Matematický ústav Slezské univerzity v Opavě
Učební texty k přednášce ALGEBRA II, letní semestr 2000/2001
Michal Marvan

12. Frobeniova věta

K formulaci Frobeniovy věty budeme potřebovat pojem hodnost matice, který je všeobecně důležitý. Hodnost matice je definována jako dimenze podporostoru generovaného jejími řádky:

Definice. Buď X matice typu m/n nad polem P. Označme $u_1 = (X_{11}, \dots, X_{1n}) \in P^n$, $\dots$, $u_m = (X_{m1}, \dots, X_{mn}) \in P^n$ její řádky. Uvažujme o podprostoru $[\![u_1, \dots, u_m]\!] \subseteq P^n$ generovaném řádky matice X. Označme $\operatorname{rk} X = \dim [\![u_1, \dots, u_m]\!]$ jeho dimenzi. Číslo $\operatorname{rk} X$ se nazývá *řádková hodnost* matice X.

Tvrzení. *Elementární řádkové úpravy nemění řádkovou hodnost matice.*

Důkaz. Elementární řádkové úpravy nemění prostor $[\![u_1, \dots, u_m]\!]$.

Důsledek. *Řádkově ekvivalentní matice mají stejnou řádkovou hodnost.*

Hodnost matice lze velmi snadno zjistit převedením na schodovitý tvar.

Tvrzení. *Buď X matice typu m/n s řádky $u_1, \dots, u_m$, buď X' řádkově ekvivalentní matice ve schodovitém tvaru. Nechť má X' právě h nenulových řádků $u'_1, \dots, u'_h$. Pak platí* $\operatorname{rk} X = h$ *a řádky $u'_1, \dots, u'_h$ tvoří bázi podprostoru* $[\![u_1, \dots, u_m]\!]$.

Důkaz. Hodnost $\operatorname{rk} X = \operatorname{rk} X'$ nemůže být větší než h, protože podprostor $[\![u_1, \dots, u_m]\!] = [\![u'_1, \dots, u'_h]\!]$ má jen h generátorů. Ukažme, že tyto generátory jsou nezávislé. Proveďme řádkové úpravy převádějící X' za schodovitého tvaru na Gauss–Jordanův tvar X'' s řádky $u''_1, \dots, u''_h, 0, \dots, 0$. Tyto úpravy neovlivní nezávislost a počet nenulových řádků. V matici X'' máme h hlavních prvků $X''_{1,j_1} = \dots = X''_{h,j_h} = 1$, ostatní prvky ve sloupcích s indexy $j_1, \dots, j_h$ jsou nulové. Uvažujme o nulové lineární kombinaci nenulových řádků

$$0 = c_1 u''_1 + c_2 u''_2 + \dots + c_h u''_h = (\dots \quad c_1 \quad \dots \quad c_2 \quad \dots\dots \quad c_h \quad \dots)$$

s koeficienty $c_1, \dots, c_h$. V j_i-té pozici takto získaného stojí přímo koeficient c_i. Odtud $c_1 = c_2 = \dots = c_h = 0$, což dokazuje lineární nezávislost vektorů $u''_1, \dots, u''_h$, a potažmo i vektorů $u'_1, \dots, u'_h$ s nimi ekvivalentních.

Obdobně se definuje *sloupcová hodnost* matice X jako dimenze podprostoru generovaného sloupci matice X. Sloupcovou hodnost matice X můžeme rovnocenně zavést jako řádkovou hodnost $\operatorname{rk} X^\top$ matice transponované (připomeňme, že transponování matice je úkon, při němž se řádky převádějí na sloupce a naopak).

Ve skutečnosti jsou si obě hodnosti rovny. K důkazu budeme potřebovat některá pomocná tvrzení. Především si připomeňme, že elementární řádková úprava je rovnocenná s vynásobením dané matice zleva něketrou elementární maticí R, tj. matice X přejde v RX. Sloupcová úprava je zase rovnocenná řádkové úpravě transponované matice, přičemž matice X přejde v $(RX^\top)^\top = X^{\top\top} R^\top = XS$, kde $S := R^\top$ je rovněž elementární matice. Elementární sloupcová úprava je proto rovnocenná s vynásobením elementární maticí *zprava*.

