2. Derivace prvního řádu

V této základní kapitole pojednáváme o diferencovatelnosti zobrazení $f : U \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ (podmnožina U je vždy otevřená). Zavádíme několik základních pojmů derivace: Fréchetovu, Gâteauxovu, derivace podle vektoru a parciální derivace. Ukazujeme souvislost těchto pojmů s pojmem derivace z prvního ročníku. Ukazujeme pravidla pro derivování základních zobrazení. Vysvítá, že pouze Fréchetova derivace splňuje základní větu o derivaci složeného zobrazení: derivace kompozice dvou zobrazení je rovna kompozici jejich derivací. Slabší derivace podle vektoru a zejména parciální derivace se zase poměrně snadno počítají. Ukazujeme, že v případě *spojitě diferencovatelných zobrazení* lze výhody všech pojmů derivace spojit: spojitou diferencovatelnost zobrazení na otevřené množině lze snadno odhalit pomocí parciálních derivací a přitom se jedná o pojem se stejně hezkými (či dokonce, jak zjistíme později, hezčími) vlastnostmi, jaké má Fréchetova derivace.

Většina výsledků této kapitoly je nezávislá na volbě normy na prostorech $\boldsymbol{R}^n$ a $\boldsymbol{R}^m$. Na řídké výjimky vždy upozorňujeme.

2.1. Fréchetova derivace. Zobrazení $f : U \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ se jmenuje *diferencovatelné v bodě* $x \in U$, existuje-li lineární zobrazení $l : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ takové, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - l(h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{2.1.1}$$

V podmínce (2.1.1) vystupují dvě normy, které jsou označeny stejným symbolem: jedna na $\boldsymbol{R}^n$ a druhá na $\boldsymbol{R}^m$.

Buď $|.|$ jiná norma (na $\boldsymbol{R}^n$ i $\boldsymbol{R}^m$), pro kterou platí $m \cdot \|.\| \le |.| \le M \cdot \|.\|$ — viz věty 1.7 a 1.2 (čísla m a M lze vybrat tak, aby nerovnost platila v $\boldsymbol{R}^n$ i $\boldsymbol{R}^m$). Máme

$$\frac{m}{M} \cdot \frac{\|f(x+h) - f(x) - l(h)\|}{\|h\|} \le \frac{|f(x+h) - f(x) - l(h)|}{|h|} \le \frac{M}{m} \frac{\|f(x+h) - f(x) - l(h)\|}{\|h\|}, \tag{2.1.2}$$

což znamená, že podmínka (2.1.1) je ekvivalentní podmínce

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - l(h)|}{|h|} = 0. \tag{2.1.3}$$

Tento poznatek je užitečný při konkrétních výpočtech: je při nich možno používat libovolnou normu.

Podmínka (2.1.1) je ekvivalentní podmínce

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - l(h)}{\|h\|} = 0. \tag{2.1.4}$$

Věta 2.1. *Lineární zobrazení l, splňující (2.1.1), existuje nejvýše jedno.*

D ů k a z . Připusťme, že jsou taková zobrazení dvě, l a $\bar{l}$, a že existuje vektor $h \in \boldsymbol{R}^n$ takový, že $l(h) \ne \bar{l}(h)$. Platí $h \ne 0$ a

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{f(x+sh) - f(x) - l(sh)}{\|sh\|} = 0,$$
$$\lim_{s\to 0^+} \frac{f(x+sh) - f(x) - \bar{l}(sh)}{\|sh\|} = 0.$$

Máme

$$0 \neq \frac{l(h) - \bar{l}(h)}{\|h\|} = \lim_{s \to 0^+} \frac{l(sh) - \bar{l}(sh)}{\|sh\|} =$$
$$= -\lim_{s \to 0^+} \frac{f(x+sh) - f(x) - l(sh)}{\|sh\|} + \lim_{s \to 0^+} \frac{f(x+sh) - f(x) - \bar{l}(sh)}{\|sh\|} = 0.$$

Tento spor dokazuje větu.

Lineární zobrazení l z předchozí definice se označuje $D(x)$ a nazývá (*Fréchetovou*) *derivací zobrazení f v bodě x*.

Následující tvrzení uvádějí základní vlastnosti Fréchetovy derivace.

Věta 2.2 (o diferenciálu). *Zobrazení* $f : U \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ *je diferencovatelné v bodě x, právě když existuje lineární zobrazení* $l : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$, *okolí* $V \subset \boldsymbol{R}^n$, *obsahující bod* $0 \in \boldsymbol{R}^n$, *a zobrazení* $\varepsilon : V \to \boldsymbol{R}^m$ *tak, že*

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \tag{2.1.5}$$

a pro každé $h \in \boldsymbol{R}^n$

$$f(x+h) - f(x) = l(h) + \varepsilon(h)\|h\|. \tag{2.1.6}$$

Platí $l(h) = Df(x)(h)$.

D ů k a z . Podmínka (2.1.6) společně s (2.1.5) je ekvivalentní podmínce

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - l(h)}{\|h\|} = 0, \tag{2.1.7}$$

což dokazuje tvrzení.

Položme $n = m = 1$ a zvolme libovolně lineární zobrazení $\bar{l} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $\bar{l}(h) = k \cdot h$. Z podmínky (2.1.5) plyne, že existuje okolí nuly $W \subset \boldsymbol{R}$ takové, že pro každé $h \in W$ platí $|\varepsilon(h)| < k$. Pro taková h ovšem dostáváme

$$|\varepsilon(h)| \cdot |h| < |l(h)|. \tag{2.1.8}$$

Tato skutečnost se obvykle opisuje slovy „zobrazení $h \to f(x+h) - f(x) - Df(x)(h)$ konverguje k nule rychleji než libovolná přímka“ nebo „$Df(x)$ je lineární část přírůstku funkce f v bodě x.“

K podobnému závěru lze dojít i při obecném n a m.

