cos\phi$$

splňuje axiomy 1°–3° skalárního součinu (cvičení).



Příklad. Pro vektory $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ položme $g(u, v) = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$. Pak g je skalární součin na $\mathbf{R}^n$. Nazývá se *standardní* skalární součin na $\mathbf{R}^n$.

Kromě standardního skalárního součinu máme na $\mathbf{R}^n$ ještě nekonečné množství dlaších skalárních součinů.

Cvičení. Buďte $a_1, \dots, a_n$ kladná reálná čísla. Pro vektory $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ položme $g(u, v) = a_1u_1v_1 + \cdots + a_nu_nv_n$. Pak g je skalární součin na $\mathbf{R}^n$.

V kapitole o kvadratických formách získáme úplný popis všech skalárních součinů na vektorovém prostoru V dimenze $n > 1$.

V matematické analýze se zavádějí důležité skalární součiny na nekonečněrozměrných vektorových prostorech. Studují se různé prostory Lebesgueovsky integrovatelných funkcí, jako je prostor $L_2(a, b)$ všech funkcí f takových, že existuje $\int_a^b f^2\,dx$. Skalární součin dvou takových funkcí se definuje formulí $(f, g) = \int_a^b fg\,dx$.

V takových prostorech pak hrají důležitou roli i otázky konvergence a spojitosti. V algebře se proto budeme držet konečněrozměrných vektorových prostorů. Tvrzení a věty však budeme formulovat a dokazovat v největší dostupné obecnosti.

Existuje ještě hermiteovský skalární součin ve vektorových prostorech nad polem komplexních čísel **C**. Hermiteovská geometrie má fyzikální aplikace zejména v kvantové mechanice.

Definice. Buď V vektorový prostor nad polem **C**. *Hermiteovský skalární součin* na V je zobrazení $g : V \times V \to \mathbf{C}$, splňující pro libovolnou trojici vektorů $u, v, w \in V$ a skalár $a \in \mathbf{C}$

1° $g(u + v, w) = g(u, w) + g(v, w)$ a $g(au, w) = ag(u, w)$ (linearita v prvním argumentu);

2′ $g(u, v) = g(v, u)^*$ (kosá symetrie; * označuje komplexní sdružení);

3° Jestliže $u \neq 0$, pak $g(u, u) > 0$ (pozitivní definitnost).

Cvičení. Buďte $a_1, \dots, a_n$ kladná reálná čísla. Pro vektory $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ položme $g(u, v) = a_1 u_1 v_1^* + \cdots + a_n u_n v_n^*$. Pak g je hermiteovský skalární součin na $\mathbf{C}^n$.

Hermiteovský skalární součin *není* lineární ve druhém argumentu:

Cvičení. Pro hermiteovský skalární součin platí v druhém argumentu aditivita $g(u, v+w) = g(u, v) + g(u, w)$, ale namísto homogenity máme rovnost $g(u, av) = a^* g(u, v)$.

Cvičení. Ukažte, že pro hermiteovský skalární součin je $g(u, u)$ vždy reálné číslo. Proto se v axiomu 3° smí vyskytnout nerovnost. (Pro $u \neq v$ nerovnost $g(u, v) \geq 0$ obecně nemá smysl!)

Vektorový prostor s eukleidovským skalárním součinem se nazývá *eukleidovský prostor*, s hermiteovským skalárním součinem se nazývá *hermiteovský* nebo *unitární prostor*. Oba dva typy prostorů budeme společně nazývat *prostor se skalárním součinem*.

Předpokládejme nadále, že je dán vektorový prostor V s pevně zvoleným skalárním součinem g. Zjednodušíme si označení a symbol g budeme vynechávat. Tedy $(u, v) = g(u, v)$.

Definice. Buď $v \in V$. Označme

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}$$

(odmocnina se bere s kladným znaménkem; připomeňme, že $(v, v) \geq 0$). Číslo $\|v\|$ se nazývá *délka* vektoru v. Vektor délky 1 se nazývá *jednotkový* nebo *normovaný*.

Délka vektoru je zřejmě reálné číslo i v případě hermiteovského skalárního součinu.