Lemma. *Elementární sloupcové úpravy nemění řádkovou hodnost matice.*

Důkaz. Buď X matice o hodnosti $\operatorname{rk} X$, buď $X' = R_k \cdots R_1 X$ schodovitý tvar matice X, získaný řadou elementárních řádkových úprav s elementárními maticemi $R_1, \ldots, R_k$.

Buď Y matice vzniklá z matice X elementární sloupcovou úpravou s maticí S, tj. $Y = XS$. Označme $Y' := X'S = R_k \cdots R_1 XS = R_k \cdots R_1 Y$. Odtud $\operatorname{rk} Y = \operatorname{rk} Y'$, protože řádkové úpravy nemění řádkovou hodnost.

Přitom matice X' má právě $\operatorname{rk} X' = \operatorname{rk} X$ nenulových řádků, načež matice Y' má nejvýše $\operatorname{rk} X$ nenulových řádků — sloupcové úpravy totiž nemění nulové řádky. Odtud nerovnost $\operatorname{rk} Y' \le \operatorname{rk} X$, a tedy $\operatorname{rk} Y \le \operatorname{rk} X$.

Dokažme rovnost $\operatorname{rk} X = \operatorname{rk} Y$. Aplikujme na matici Y elementární sloupcovou úpravu s maticí S^{-1}, čímž vzniká matice $Z = YS^{-1} = XSS^{-1} = X$, tj. původní matice X. Přitom ale $\operatorname{rk} X = \operatorname{rk} Z \le \operatorname{rk} Y \le \operatorname{rk} X$, čili $\operatorname{rk} Y = \operatorname{rk} X$.

Z důkazu vyplývá následující princip: Máme-li s danou maticí X provést řadu elementárních řádkových úprav odpovídajících elementárním maticím $R_1, \ldots, R_k$ a řadu elementárních sloupcových úprav odpovídajících elementárním maticím $S_1, \ldots, S_l$, pak je jedno, jestli nejdříve provedeme řadu řádkových úprav a potom řadu sloupcových úprav nebo naopak. (Nemůžeme však mezi sebou libovolně vyměnit dvě řádkové úpravy nebo dvě sloupcové úpravy!)

Tvrzení. *Pro libovolnou matici X platí*

$$\operatorname{rk} X = \operatorname{rk} X^\top.$$

tj. řádková a sloupcová hodnost jsou si rovny.

Důkaz. Převeďme matici X na Gauss–Jordanův tvar X'. Matice X a X' mají stejnou řádkovou i sloupcovou hodnost. Proveďme nyní elementární sloupcové úpravy, které převedou matici X' na Gauss–Jordanův tvar X'' vzhledem ke sloupcovým úpravám, což je tvar

$$X'' = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

přičemž opět mají matice X a X'' stejnou řádkovou i sloupcovou hodnost. Tvrzení nyní plyne z toho, že řádková a sloupcová hodnost matice X'' jsou si rovny.

Frobeniova věta

Shrňme nejdříve poznatky o soustavách lineárních rovnic, které jsme uvedli v předchozích přednáškách.

Definice. Buď dána soustava m lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2,\\
&\dots\\
&a_{r1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned} \tag{$*$}$$

o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$. Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

se nazývá *matice soustavy*, matice

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

se nazývá *rozšířená matice soustavy*.

Již dříve jsme se seznámili s tzv. eliminační metodou, kterou lze velmi efektivně řešit libovolné soustavy s číselnými koeficienty (resp. s koeficienty z nějakého pole P). Připomeňme, že postup spočívá v převedení rozšířené matice $\bar{A}$ na Gauss–Jordanův tvar řádkovými úpravami (čímž se nemění množina řešení soustavy; podrobnosti v přednášce 2).