Věta 2.3. *Zobrazení* $f : U \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$, *diferencovatelné v bodě x, je v tomto bodě spojité.*

D ů k a z . Z (2.1.6) plyne $\lim_{h \to 0}(f(x+h) - f(x)) = 0$.

Nyní dokážeme základní větu o derivaci složeného zobrazení. Nejprve pomocné lemma:

Lemma 2.4. *Nechť zobrazení* $f : U \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ *je diferencovatelné v bodě* $x \in U$. *Pak zobrazení*

$$h \to \frac{f(x+h) - f(x)}{\|h\|}$$

je na nějakém okolí bodu $0 \in \boldsymbol{R}^n$ *ohraničené.*

D ů k a z . Podle věty 2.2 je

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{\|h\|} = Df(x)\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \varepsilon(h). \tag{2.1.9}$$

Norma prvního sčítance na pravé straně je ohraničena číslem $\|Df(x)\|$, druhý má v bodě

$0 \in \boldsymbol{R}^n$ limitu rovnu 0, je tedy na nějakém okolí tohoto bodu rovněž ohraničený.

Věta 2.5 (o derivaci složeného zobrazení). *Nechť zobrazení* $f_1 : U_1 \subset \boldsymbol{R}^{n_1} \to \boldsymbol{R}^{n_2}$ *je diferencovatelné v bodě* $x_1 \in U_1$, *zobrazení* $f_2 : U_2 \subset \boldsymbol{R}^{n_2} \to \boldsymbol{R}^{n_3}$ *je diferencovatelné v bodě* $x_2 = f_1(x_1) \in U_2$. *Pak zobrazení* $f_2 \circ f_1$ *je diferencovatelné v bodě* x_1 *a platí*

$$D(f_2 \circ f_1)(x_1) = Df_2(x_2) \circ Df_1(x_1). \tag{2.1.10}$$

D ů k a z . Označme $l_1 = Df_1(x_1)$, $l_2 = Df_2(x_2)$. Pro $h_1 \in \boldsymbol{R}^{n_1}$ označme

$$h_2 = f_1(x_1 + h_1) - f_1(x_1). \tag{2.1.11}$$

Máme

$$\begin{aligned}
&\frac{\|f_2(f_1(x_1+h_1)) - f_2(f_1(x_1)) - l_2(l_1(h_1))\|}{\|h_1\|} \le \\
&\quad \le \frac{\|f_2(f_1(x_1+h_1)) - f_2(f_1(x_1)) - l_2(f_1(x_1+h_1) - f_1(x_1))\|}{\|h_1\|} + \\
&\quad + \frac{\|l_2(f_1(x_1+h_1) - f_1(x_1)) - l_2(l_1(h_1))\|}{\|h_1\|} \le \\
&\quad \le \frac{\|f_2(x_2+h_2) - f_2(x_2) - l_2(h_2)\|}{\|h_1\|} + \|l_2\| \frac{\|f_1(x_1+h_1) - f_1(x_1) - l_1(h_1)\|}{\|h_1\|} = \\
&\quad = \frac{\|h_2\| \cdot \|\varepsilon_2(h_2)\|}{\|h_1\|} + \|l_2\| \frac{\|f_1(x_1+h_1) - f_1(x_1) - l_1(h_1)\|}{\|h_1\|},
\end{aligned}$$

kde $\lim_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0$. Z věty 2.3 plyne, že při $h_1 \to 0$ je $\lim h_2 = 0$. Navíc, podle lemmatu 2.4 je výraz $\|h_2\|/\|h_1\|$ na nějakém okolí nuly ohraničený. Proto je limita výrazu na pravé straně rovna nule a věta dokázána.

Věta 2.6. *Každé konstantní zobrazení* $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ *je diferencovatelné v každém bodě* $x \in \boldsymbol{R}^n$. *Platí* $Df(x) = 0$.

D ů k a z . Platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - 0}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x)}{\|h\|} = 0.$$

Věta 2.7. *Každé lineární zobrazení* $l : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ *je diferencovatelné v každém bodě* $x \in \boldsymbol{R}^n$. *Platí* $Dl(x) = l$.

D ů k a z . Máme

$$\lim_{h\to 0} \frac{l(x+h) - l(x) - l(h)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{l(x) + l(h) - l(x) - l(h)}{\|h\|} = 0.$$

Věta 2.8. *Zobrazení* $f : U \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ *je diferencovatelné v bodě* $x \in U$, *právě když jsou v tomto bodě diferencovatelné jeho složky* $f^1, f^2, \ldots, f^m : U \to \boldsymbol{R}$. *Pro každé* $h \in \boldsymbol{R}^n$ *platí*

$$Df(x)(h) = \left(Df^1(x)(h), Df^2(x)(h), \ldots, Df^m(x)(h)\right). \tag{2.1.12}$$

D ů k a z . Zřejmý.

Vztah (2.1.12) se dá napsat takto:

$$Df(x) = \left(Df^1(x), Df^2(x), \ldots, Df^m(x)\right). \tag{2.1.13}$$

Následující věta ukazuje, jak souvisí právě definovaný pojem derivace s pojmem derivace z prvního ročníku.