Cvičení. (1) $\|v\| = 0$ právě tehdy, když $v = 0$.

(2) Pro každý vektor $v \neq 0$ je vektor $v/\|v\|$ normovaný:

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1.$$

(3) Ukažte, že $\|av\| = |a|\|v\|$ pro každý vektor v a skalár a; $|a|$ přitom označuje absolutní hodnotu čísla a.

Vše platí i v případě hermiteovského skalárního součinu.

Nerovnosti

Následující Cauchy–Buňakovského–Schwarzova nerovnost je základem mnoha dalších výsledků. V literatuře se vyskytují různé důkazy; uvedeme jeden, který se snadno pamatuje.

Tvrzení (Cauchy–Buňakovského–Schwarzova nerovnost). *Pro libovolné dva vektory* $u, v \in V$ *platí*

$$|(u, v)| \le \|u\| \|v\|.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když jsou vektory u, v *závislé.*

Důkaz. Je-li $u = 0$ nebo $v = 0$, pak jsou u, v závislé a zřejmě platí i (ne)rovnost.

Nechť tedy $u \ne 0$ a $v \ne 0$. Stačí dokazovat případ $\|u\| = \|v\| = 1$; obecný se na něj převede záměnou u za $u/\|u\|$ a v za $v/\|v\|$ (cvičení). V eukleidovském případě pak máme

$$\begin{aligned} 0 &\le \tfrac{1}{2}\|u \pm v\|^2 = \tfrac{1}{2}(u \pm v, u \pm v) = \tfrac{1}{2}\big((u, u) \pm (u, v) \pm (v, u) + (v, v)\big) \\ &= 1 \pm (u, v). \end{aligned}$$

Odtud $\mp(u, v) \le 1$, a tedy $|(u, v)| \le 1$.

Jestliže platí rovnost $|(u, v)| = 1$, pak $(u, v) = \pm 1$, načež $0 = 1 \mp (u, v) = \frac{1}{2}\|u \mp v\|^2$, a tedy $u \mp v = 0$ a u, v jsou závislé.

V hermiteovském případě je důkaz složitější. Začneme výpočtem

$$\begin{aligned} 0 &\le \tfrac{1}{2}\|u - v\|^2 = \tfrac{1}{2}(u - v, u - v) = \tfrac{1}{2}\big((u, u) - (u, v) - (v, u) + (v, v)\big) \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}\big((u, v) + (u, v)^*\big) = 1 - \operatorname{re}(u, v). \end{aligned}$$

V této formuli smíme vektor u vydělit libovolným číslo $\phi \in \mathbf{C}$ takovým, že $|\phi| = 1$, ježto tím zůstane zachována podmínka $\|u\| = 1$; dostaneme

$$0 \le \frac{1}{2}\left\|\frac{u}{\phi} - v\right\|^2 = 1 - \operatorname{re}\left(\frac{u}{\phi}, v\right).$$

Případ $(u, v) = 0$ je triviální (nerovnost zřejmě platí), předpokládejme tedy, že $(u, v) \ne 0$. Nyní zvolíme $\phi = (u, v)/|(u, v)|$. Pak skutečně $|\phi| = 1$ (cvičení), načež

$$|(u, v)| = \operatorname{re}|(u, v)| = \operatorname{re}\frac{(u, v)}{\phi} = \operatorname{re}\left(\frac{u}{\phi}, v\right) \le 1.$$

Platí-li rovnost $|(u, v)| = 1$, pak (při stejném ϕ jako nahoře) máme $\operatorname{re}(u/\phi, v) = |(u, v)| = 1$, načež $0 = 1 - \operatorname{re}(u/\phi, v) = \frac{1}{2}\|u/\phi - v\|^2$, a tedy $u/\phi - v = 0$ a u, v jsou závislé.

Následující tvrzení lze interpretovat jako známou nerovnost mezi stranami trojúhelníka:

Tvrzení (Trojúhelníková nerovnost). *Nechť* $u, v \in V$. *Pak*

$$\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$$

a rovnost platí právě tehdy, jsou-li vektory u, v *závislé.*

Důkaz. Eukleidovský případ: $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u, v) + \|v\|^2 \le \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$. Zbytek: cvičení.