Ohledně řešitelnosti a počtu řešení pak platí:

Věta Frobeniova. *Soustava* $(*)$ *má alespoň jedno řešení právě tehdy, když platí*

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \bar{A}.$$

Důkaz. Nějaká n-tice skalárů $\xi_1, \dots, \xi_n$ je řešením soustavy $(*)$ právě tehdy, když platí rovnost

$$A_1\xi_1 + \cdots + A_n\xi_n = b,$$

kde A_i označuje i-tý sloupec matice A a b označuje poslední sloupec matice $\bar{A}$ (sloupec pravých stran). Taková n-tice $\xi_1, \dots, \xi_n$ existuje právě tehdy, když je sloupec b závislý na sloupcích $A_1, \dots, A_n$, tj. $b \in [\![A_1, \dots, A_n]\!]$, což nastává právě tehdy, když

$$[\![A_1, \dots, A_n, b]\!] = [\![A_1, \dots, A_n]\!].$$

Potom ale $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^\top = \dim[\![A_1, \dots, A_n, b]\!] = \dim[\![A_1, \dots, A_n]\!] = \operatorname{rk} \bar{A}^\top = \operatorname{rk} \bar{A}$.

Naopak, jestliže jsou si sloupcové hodnosti matic A a $\bar{A}$ rovny, pak $\dim[\![A_1, \dots, A_n]\!] = \dim[\![A_1, \dots, A_n, b]\!]$. Protože je $[\![A_1, \dots, A_n]\!] \subseteq [\![A_1, \dots, A_n, b]\!]$ podprostor, plyne z rovnosti dimenzí potřebná rovnost $[\![A_1, \dots, A_n]\!] = [\![A_1, \dots, A_n, b]\!]$.

Je-li $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \bar{A}$, pak má soustava $Ax = b$ obecné řešení, které závisí na p nezávislých parametrech, kde $p = n - \operatorname{rk} A$. Dokážeme i toto tvrzení, ale v mnohem přesnější podobě.

Lehce se ověří, že soustava $(*)$ je rovnocenná maticové rovnici

$$Ax = b,$$

kde

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Homogenní soustavy lineárních rovnic

Soustava s nulovou pravou stranou, $b = 0$, se nazývá *homogenní*. Množina S všech řešení homogenní soustavy je vektorový podprostor v prostoru P^n. Skutečně, 0 je vždy řešením; jsou-li $x, y \in S$ dvě řešení takové soustavy, pak $x+y$ je opět řešení, protože $A(x+y) = Ax+Ay = 0$; nakonec, je-li x řešení, pak cx je řešení pro libovolný skalár $c \in P$, protože $Acx = cAx = 0$.

Báze prostoru S se nazývá *fundamentální řešení*.

Tvrzení. *Vektorový prostor S všech řešení homogenní soustavy $Ax = 0$ má dimenzi $n - \operatorname{rk} A$, kde n je počet neznámých.*

Důkaz. Jelikož řádkové úpravy nemění množinu S všech řešení soustavy, můžeme předpokládat, že matice A je v Gauss–Jordanově tvaru. Nechť jsou $j_1, \dots, j_h$ indexy hlavních sloupců. Vektor neznámých $x = (x_1, \dots, x_n)$ rozložíme na část hlavní $x' = (x_{j_1}, \dots, x_{j_h}) \in P^h$, odpovídající hlavním sloupcům, a zbytek $x'' = (x_{j'_1}, \dots, x_{j'_{n-h}}) \in P^{n-h}$. Symbolicky budeme zapisovat $x = (x', x'')$. Proměnné $x_{j_1}, \dots, x_{j_h}$ se nazývají *hlavní*, zatímco ostatní proměnné $x_{j'_1}, \dots, x_{j'_{n-h}}$ se nazývají *parametrické*.

Podobně matici A rozložíme na hlavní sloupce A' a zbytek A'' tak, aby naše soustava byla ekvivalentní rovnici

$$A'x' + A''x'' = 0.$$

Vynecháme-li přitom nulové řádky (je jich $m - h$), bude $A' = E$ a soustava $Ax = 0$ přejde v $Ex' + A''x'' = 0$, tj.

$$x' = -A''x''.$$

K libovolnému vektoru parametrů $x'' = z \in P^{n-h}$ potom máme právě jedno řešení $x = (-A''z, z)$, sestávající z parametrů z a z vypočtených hlavních neznámých $x' = -A''z$. Zobrazení $z \mapsto (-A''z, z)$ je bijekce $P^{n-h} \to S$ a je lineární (ověřte), tedy izomorfismus. Tudíž, vektorový prostor S je izomorfní s prostorem P^{n-h}, a proto má dimenzi $\dim S = \dim P^{n-h} = n - h$.