Věta 2.9. *Funkce $f : U \subset \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ je diferencovatelná v bodě $x \in U$, právě když tam má derivaci (ve smyslu prvního ročníku). Pro každé $h \in \boldsymbol{R}$ platí*

$$Df(x)(h) = f'(x) \cdot h. \tag{2.1.14}$$

D ů k a z . Předpokládejme, že existuje $f'(x)$. Pak

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)\cdot h}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|} \cdot \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right) = 0.$$

Naopak, je-li funkce f v bodě x diferencovatelná a $Df(x)(h) = kh$, pak

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - k \right) + k \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{|h|}{h} \cdot \frac{f(x+h) - f(x) - kh}{|h|} \right) + k = 0 + k = k. \end{aligned}$$

Další věta ukáže, jak snadno se derivují zobrazení z $\boldsymbol{R}$ do $\boldsymbol{R}^m$.

Věta 2.10. *Zobrazení $f : U \subset \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^m$ je diferencovatelné v bodě $x \in U$ právě když má v tomto bodě každá jeho složka derivaci ve smyslu prvního ročníku. Pro každé $h \in \boldsymbol{R}$ platí*

$$Df(x)(h) = \left((f^1)'(x), (f^2)'(x), \ldots, (f^m)'(x) \right) \cdot h. \tag{2.1.15}$$

D ů k a z . Necháváme na čtenáři.

Věta 2.11. *Zobrazení $s : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $s(x) = x^1 + x^2$, a $p : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $p(x) = x^1 x^2$, jsou diferencovatelná v každém bodě $x \in \boldsymbol{R}^2$. Platí*

$$\begin{aligned} Ds(x)(h) &= h^1 + h^2, \\ Dp(x)(h) &= x^2 h^1 + x^1 h^2. \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

D ů k a z . Tvrzení pro zobrazení s plyne přímo z věty 2.7. Pro zobrazení p máme

$$\begin{aligned} 0 &\le \frac{\left| p(x+h) - p(x) - x^2 h^1 - x^1 h^2 \right|}{\|h\|_\infty} = \frac{\left| (x^1 + h^1)(x^2 + h^2) - x^1 x^2 - x^2 h^1 - x^1 h^2 \right|}{\|h\|_\infty} \\ &= \frac{\left| h^1 h^2 \right|}{\max\{|h^1|, |h^2|\}} \le \frac{|h^1| \cdot \max\{|h^1|, |h^2|\}}{\max\{|h^1|, |h^2|\}} = |h^1|. \end{aligned}$$

Takže

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left| p(x+h) - p(x) - x^2 h^1 - x^1 h^2 \right|}{\|h\|_\infty} = 0 \tag{2.1.17}$$

a tvrzení je dokázáno.

Věta 2.12. *Jsou-li $f, \bar{f} : U \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ zobrazení diferencovatelná v bodě $x \in U$, pak pro libovolná čísla $c, \bar{c} \in \boldsymbol{R}$ je zobrazení $cf + \bar{c}\bar{f}$ diferencovatelné v bodě x a platí*

$$D(cf + \bar{c}\bar{f})(x) = cDf(x) + \bar{c}D\bar{f}(x). \tag{2.1.18}$$

D ů k a z . Označme l lineární zobrazení, přiřazující každému vektoru $(h, \bar{h}) \in \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^m$ vektor $ch + \bar{c}\bar{h}$ a $(f, \bar{f})$ zobrazení $x \to (f(x), \bar{f}(x))$. Máme

$$D(cf+\bar{c}\bar{f})(x)=D\big(l\circ(f,\bar{f})\big)(x)=Dl(f(x),\bar{f}(x))\circ D(f,\bar{f})(x)=$$
$$=l\circ\big(Df(x),D\bar{f}(x)\big)=cDf(x)+\bar{c}D\bar{f}(x)$$

(Věta 2.5, 2.7 a 2.8).

Pokuste se podobně dokázat větu o derivaci součinu dvou funkcí (využijte přitom derivaci zobrazení p z věty 2.11).

2.2 Derivace podle vektoru, Gâteauxova derivace. Nechť $f:U\subset \boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$, $x\in U$, $h\in\boldsymbol{R}^n$. *Derivací zobrazení* f *podle vektoru* h *v bodě* x rozumíme limitu

$$D_h f(x)=\lim_{s\to 0}\frac{f(x+sh)-f(x)}{s}. \tag{2.2.1}$$

Nechť $g_x^h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^n$ je zobrazení, definované předpisem

$$g_x^h(s)=x+sh. \tag{2.2.2}$$

Přímo z uvedené definice plyne následující jednoduché tvrzení.

Lemma 2.13. *Zobrazení $f:U\subset\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ má v bodě $x\in U$ derivaci podle vektoru $h\in\boldsymbol{R}^n$, právě když je zobrazení $f\circ g_x^h$ diferencovatelné v nule. Platí*

$$D_h f(x)=D(f\circ g_x^h)(0)(1)=\big((f^1\circ g_x^h)'(0),\dots,(f^m\circ g_x^h)'(0)\big). \tag{2.2.3}$$

D ů k a z . Předpokládejme, že zobrazení $f\circ g_x^h$ je diferencovatelné v nule. Pak podle věty 2.2 je ve vztahu

$$(f\circ g_x^h)(s)-(f\circ g_x^h)(0)=D(f\circ g_x^h)(0)(s)+s\varepsilon(s)$$

$\lim_{s\to 0}\varepsilon(s)=0$. Vzhledem k tomu, že $(f\circ g_x^h)(s)=f(x+sh)$, dostáváme současně existenci uvažované derivace podle vektoru i první rovnost v (2.2.3). Druhá rovnost plyne z věty 2.10.