Odchylka vektorů

V eukleidovském případě lze Cauchy–Buňakovského–Schwarzovu nerovnost zapsat i ve tvaru

$$-1 \le \frac{(u, v)}{\|u\| \|v\|} \le 1.$$

Goniometrická funkce cos známá z matematické analýzy je spojitá a klesající na intervalu $[0, \pi]$ a nabývá na něm všech hodnot z intervalu $[-1, 1]$, každé právě jednou.

Definice. Pro každou dvojici nenulových vektorů u, v eukleidovského vektorového prostoru se jediné reálné číslo ϕ takové, že $0 \le \phi \le \pi$ a

$$\cos\phi = \frac{(u, v)}{\|u\| \|v\|}$$

nazývá *odchylka* vektorů u, v.

V hermiteovském vektorovém prostoru máme alespoň

$$0 \le \frac{|(u, v)|}{\|u\| \|v\|} \le 1.$$

Druhá mocnina tohoto čísla má pravděpodobnostní interpretaci v kvantové mechanice.

Ortogonalita

Výklad se opět týká eukleidovského i hermiteovského případu.

Definice. Říkáme, že vektory $u, v \in V$ jsou *kolmé* čili *ortogonální*, je-li $(u, v) = 0$. Zapisujeme $u \perp v$.

Cvičení. Dva vektory jsou kolmé tehdy a jen tehdy, je-li jejich odchylka $\pi/2$.

Definice. Soustava vektorů $u_1, \dots, u_n$ se nazývá *ortogonální*, je-li $u_i \perp u_j$ pro všechna $i \ne j$. Ortogonální soustava normovaných vektorů se nazývá *ortonormální*.

Cvičení. Ukažte, že pro ortogonální soustavu $u_1, \dots, u_n$ platí Pythagorova věta v podobě

$$\|u_1 + \cdots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \cdots + \|u_n\|^2.$$

Gramm–Schmidtova ortogonalizace

Tvrzení. *V každém konečněrozměrném vektorovém prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze.*

Důkaz je založen na proceduře zvané Gramm–Schmidtova ortogonalizace.

Důkaz. Buď $u_1, \dots, u_n$ libovolná báze ve V. Nalezneme vektory $e_1, \dots, e_n$ podle následujícího návodu:

1) Položíme $e_1 = u_1$.

2) Jsou-li již stanoveny (navzájem kolmé) vektory $e_1, \dots, e_k$, položíme

$$e_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(u_{k+1}, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i.$$

Pak $e_k \perp e_l$ pro všechna $l \neq k$. Dokažme to pro dvojice $l < k$ indukcí vzhledem ke k. Pro $k = 1$ není co dokazovat, protože žádné l neexistuje. Je-li tvrzení již dokázáno pro nějaké k, máme pro $l < k + 1$ (tj. $l \leq k$)

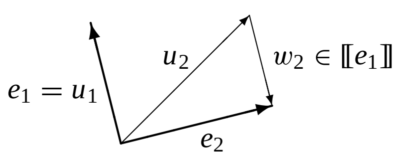
$$\begin{aligned}
(e_{k+1}, e_l) &= \left(u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(u_{k+1}, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i,\ e_l \right) \\
&= (u_{k+1}, e_l) - \sum_{i=1}^{k} \frac{(u_{k+1}, e_i)}{(e_i, e_i)} (e_i, e_l) \\
&= (u_{k+1}, e_l) - (u_{k+1}, e_l) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

protože $(e_i, e_l) = 0$ pro $i \neq l$ (indukční předpoklad).

Nakonec normalizujeme: položíme $\bar{e}_i = e_i / \|e_i\|$. Protože soustava vektorů $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ vzniká elementárními úpravami báze $u_1, \dots, u_n$, je rovněž bazí.

Cvičení. Ukažte, že při Gramm–Schmidtově ortogonalizaci platí $[\![\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n]\!] = [\![e_1, \dots, e_n]\!] = [\![u_1, \dots, u_n]\!]$.