Fundamentální řešení najdeme tak, že za z volíme po řadě bázové vektory

$$z_{(1)} = (1, 0, \dots, 0)^\top, \dots, z_{(n-h)} = (0, \dots, 0, 1)^\top \in P^{n-h}$$

a vypočteme $n - h$ vektorů $x_{(1)} = (-A''z_{(1)}, z_{(1)}), \dots, x_{(n-h)} = (-A''z_{(n-h)}, z_{(n-h)})$.

Příklad. Soustava s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je v Gauss–Jordanově tvaru a má hlavní sloupcové indexy 2, 4, 5. Hlavní proměnné proto jsou x_2, x_3, x_5, parametrické proměnné jsou x_1, x_4. Soustava je ekvivalentní rovnici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0,$$

(poslední, nulový řádek, jsme již vynechali), to jest,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_4 \\ -2x_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Množina všech řešení je $\{(x_1, -x_4, -2x_4, x_4, 0) \mid (x_1, x_4) \in P^2\}$, čili

$$\{x_1 \cdot (1, 0, 0, 0, 0) + x_4 \cdot (0, -1, -2, 1, 0) \mid (x_1, x_4) \in P^2\}.$$

Vektory $(1, 0, 0, 0, 0)$ resp. $(0, -1, -2, 1, 0)$ tvoří bázi v 2-rozměrném prostoru všech řešení, tj. fundamentální řešení; získáme je volbou $(x_1, x_4) = (1, 0)$ resp. $(x_1, x_4) = (0, 1)$.

Nehomogenní soustavy lineárních rovnic

Tvrzení. *Buď ξ_* libovolné pevně zvolené řešení nehomogenní soustavy $Ax = b$. Pak je množina všech řešení nehomogenní soustavy $Ax = b$ rovna množině*

$$\{\, \xi + \xi_* \;\mid\; \xi \text{ je řešení homogenní soustavy } Ax = 0 \,\}.$$

Důkaz. Je-li $x = \xi$ libovolné řešení homogenní soustavy $Ax = 0$, pak je $\xi + \xi_*$ řešení nehomogenní soustavy $Ax = b$. Podle předpokladů totiž $A\xi = 0$ a $A\xi_* = b$, načež $A(\xi + \xi_*) = 0 + b = b$.

Ukažme ještě, že každé řešení $x = \eta$ nehomogenní soustavy $Ax = b$ je tvaru $\eta = \xi + \xi_*$ pro vhodné ξ. Položme $\xi = \eta - \xi_*$, načež $A\xi = A(\eta - \xi_*) = b - b = 0$, a tudíž ξ je řešení homogenní soustavy, což se mělo ukázat.

Shora uvedené libovolné řešení ξ_* nehomogenní soustavy se nazývá *partikulární řešení*. Vidíme, že *obecné řešení* soustavy je součtem partikulárního řešení soustavy a některého řešení příslušné homogenní soustavy. Obecné řešení nehomogenní soustavy obecně netvoří vektorový prostor (jde o tzv. afinní prostor, studovaný v geometrii).

Připomeňme, že partikulární řešení vůbec nemusí existovat a obecné řešení může být prázdná množina (srovnejte s Frobeniovou větou).

Důsledek. *Buď ξ_* libovolné partikulární řešení nehomogenní soustavy $Ax = b$. Buď $\eta_1, \dots, \eta_r$ fundamentální řešení homogenní soustavy $Ax = 0$. Pak je množina všech řešení nehomogenní soustavy $Ax = b$ rovna množině*

$$\{ \xi_* + p_1\eta_1 + \cdots + p_r\eta_r \mid p_1, \dots, p_r \in P \}.$$

Příklad. Homogenní soustava

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

má při volbě hlavních neznámých x_1, x_2 řešení

$$x_1 = -2x_3, \qquad x_2 = -x_3 - x_4.$$

Fundamentální řešení je dvojice $(-2, -1, 1, 0)$ a $(0, -1, 0, -1)$.

Nehomogenní soustava

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

má partikulární řešení například $\xi_* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Její obecné řešení je potom

$$(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) + p_1(-2, -1, 1, 0) + p_2(0, -1, 0, -1).$$

Jiná partikulární řešení získáme volbou parametrů p_1, p_2, například $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3})$ při volbě $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = 0$.