Obrácená implikace plyne ihned z (2.2.3).

Derivace zobrazení f v bodě x podle vektoru h je tedy derivací zobrazení $s\to f(x+sh)$ v nule. To, společně s větou 2.10, umožňuje počítat derivace podle vektorů velice snadno.

Je-li zobrazení $h\to D_h f(x)$ lineární, nazýváme je *Gâteauxovou derivací zobrazení f v bodě x* a značíme $D_G f(x)$. Je tedy $D_G f(x)\in L(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^m)$.

Lemma 2.14. *Je-li zobrazení $f:U\subset\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ diferencovatelné v bodě $x\in U$, má v tomto bodě i Gâteauxovu derivaci a platí*

$$D_G f(x)=Df(x). \tag{2.2.4}$$

D ů k a z . Uvažujme zobrazení g_x^h z (2.2.2). Toto zobrazení je diferencovatelné a platí $Dg_x^h(0)(s)=sh.$ Podle věty 2.5 máme

$$D(f\circ g_x^h)(0)(1)=\big(Df(x)\circ Dg_x^h(0)\big)(1)=Df(x)(h).$$

Tvrzení tedy plyne z lemmatu 2.13.

Lemma 2.15. *Nechť $x\in U\subset\boldsymbol{R}$, $f:U\to\boldsymbol{R}^m$. Existuje-li derivace $D_h f(x)$, kde $h=1$, pak je zobrazení f v bodě x diferencovatelné.*

D ů k a z . Pro $0,1\in\boldsymbol{R}$ uvažujme zobrazení $g_0^1:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ z (2.2.2). Platí $f=(f\circ g_0^1)\circ g_0^1$ a tvrzení plyne z lemmatu 2.13 a věty 2.5.

Uvažme funkci $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$, definovanou předpisem

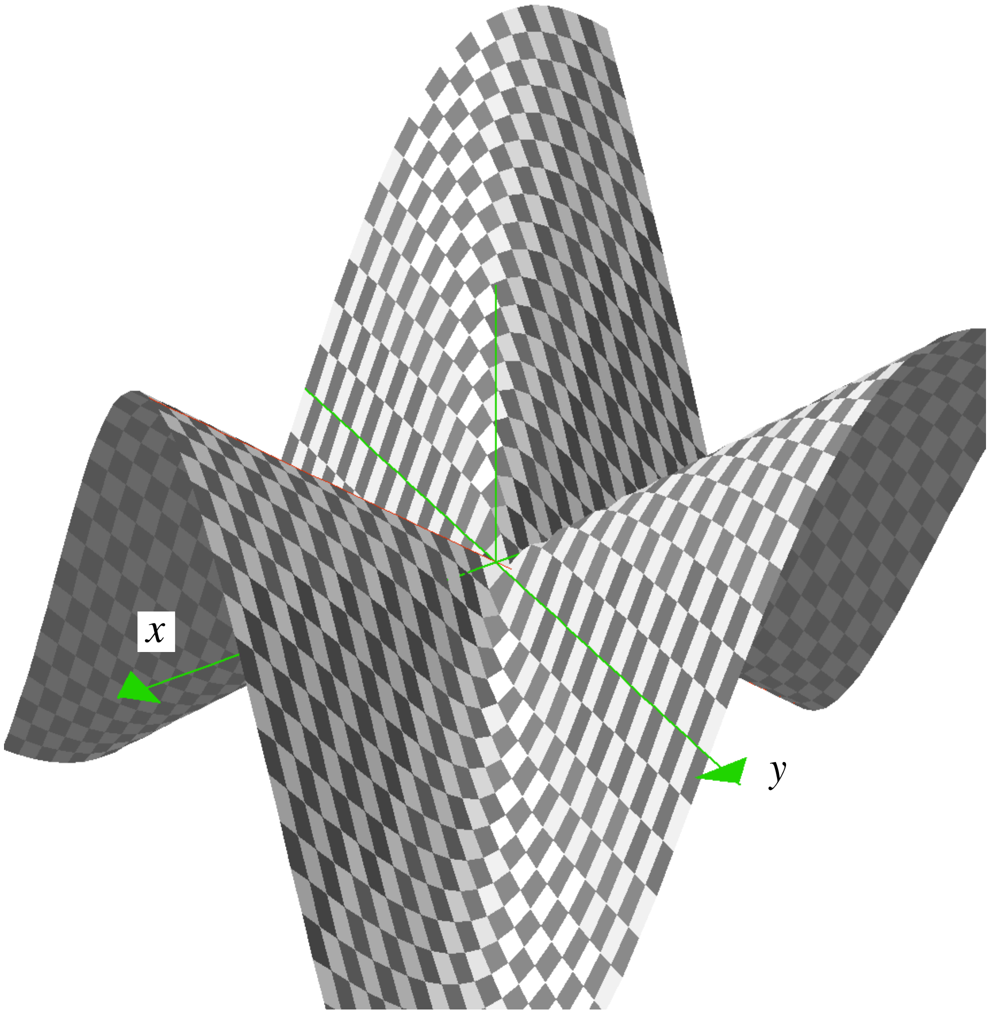
$$f(x^1,x^2)=\begin{cases} x^1, & \text{když } x^1 = x^2, \\ 0 & \text{jindy}. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Vidíme, že derivace této funkce v nule podle libovolného vektoru $h \in \boldsymbol{R}^2$ existuje. Platí $D_h f(0) = f(h)$. Jelikož ovšem funkce f není lineární, znamená to, že $D_G f(0)$ neexistuje.