Geometrická podstata Gramm–Schmidtovy ortogonalizace je následující: k vektoru u_{k+1} přičítáme vhodný vektor w_{k+1} z podprostoru $[\![e_1, \dots, e_k]\!]$ tak, aby vzniklý součet e_{k+1} byl kolmý ke všem vektorům $e_1, \dots, e_k$. Přičítaný vektor $w_{k+1} = -\sum_{i=1}^{k} (u_{k+1}, e_i) e_i / (e_i, e_i)$ je shodou okolností jediný možný (cvičení).



Gramm–Schmidtova ortogonalizace může probíhat i souběžně s normalizací, podle vzorců

$$e_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (u_{k+1}, \bar{e}_i) \bar{e}_i, \qquad \bar{e}_i = \frac{e_i}{\|e_i\|}.$$

Uvědomme si však, že vektory $\bar{e}_i$ mohou obsahovat iracionality (odmocniny) i v případech, kdy jsou vektory u_i celočíselné či racionální. V takových případech je při praktickém počítání výhodnější odložit normalizaci až nakonec, tj. postupovat podle procedury uvedené v důkazu.

Cvičení. Ukažte, že každá ortogonální soustava nenulových vektorů je lineárně nezávislá.

Návod: Rovnici $c_1e_1 + \dots + c_ne_n = 0$ skalárně násobte jednotlivými vektory $e_1, \dots, e_n$.

Cvičení. Ukažte, že pokud jsou vektory u_i závislé, pak při Gramm–Schmidtově ortogonalizaci některý z vektorů e_i vyjde nulový. (Návod: využijte výsledek předchozího cvičení.)

V ortonormálních bazích počítáme souřadnice vektoru u jako skalární součiny s vektory báze:

Cvičení. Souřadnice $(x_1, \dots, x_n)$ vektoru u v ortonormální bázi $e_1, \dots, e_n$ jsou $x_i = (u, e_i)$.

Cvičení. Jsou-li $(x_1, \dots, x_n)$ souřadnice vektoru u a $(y_1, \dots, y_n)$ souřadnice vektoru v v některé ortonormální bázi, pak

(1) v eukleidovském případě $(u, v) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$;

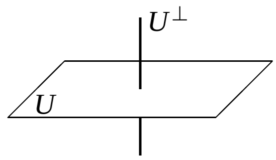
(2) v hermiteovském případě $(u, v) = x_1y_1^* + \dots + x_ny_n^*$.

Ortogonální doplněk

Definice. Je-li $U \subseteq V$ podprostor vektorového prostoru V se skalárním součinem, položíme

$$U^\perp = \{v \in V \mid v \perp u \text{ pro všechna } u \in U\}.$$

Podmnožina $U^\perp \subseteq V$ se nazývá *ortogonální doplněk* podprostoru U.



Tvrzení. *Ortogonální doplněk $U^\perp$ je podprostor ve V.*

Důkaz. Cvičení.

Tvrzení. *Je-li prostor V konečněrozměrný,* $\dim V = n$, *pak $V = U \dotplus U^\perp$ a platí*

$$\dim U^\perp = n - \dim U.$$

Důkaz. Nechť $\dim U = m$. Zvolme bázi $u_1, \dots, u_m$ v U a doplňme ji vektory $u_{m+1}, \dots, u_n$ do báze ve V. Ortonormalizací nechť vzniknou vektory $e_1, \dots, e_n$. Přitom $U = [\![u_1, \dots, u_m]\!] = [\![e_1, \dots, e_m]\!]$ (soustava $e_1, \dots, e_m$ vzniká elementárními úpravami soustavy $u_1, \dots, u_m$).

Ukažme, že $U^\perp = [\![e_{m+1}, \dots, e_n]\!]$. Inkluze $U^\perp \supseteq [\![e_{m+1}, \dots, e_n]\!]$ platí, protože každý vektor e_i, $i = m+1, \dots, n$, je kolmý ke všem vektorům e_i, $i = 1, \dots, m$, a potažmo i ke všem vektorům podprostoru $[\![e_1, \dots, e_m]\!] = U$ (cvičení).