Řešíme-li nepříliš rozsáhlou soustavu lineárních rovnic s numerickými koeficienty, není třeba uvažovat o jiné metodě, než je Gaussova eliminace. Při řešení na počítači určité problémy vznikají jen v souvislosti s konečným počtem platných cifer. Pro dosažení maximální přesnosti nesmí být hlavní prvky blízké k nule. Obvykle stačí vybrat jako hlavní ten prvek, který má ze všech přípustných maximální absolutní hodnotu. Pro rozsáhlé soustavy existují numerické metody iterační, které dovolují poměrně rychle získat přibližné řešení po konečném počtu kroků. Zvláštní metody existují i pro řídké soustavy, což jsou soustavy s malým počtem nenulových koeficientů.

Jakmile se však stane, že koeficienty soustavy závisí na nějakém parametru, pak se Gaussova eliminace komplikuje. Častým krokem je totiž dělení řádku výrazem s parametry, což je elementárni úprava jen tehdy, když jde o výraz nenulový. Podle tohoto kriteria se úloha větví na řadu dílčích případů. Taková podmínka však nemusí mít nic společneho s řešitelností samotné soustavy (ta závisí jen na hodnosti matice) a množství dílčích případů bývá v praxi zbytečně velké.

Tomu lze zabránit volbou jiného postupu, který si vyložíme v případě, že matice A soustavy je čtvercová.

Tvrzení. *Nehomogenní soustava $Ax = b$ s invertibilní čtvercovou maticí A má pro každou pravou stranu b jediné řešení*

$$x = A^{-1}b.$$

Důkaz. Je-li A invertibilní, pak $x = A^{-1}b$ je řešení (ověřte). Je-li ξ řešení, pak $A\xi = b$, a tedy $\xi = A^{-1}A\xi = A^{-1}b$.

Cvičení. Nehomogenní soustava $Ax = b$ se čtvercovou maticí A je řešitelná pro každou pravou stranu b jen tehdy, když je matice A invertibilní. Dokažte.

Návod: Je-li soustava $Ax = b$ řešitelná pro každou pravou stranu, pak je řešitelná pro pravé strany $b_1 = (1, 0, \dots, 0)$ až $b_n = (0, \dots, 0, 1)$. Příslušná řešení $\xi_1, \dots, \xi_n$ nechť tvoří sloupce matice X. Pak je $AX = E$ a X je inverzní k A.

Pro řešení $x = A^{-1}b$ lze najít elegantní vyjádření:

Cramerovo pravidlo. *Buď $Ax = b$ nehomogenní soustava s invertibilní čtvercovou maticí A a řešením $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Pak*

$$\xi_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

kde A_i je matice vzniklá z matice A záměnou i-tého sloupce sloupcem pravých stran b:

$$\det A_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Důkaz. Při rozvoji podle i-tého sloupce dostáváme $\det A_i = \sum_j \hat{A}_{ji} b_j$. Dále

$$\xi = A^{-1}b = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}\, b = \frac{\hat{A}^\top}{\det A}\, b = \frac{\hat{A}^\top b}{\det A},$$

a tedy

$$\xi_i = \frac{\sum_i \hat{A}^\top_{ij} b_j}{\det A} = \frac{\sum_i \hat{A}_{ji} b_j}{\det A} = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

Použitím Cramerova pravidla lze dosáhnout toho, že jediným dělením bude dělení determinantem soustavy, čímž se vyloučí nadbytečná větvení, která by se jinak vyskytla u Gaussovy eliminace. Připomeňme, že výpočet determinantů se v principu obejde bez dělení.

Cvičení. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4, \\ \alpha x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3, \\ -x_1 + \alpha x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Návod: Determinant matice soustavy jest $\alpha(3\alpha - 4)$. Pro hodnoty $\alpha \neq 0$ a $\alpha \neq \frac{4}{3}$ je matice soustavy nesingulární a soustava má jediné řešení, které lze vypočíst pomocí Cramerova pravidla. Pro hodnoty $\alpha = 0$ a $\alpha = \frac{4}{3}$ se použije Gaussova eliminace (pro $\alpha = 0$ vyjde nekonečně mnoho řešení, pro $\alpha = \frac{4}{3}$ nevyjde žádné řešení).