Přesvědčte se, že podobnou vlastnost má funkce

$$f(x^1,x^2)=\begin{cases} \dfrac{(x^1)^3 - 3x^1(x^2)^2}{(x^1)^2+(x^2)^2}, & \text{když } (x^1,x^2) \neq (0,0), \\ 0, & \text{když } (x^1,x^2) = (0,0). \end{cases} \tag{2.2.6}$$

která je dokonce spojitá. Graf této funkce vidíme na následujícím obrázku:



$$f(x^1,x^2)=\begin{cases} \dfrac{(x^1)^3 - 3x^1(x^2)^2}{(x^1)^2+(x^2)^2}, & \text{když } (x^1,x^2) \neq (0,0), \\ 0, & \text{když } (x^1,x^2) = (0,0). \end{cases}$$

Uvažujme nyní funkci $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, definovanou předpisem

$$f(x^1,x^2)=\begin{cases} 1, & \text{když } x^1 > 0,\ x^2 = (x^1)^2, \\ 0 & \text{jindy}. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

Snadno zjistíme, že tato funkce má v nule Gâteauxovu derivaci, ačkoli tam není spojitá. Vidíme tedy, že pro Gâteauxovu derivaci neplatí věta 2.3.

Pomocí posledně uvedené funkce lze snadno dokázat, že pro Gâteauxovu derivaci neplatí ani věta 2.5. Stačí definovat funkci $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ předpisem

$$g(t)=(t,t^2) \tag{2.2.8}$$

a uvažovat kompozici $f\circ g$.

Nyní uvedeme pro zajímavost obdobu věty 2.5, která platí (z části) i pro Gâteauxovu derivaci.

Věta 2.16. *Nechť zobrazení $f_1:U_1\subset\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ má Gâteauxovu derivaci v bodě $x_1\in U_1$, zobrazení $f_2:U_2\subset\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^k$ je diferencovatelné v bodě $x_2=f_1(x_1)\in U_2$. Pak zobrauení $f_2\circ f_1$ má v bodě x_1 Gâteauxovu derivaci a platí*

$$D_G(f_2\circ f_1)(x_1)=Df_2(x_2)\circ D_Gf_1(x_1). \tag{2.2.9}$$

Důkaz. Nechť $g_{x_1}^h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^n$ je zobrazení z (2.2.2). Podle lemmatu 2.13 je zobrazení $f_1\circ g_{x_1}^h$ diferencovatelné v nule, je takové tedy i zobrazení $f_2\circ f_1\circ g_{x_1}^h$ (věta 2.5). Zobrazení $f_2\circ f_1$ tedy má derivaci podle vektoru h (opět lemma 2.13) a platí

$$\begin{aligned}D_h(f_2\circ f_1)(x_1)&=D(f_2\circ f_1\circ g_{x_1}^h)(0)(1)=Df_2(x_2)\big(D(f_1\circ g_{x_1}^h)(0)(1)\big)=\\&=Df_2(x_2)\big(D_hf_1(x_1)\big).\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Přiřazení $h\to D_h(f_2\circ f_1)(x_1)$ je tedy lineární a vztah (2.2.9) dokázán.

2.3. Parciální derivace. Nechť $f:U\subset\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$, $x\in U$. Označme $e_1,e_2,\dots,e_n$ kanonickou bázi vektorového prostoru $\boldsymbol{R}^n$ (tedy $e_1=(1,0,\dots,0)$, $e_2=(0,1,0,\dots,0)$, … , $e_n=(0,\dots,0,1)$). Derivace zobrazení f v bodě x podle e_i se nazývá *parciální derivací zobrazení f podle i-té proměnné v bodě x*. Klademe

$$\begin{aligned}D_1f(x)&=D_{e_1}f(x),\\D_2f(x)&=D_{e_2}f(x),\\&\vdots\\D_nf(x)&=D_{e_n}f(x).\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Pro uvedené zobrazení f, bod $x\in U$ a číslo $i\in\{1,2,\dots,n\}$ označme $U_{x,i}$ množinu všech $t\in\boldsymbol{R}$ takových, že

$$(x^1,x^2,\dots,x^{i-1},\underset{\substack{\uparrow\\ i\text{-té místo}}}{t},x^{i+1},\dots,x^n)\in U, \tag{2.3.2}$$

a $f_{x,i}$ zobrazení z $U_{x,i}$ do $\boldsymbol{R}^m$, definované předpisem

$$f_{x,i}(t)=f(x^1,x^2,\dots,x^{i-1},t,x^{i+1},\dots,x^n). \tag{2.3.3}$$

Toto zobrazení se nazývá *i-té parciální zobrazení zobrazení f v bodě x*.

Věta 2.17. *Zobrazení $f:U\subset\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ má v bodě $x\in U$ parciální derivaci podle i-té proměnné, právě když je v bodě x^i diferencovatelné parciální zobrazení $f_{x,i}$. Pro každé $j\in\{1,2,\dots,m\}$ platí*

$$D_if^j(x)=(f_{x,i}^j)'(x^i). \tag{2.3.4}$$

Důkaz. Necháváme na čtenáři.

Věta 2.17 ukazuje způsob, kterým se ve skutečnosti parciální derivace počítají.

Pro zobrazení $f: U \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$, které má v bodě $x \in U$ parciální derivace podle všech proměnných, klademe

$$f'(x) = \begin{pmatrix} D_1 f^1(x) & D_2 f^1(x) & \cdots & D_n f^1(x) \\ D_1 f^2(x) & D_2 f^2(x) & \cdots & D_n f^2(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f^m(x) & D_2 f^m(x) & \cdots & D_n f^m(x) \end{pmatrix}. \tag{2.3.5}$$

Tato matice se jmenuje *matice parciálních derivací zobrazení* f *v bodě* x.