Nyní dokážeme inkluzi $U^\perp \subseteq [\![e_{m+1}, \dots, e_n]\!]$. Nechť $v = y_1e_1 + \dots + y_ne_n \in U^\perp$. Pak $v \perp e_i$ pro $i = 1, \dots, m$, a tedy $0 = (v, e_i) = (y_1e_1 + \dots + y_ne_n, e_i) = y_i(e_i, e_i) = y_i$ pro $i = 1, \dots, m$. Tudíž, $v = y_{m+1}e_{m+1} + \dots + y_ne_n \in [\![e_{m+1}, \dots, e_n]\!]$.

Odtud $\dim U^\perp = n - m$ a též $V = [\![e_1, \dots, e_n]\!] = [\![e_1, \dots, e_m]\!] \dotplus [\![e_{m+1}, \dots, e_n]\!] = U \dotplus U^\perp$.

Tvrzení. *Buď V konečněrozměrný vektorový prostor se skalárním součinem, buďte U, U_1, U_2 jeho podprostory.*

(i) *Jestliže $U_1 \subseteq U_2$, pak $U_1^\perp \supseteq U_2^\perp$.*
(ii) $U^{\perp\perp} = U$.
(iii) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.
(iv) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

Důkaz. (i) Cvičení.

(ii) Každý vektor z U je kolmý ke každému vektoru z $U^\perp$, a proto $U \subseteq (U^\perp)^\perp$. Přitom dimenze jsou stejné: $\dim(U^\perp)^\perp = \dim V - \dim U^\perp = \dim V - (\dim V - \dim U) = \dim U$. Tudíž, $(U^\perp)^\perp = U$.

(iii) a (iv): Pro $i = 1, 2$ máme $U_i \subseteq U_1 + U_2$, a proto podle (i) je $U_i^\perp \supseteq (U_1 + U_2)^\perp$. Pak ale

$$U_1^\perp \cap U_2^\perp \supseteq (U_1 + U_2)^\perp. \tag{1}$$

Analogicky

$$U_1^\perp + U_2^\perp \subseteq (U_1 \cap U_2)^\perp \tag{2}$$

(cvičení). Ale pro dvojici $U_1^\perp, U_2^\perp$ platí (1) též: $U_1 \cap U_2 = U_1^{\perp\perp} \cap U_2^{\perp\perp} \supseteq (U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp$, načež podle (i) je $(U_1 \cap U_2)^\perp \subseteq (U_1^\perp + U_2^\perp)^{\perp\perp} = U_1^\perp + U_2^\perp$. Odtud a z (2) pak dostáváme rovnost (iii). Analogicky (iv).

Cvičení. Buď V konečněrozměrný vektorový prostor, U_1, U_2 jeho podprostory takové, že $V = U_1 \dot{+} U_2$ a že $u_1 \perp u_2$ pro libovolné dva vektory $u_1 \in U_1$ a $u_2 \in U_2$. Pak $U_2 = U_1^\perp$ a $U_1 = U_2^\perp$.

Ortogonální projekce

Buď U podprostor v konečněrozměrném vektorovém prostoru V se skalárním součinem; uvažujme o přímém součtu $V = U \dot{+} U^\perp$. Pro každý prvek $v \in V$ máme jednoznačný rozklad $v = v_U + v_{U^\perp}$, kde $v_U \in U$ a $v_{U^\perp} \in U^\perp$. Vektor v_U se nazývá ortogonální projekce vektoru v do prostoru U. Vzniká zobrazení $\mathrm{pr}_U : V \to U, v \mapsto v_U$, které nazveme *ortogonální projekce* do podprostoru U. Analogicky vzniká zobrazení $\mathrm{pr}_{U^\perp} : V \to U, v \mapsto v_{U^\perp}$.

Cvičení. Ortogonální projekce pr_U je lineární zobrazení. Dokažte.

Tvrzení. *Buď $e_1, \dots, e_m$ ortonormální báze v podprostoru U konečněrozměrného vektorového prostoru V se skalárním součinem. Pak pro každé $v \in V$ máme*

$$\mathrm{pr}_U\, v = (v, e_1)e_1 + \cdots + (v, e_m)e_m.$$

Důkaz. Cvičení. Návod: Označme $e_{m+1}, \dots, e_n$ doplňující vektory do ortonormální báze ve V, pak $v = (v, e_1)e_1 + \cdots + (v, e_m)e_m + (v, e_{m+1})e_{m+1} + \cdots + (v, e_n)e_n$.