Předpokládejme, že zobrazení $f: U \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ má v bodě $x \in U$ Gâteauxovu derivaci. Pak pro libovolný vektor $h \in \boldsymbol{R}^n$, $h = h^1 e_1 + h^2 e_2 + \ldots + h^n e_n$ platí

$$\begin{aligned} D_G f(x)(h) = D_G f(x)(h^1 e_1 + h^2 e_2 + \ldots + h^n e_n) = \\ = h^1 D_G f(x)(e_1) + h^2 D_G f(x)(e_2) + \ldots + h^n f(x)(e_n) = \\ = h^1 D_1 f(x) + h^2 D_2 f(x) + \ldots + h^n D_n f(x) = \\ = f'(x) \cdot h. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že

Věta 2.18. *Pro zobrazení* $f: U \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$*, které má Gâteauxovu derivaci v bodě* $x \in U$*, je matice* $f'(x)$ *maticí lineárního zobrazení* $D_G f(x)$.

Z uvedeného a z věty 2.5 rovněž okamžitě vyplývá následující věta:

Věta 2.19. *Nechť zobrazení* $f_1: U_1 \subset \boldsymbol{R}^{n_1} \to \boldsymbol{R}^{n_2}$ *je diferencovatelné v bodě* $x_1 \in U_1$*, zobrazení* $f_2: U_2 \subset \boldsymbol{R}^{n_2} \to \boldsymbol{R}^{n_3}$ *je diferencovatelné v bodě* $x_2 = f_1(x_1) \in U_2$*. Pak*

$$(f_2 \circ f_1)'(x_1) = f_2'(x_2) \cdot f_1'(x_1). \tag{2.3.6}$$

2.4 Věty o střední hodnotě. Lagrangeova věta o střední hodnotě (nebo o přírůstku funkce) patří k základním nástrojům matematické analýzy.

Pro prvky $x, h \in \boldsymbol{R}^n$ klademe

$$[x, x+h] = g_x^h([0,1]) \tag{2.4.1}$$

(viz (2.2.2)). Je tedy $[x, x+h]$ množina všech bodů $x + th$, kde $t \in [0,1]$, čili úsečka, spojující body x a $x+h$. Nyní můžeme přikročit k větě o střední hodnotě.

Věta 2.20 (o střední hodnotě pro funkce). *Nechť množina* $U \subset \boldsymbol{R}^n$ *obsahuje úsečku* $[x, x+h]$ *a funkce* $f: U \to \boldsymbol{R}$ *má v každém bodě této úsečky derivaci podle vektoru* h*. Pak existuje bod* $y \in [x, x+h]$ *takový, že*

$$f(x+h) - f(x) = D_h f(y). \tag{2.4.2}$$

D ů k a z . Nechť $t_0 \in [0,1]$. Máme

$$f \circ g_x^h(t) = f(x + t_0 h + (t - t_0)h) = f \circ g_{x+t_0 h}^h(t - t_0). \tag{2.4.3}$$

Jelikož funkce $f \circ g_{x+t_0 h}^h$ na pravé straně je diferencovatelná v bodě t_0 (to plyne z předpokladu, že funkce f má derivaci podle vektoru h v bodě $x + t_0 h$), má zobrazení $f \circ g_x^h : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ derivaci v bodě t_0 a tedy (vzhledem k libovolnosti bodu t_0) v každém bodě intervalu $[0,1]$. Podle Lagrangeovy věty tedy existuje bod $t_0 \in (0,1)$ takový, že

$$f \circ g_x^h(1) - f \circ g_x^h(0) = (f \circ g_x^h)'(t_0) \cdot (1 - 0).$$

Levá strana této rovnice je ovšem rovna $f(x+h) - f(x)$ (jak plyne (2.2.2)), kdežto pravá $D_h f(x + t_0 h)$ (jak je vidět po zderivování (2.4.3) v t_0 a pochopení (2.2.3)). Můžeme tedy položit $y = x + t_0 h$.

Důsledek 1. *Nechť množina $U \subset \boldsymbol{R}^n$ obsahuje úsečku $[x, x+h]$ a funkce $f : U \to \boldsymbol{R}$ má Gâteauxovu derivaci v každém bodě této úsečky. Pak existuje prvek $y \in [x, x+h]$ takový, že*

$$f(x+h) - f(x) = D_G f(y)(h). \tag{2.4.4}$$

D ů k a z . Plyne z předchozí věty a definice Gâteauxovy derivace.

Nyní uvedeme obecnější (a komplikovanější) variantu věty o střední hodnotě, která platí pro libovolná zobrazení $f : U \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$. Nejprve jedno pomocné tvrzení (jedná se o speciální případ tzv. Hahnovy–Banachovy věty z funkcionální analýzy):

Lemma 2.21. *K libovolnému prvku $h_0 \in \boldsymbol{R}^n$ existuje lineární zobrazení $l : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ takové, že $\|l\| = 1$ a $l(h) = \|h\|$.*

D ů k a z . Toto lemma platí pro libovolnou normu na $\boldsymbol{R}^n$, my je však dokážeme pouze pro normu $\|.\|_2$. Předpokládejme, že $h_0 \neq 0$ (pro nulu je důkaz snadný) a položme

$$l(h) = \frac{(h, h_0)}{\|h_0\|}$$

(v čitateli přirozený skalární součin). Zobrazení l je zjevně lineární a platí $l(h_0) = \|h_0\|$. Podívejme se na jeho normu:

$$\|l\| = \max_{\|h\| \le 1} |l(h)| = \max_{\|h\| \le 1} \frac{|(h, h_0)|}{\|h_0\|}.$$

Podle Schwartzovy nerovnosti $(h_1, h_2) \le \|h_1\| \cdot \|h_2\|$, kterou známe z algebry, tedy platí

$$\|l\| \le \max_{\|h\| \le 1} \frac{\|h\| \cdot \|h_0\|}{\|h_0\|} = 1.$$

Navíc, pro vektor $\bar{h}_0 = h_0 / \|h_0\|$ máme $\|\bar{h}_0\| = 1$ a

$$\frac{|(\bar{h}_0, h_0)|}{\|h_0\|} = \frac{|(h_0, h_0)|}{\|h_0\|^2} = 1.$$

Tvrzení tedy platí.

Věta 2.22 (o střední hodnotě pro zobrazení). *Nechť množina $U \subset \boldsymbol{R}^n$ obsahuje úsečku $[x, x+h]$ a zobrazení $f : U \to \boldsymbol{R}^m$ má v každém bodě této úsečky derivaci podle vektoru h. Pak platí*

$$\|f(x+h) - f(x)\| \le \sup_{y \in [x, x+h]} \|D_h f(y)\|. \tag{2.4.5}$$

D ů k a z . Podobně jako v důkazu věty 2.20 uvažujme zobrazení $f \circ g_x^h$. Toto zobrazení je diferencovatelné v každém bodě intervalu $[0,1]$. Nechť $l : \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$ je lineární zobrazení takové, že $\|l\| = 1$ a $l(f(x+h) - f(x)) = \|f(x+h) - f(x)\|$ (viz lemma 2.21). Zobrazení $l \circ f \circ g_x^h$ je tedy diferencovatelné na celém intervalu $[0,1]$ a můžeme na ně použít Lagrangeovu větu o střední hodnotě:

$$(l \circ f \circ g_x^h)(1) - (l \circ f \circ g_x^h)(0) = (l \circ f \circ g_x^h)'(t_0),$$

kde $t_0 \in [0,1]$. Pro levou stranu ovšem platí

$$(l \circ f \circ g_x^h)(1) - (l \circ f \circ g_x^h)(0) = l(f(x+h) - f(x)) = \|f(x+h) - f(x)\|$$

a pro pravou

$$(l\circ f\circ g_x^h)'(t_0)=(l\circ f\circ g_{x+ht_0}^h)'(0)\le \left|D(l\circ f\circ g_{x+ht_0}^h)(0)(1)\right|\le$$
$$\le \|l\|\cdot\left\|D(f\circ g_{x+ht_0}^h)(0)(1)\right\|=\|D_h f(x+ht_0)\|\le \sup_{y\in[x,x+h]}\|D_h f(y)\|.$$

Tím je tvrzení dokázáno.

Důsledek 1. *Nechť množina $U\subset \boldsymbol{R}^n$ obsahuje úsečku $[x,x+h]$ a zobrazení $f:U\to\boldsymbol{R}^m$ má Gâteauxovu derivaci v každém bodě této úsečky. Pak*

$$\|f(x+h)-f(x)\|\le \sup_{y\in[x,x+h]}\|D_G f(y)\|\cdot\|h\|. \tag{2.4.6}$$

D ů k a z . Plyne z věty 2.22, definice Gâteauxovy derivace a věty 1.9.

Vidíme, že věta o střední hodnotě pro zobrazení je formulována v poněkud slabší podobě než věta o střední hodnotě pro funkce. Že bylo toto oslabení nutné, ukazuje následující příklad.

Uvažujme zobrazení $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$, definované předpisem

$$f(t)=(\cos t,\sin t) \tag{2.4.7}$$

a položme $x=0$, $h=2\pi$. Platí $f(x+h)-f(x)=0$. Přitom ale neexistuje bod $y\in[0,2\pi]$, ve kterém by bylo $D_h f(y)=0$.

2.5. Spojitá diferencovatelnost. Předpokládejme, že zobrazení $f:U\subset\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ má Gâteauxovu derivaci v každém bodě nějakého okolí $V\subset U$. Dostáváme zobrazení $D_G f:V\to L(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^m)$, přiřazující každému bodu Gâteauxovu derivaci zobrazení f v tomto bodě.

Zvolme nyní bod $x\in U$. Řekneme, že zobrazení f je *v bodě x spojitě diferencovatelné*, je-li zobrazení $D_G f$ definováno na nějakém jeho okolí a je-li v tomto bodě spojité.

Víme, že prostor $L(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^m)$ je izomorfní s vektorovým prostorem matic typu $m\times n$. Podle věty 1.7 o spojitosti zobrazení $D_G f$ nerozhoduje, jakou normu na prostoru $L(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^m)$ zvolíme. Můžeme tedy usoudit, že zobrazení $D_G f$ je spojité, právě když je spojité zobrazení f'. O spojitosti tohoto zobrazení se přitom rozhoduje poměrně snadno.