Cvičení. V případě, že báze $e_1, \dots, e_m$ je pouze ortogonální, formule pro ortogonální projekci zní

$$\mathrm{pr}_U\, v = \frac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)}e_1 + \cdots + \frac{(v, e_m)}{(e_m, e_m)}e_m.$$

Dokažte ji.

Shodnosti a unitární transformace

Shodnost je lineární transformace, která zachovává skalární součin.

Definice. Buď V vektorový prostor se skalárním součinem, buď $f : V \to V$ lineární transformace. Řekneme, že f je *shodnost*, jestliže platí

$$(f(u), f(v)) = (u, v).$$

V hermiteovském případě se shodnost nazývá *unitární transformace*, v eukleidovském případě se běžně užívá název *ortogonální transformace*.

Každá shodnost zřejmě zachovává i délky vektorů: platí rovnost $\|f(u)\| = \|u\|$, protože platí rovnost $\|f(u)\|^2 = (f(u), f(u)) = (u, u) = \|u\|^2$ a délky jsou nezáporná čísla.

Platí však i opačné tvrzení: zobrazení zachovávající délky zachovává i skalární součin.

Tvrzení. *Lineární transformace $f : V \to V$ je shodnost právě tehdy, když zachovává délky vektorů.*

Důkaz. Nechť f zachovává délky vektorů. Ukažme, že f je shodnost. V eukleidovském případě máme $\|u + v\|^2 = (u + v, u + v) = \|u\|^2 + 2(u, v) + \|v\|^2$, načež

$$(u, v) = \tfrac{1}{2}\big(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\big)$$

pro libovolné dva vektory $u, v \in V$. Odtud

$$\begin{aligned}(f(u), f(v)) &= \tfrac{1}{2}\big(\|f(u) + f(v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2\big)\\ &= \tfrac{1}{2}\big(\|f(u + v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2\big)\\ &= \tfrac{1}{2}\big(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\big)\\ &= (u, v)\end{aligned}$$

Podobně postupujeme v hermiteovském případě, pouze vztah mezi skalárním součinem a délkou je složitější. Máme $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + (u, v) + (u, v)^* + \|v\|^2 = \|u\|^2 + 2\,\mathrm{re}(u, v) + \|v\|^2$, což stačí pouze k určení reálné části $\mathrm{re}(u, v)$. Nicméně, potom $\|u + \mathrm{i}v\|^2 = \|u\|^2 + 2\,\mathrm{re}(u, \mathrm{i}v) + \|\mathrm{i}v\|^2 = \|u\|^2 + 2\,\mathrm{re}\,\mathrm{i}^*(u, v) + \|v\|^2 = \|u\|^2 + 2\,\mathrm{im}(u, v) + \|v\|^2$, což stačí k určení imaginární části $\mathrm{im}(u, v)$. (Dokončete důkaz jako cvičení.)

Příklad. Rotace kolem počátku je shodnost v eukleidovském prostoru E^2. Podobně rotace kolem libovolné osy v eukleidovském prostoru E^3. Obě totiž zachovávají délky vektorů.

Tvrzení. *Každá shodnost v konečněrozměrném vektorovém prostoru je izomorfismus.*

Důkaz. Buď $f : V \to V$ shodnost. Buď $u \in \mathrm{Ker}\, f$ libovolný vektor, tj. nechť $f(u) = 0$. Potom $\|u\| = \|f(u)\| = \|0\| = 0$, a tedy $u = 0$. Odtud $\mathrm{Ker}\, f = 0$ a f je injektivní.

Dále $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim V$, a proto $\mathrm{Im}\, f = V$ a f je surjektivní.

Cvičení. Ukažte, že shodnosti konečněrozměrného vektorového prostoru se skalárním součinem tvoří grupu vzhledem k binární operaci skládání transformací.

Je-li $e_1, \dots, e_n \in V$ ortonormální báze, existuje jednoduchý způsob, jak rozeznat shodnost.