Věta 2.23. *Zobrazení spojitě diferencovatelné v bodě x je v tomto bodě diferencovatelné.*

D ů k a z . Nechť $f:U\subset\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ je zobrazení, spojitě diferencovatelné v bodě $x\in U$. Zobrazení $D_G f$ je tedy definováno v každém bodě nějakého okolí bodu x. Označme $D_G f(y)=l_y$. Platí

$$\lim_{h\to 0}\|l_{x+h}-l_x\|=0. \tag{2.5.1}$$

Aplikujeme-li důsledek 1 věty o střední hodnotě pro zobrazení na zobrazení $f-l_x$, dostaneme

$$\|f(x+h)-f(x)-l_x(h)\|\le \sup_{y\in[x,x+h]}\left\|l_y-l_x\right\|\cdot\|h\|. \tag{2.5.2}$$

Máme tedy

$$\frac{\|f(x+h)-f(x)-l_x(h)\|}{\|h\|}\le \sup_{y\in[x,x+h]}\left\|l_y-l_x\right\|, \tag{2.5.3}$$

přičemž limita pravé strany pro $h\to 0$ je rovna nule.

Věta 2.24. *Nechť zobrazení $f_2:U_2\subset\boldsymbol{R}^{n_2}\to\boldsymbol{R}^{n_3}$ a $f_1:U_1\subset\boldsymbol{R}^{n_1}\to U_2$ jsou spojitě diferencovatelná v každém bodě svých definičních oborů. Pak zobrazení $f_2\circ f_1$ je spojitě diferencovatelné v každém bodě množiny U_1.*

D ů k a z . Necháme čtenáři.

Lemma 2.25. *Předpokládejme, že zobrazení* $f: U \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ *má derivace podle vektorů* h_1, h_2 *v každém bodě množiny* U *a zobrazení* $D_{h_1} f: U \to \boldsymbol{R}^m$ *je spojité v bodě* $x \in U$. *Pak pro každé* $c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}$ *existuje derivace* $D_{c_1 h_1 + c_2 h_2} f(x)$ *a platí*

$$D_{c_1 h_1 + c_2 h_2} f(x) = c_1 D_{h_1} f(x) + c_2 D_{h_2} f(x). \tag{2.5.4}$$

D ů k a z . Chceme dokázat, že

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + tc_1 h_1 + tc_2 h_2) - f(x)}{t} = c_1 D_{h_1} f(x) + c_2 D_{h_2} f(x). \tag{2.5.5}$$

Jelikož

$$\begin{aligned} & f(x + tc_1 h_1 + tc_2 h_2) - f(x) = \\ & \quad = f(x + tc_1 h_1 + tc_2 h_2) - f(x + tc_2 h_2) + f(x + tc_2 h_2) - f(x) \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

a

$$\begin{aligned} c_1 D_{h_1} f(x) &= D_{c_1 h_1} f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tc_1 h_1) - f(x)}{t}, \\ c_2 D_{h_2} f(x) &= D_{c_2 h_2} f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tc_2 h_2) - f(x)}{t}, \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

stačí dokázat, že

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + tc_1 h_1 + tc_2 h_2) - f(x + tc_2 h_2)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tc_1 h_1) - f(x)}{t}. \tag{2.5.8}$$

Označme

$$g(x) = \frac{f(x + tc_2 h_2) - f(x)}{t}. \tag{2.5.9}$$

Podle věty 2.22 platí

$$\| g(x + tc_1 h_1) - g(x) \| \le \sup_{y \in [x, x + tc_1 h_1]} \| D_{tc_1 h_1} g(y) \|. \tag{2.5.10}$$

Ale

$$D_{tc_1 h_1} g(y) = c_1 \big(D_{h_1} f(y + tc_2 h_2) - D_{h_1} f(y) \big), \tag{2.5.11}$$

což podle předpokladu o spojitosti zobrazení $D_{h_1} f$ znamená, že limita levé strany (2.5.10) pro $t \to 0$ je rovna nule. Tím je lemma dokázáno.

Věta 2.26. *Nechť pro zobrazení* $f: U \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ *existují všechny funkce* $D_j f^i : U \to \boldsymbol{R}$, *kde* $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *a jsou na množině* U *spojité. Pak zobrazení* f *je spojitě diferencovatelné v každém bodě množiny* U.

D ů k a z . Podle předchozího lemmatu má zobrazení f Gâteauxovu derivaci v každém bodě množiny U (proč?). Tvrzení tedy plyne z předpokladu o spojitosti parciálních derivací.

Uvažme funkce $f: U \subset \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, kde $U = (0, \infty) \times \boldsymbol{R}$ a $f(x^1, x^2) = (x^1)^{(x^2)}$. K výpočtu parciálních derivací této funkce nám podle věty 2.17 stačí znalosti z prvního ročníku:

$$\begin{aligned} & D_1 f(x^1, x^2) = x^2 (x^1)^{(x^2 - 1)}, \\ & D_2 f(x^1, x^2) = (x^1)^{(x^2)} \ln x^1. \end{aligned} \tag{2.5.12}$$

Vidíme, že funkce $D_1 f$ a $D_2 f$ jsou spojité. Podle věty 2.26 to znamená, že funkce f je spojitě diferencovatelná (a tedy diferencovatelná) v každém bodě množiny U.

Podívejme se nyní na funkci $\bar{f}: (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^x$. Z prvního ročníku víme, že derivaci této funkce lze spočítat pomocí triku

$$x^x = e^{x \ln x},$$

který vede k

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)\,.$$

Zkusme nyní spočítat derivaci funkce $\bar{f}$ jinak. Platí $\bar{f} = f \circ g$, kde $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$, $g(x) = (x, x)$. Zobrazení g je diferencovatelné (třebas proto, že je lineární). Podle věty 2.19 dostáváme

$$\begin{aligned}\bar{f}'(x) &= (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(x, x) \cdot g'(x) = \\ &= \left(x \cdot x^{x-1}, x^x \ln x\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x^x + x^x \ln x = x^x (\ln x + 1).\end{aligned}$$