Tvrzení. *Buď $e_1, \dots, e_n$ ortonormální báze prostoru V, buď $f : V \to V$ lineární transformace. Pak f je shodnost právě tehdy, když $f(e_1), \dots, f(e_n)$ je též ortonormální báze*

Důkaz. Implikace „⇒“ je snadná (cvičení). „⇐“: Buďte $u, v \in V$ libovolné vektory o souřadnicích $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ v bázi $e_1, \dots, e_n$. Pak $(u, v) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$, protože báze $e_1, \dots, e_n$ je ortonormální. Počítejme $(f(u), f(v))$. Máme $u = x_1 e_1 + \cdots x_n e_n$, načež $f(u) = x_1 f(e_1) + \cdots x_n f(e_n)$. Vidíme, že vektor $f(u)$ má v bázi $f(e_1), \dots, f(e_n)$ tytéž souřadnice $(x_1, \dots, x_n)$, a podobně vektor $f(v)$. Báze $f(e_1), \dots, f(e_n)$ je však podle předpokladu také ortonormální, a proto $(f(u), f(v)) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$, což je (u, v), jak se mělo ukázat.

V následujícím tvrzení budeme charakterizovat matice, které mohou být maticí shodného zobrazení v nějaké ortonormální bázi.

Definice. Čtvercová reálná matice A, splňující podmínku $A^\top A = E$, se nazývá *ortogonální*.

Tvrzení. *Buď $f : V \to V$ lineární transformace eukleidovského vektorového prostoru V, buď A její matice v ortonormální bázi $e_1, \dots, e_n$. Pak f je shodnost právě tehdy, když je matice A ortogonální.*

Důkaz. Sloupce A_{kj}, $j = 1, \dots, n$ matice A jsou tvořeny souřadnicemi vektorů $f(e_1), \dots, f(e_n)$ v bázi $e_1, \dots, e_n$:

$$f(e_j) = \sum_{k=1}^{n} A_{kj} e_k.$$

Protože $e_1, \dots, e_n$ je ortonormální báze, máme $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta. Podle předchozího tvrzení je f shodnost právě tehdy, když je $f(e_1), \dots, f(e_n)$ ortonormální báze, tj. když platí podmínka

$$\begin{aligned}\delta_{ij} = \bigl(f(e_i), f(e_j)\bigr) &= \Bigl(\sum_{k=1}^{n} A_{ki} e_k, \sum_{l=1}^{n} A_{lj} e_l\Bigr) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} A_{ki} A_{lj} (e_k, e_l) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} A_{ki} A_{lj} \delta_{kl} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A^{\top i}{}_{k} A_{kj} = (A^\top A)_{ij},\end{aligned}$$

to jest, když $A^\top A$ je jednotková matice.

Cvičení. (1) Dokažte, že determinant ortogonální matice je ± 1. Důsledek: každá ortogonální matice je invertibilní.

(2) Dokažte, že ortogonální matice tvoří grupu vzhledem k násobení matic.
Návod: (1) $\det(A^\top A) = \det A^\top \cdot \det A = (\det A)^2$.

Grupa všech ortogonálních matic typu n/n se značí $O(n)$, její podgrupa $O(n) \cap SL(n, \mathbf{R})$ se značí $SO(n)$.

Cvičení. (1) Ukažte, že podmínka charakterizující matice unitárních transformací hermiteovského vektorového prostoru zní

$$A^{*\top} A = E,$$

kde $*$ označuje komplexní sdružení. Komplexní čtvercová matice A, která tuto podmínku splňuje, se nazývá *unitární*.

(2) Ukažte, že determinant unitární matice A splňuje $|\det A| = 1$.

(3) Ukažte, že unitární matice tvoří grupu.

Grupa všech unitárních matic typu n/n se značí $U(n)$, její podgrupa $U(n) \cap SL(n, \mathbf{C})$ se značí $SU(n)$.

Cvičení. Každá shodnost zachovává i odchylky vektorů, ale opačné tvrzení neplatí. Nalezněte příklad zobrazení, které zachovává odchylky, ale přesto není shodnost.