Matematická analýza III
cvičení Z. Kočana
Zimní semestr 1999/2000

1. Přirozená topologie $\boldsymbol{R}^n$ - příklady a cvičení

Příklady

1. *Dokažte, že čtverec* $M = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid |x| + |y| \le 1\}$ *je kompaktní množina.*

Řešení. Stačí ukázat, že množina M je uzavřená a ohraničená. Uzavřenost lze dokázat přímo z definice uzavřené množiny; můžeme ale využít spojitosti zobrazení $f(x,y) = |x| + |y|$. Platí $M = f^{-1}(-\infty, 1]$, jedná se tedy o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení.

Jelikož pro každé $(x,y) \in M$ platí $\sqrt{x^2 + y^2} \le |x| + |y| \le 1$, je množina M ohraničená.

2. *Dokažte, že kanonická projekce* $\pi^i : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, $\pi^i(x) = x^i$, *je spojitá.*

Řešení. Nechť $U \subset \boldsymbol{R}$ je otevřená množina. Dokážeme, že $(\pi^i)^{-1}(U) = V$, kde

$$V = \underbrace{\boldsymbol{R} \times \cdots \times \boldsymbol{R}}_{i-1 \text{ činitelů}} \times U \times \underbrace{\boldsymbol{R} \times \cdots \times \boldsymbol{R}}_{n-i \text{ činitelů}}$$

Nechť $x \in V$. Platí $\pi^i(x) = x^i \in U$, a tedy $x \in (\pi^i)^{-1}(U)$. Opačně, je-li $x \in (\pi^i)^{-1}(U)$, pak $\pi^i(x) \in U$. Jelikož $\pi^i(x) = x^i$, je $x^i \in U$, a tedy $x \in V$.

3. *Dokažte, že zobrazení* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ *je spojité právě tehdy, když je spojitá každá jeho složka.*

Řešení. Pro složky f^1, f^2 zobrazení f platí $f^1 = \pi^1 \circ f$, $f^2 = \pi^2 \circ f$ (π^1, π^2 jsou kanonické projekce). Je-li tedy spojité zobrazení f, jsou spojité i jeho složky (jakožto kompozice spojitých zobrazení).

Nechť $I^1, I^2 \subset \boldsymbol{R}$ jsou otevřené intervaly. Pro důkaz spojitosti zobrazení f stačí dokázat, že množina $f^{-1}(I^1 \times I^2) \subset \boldsymbol{R}$ je otevřená (zdůvodněte!). Označme $V^1 = (f^1)^{-1}(I^1)$, $V^2 = (f^2)^{-1}(I^2)$ a $V = V^1 \cap V^2$. Jsou-li zobrazení f^1 a f^2 spojitá, je množina V (jako průnik dvou otevřených množin) otevřená. Je-li $y \in f(V)$, existuje $x \in V$ takové, že $f(x) = y$. Tedy $f^1(x) \in I^1$, $f^2(x) \in I^2$ a $y = (f^1(x), f^2(x)) \in I^1 \times I^2$.

4. *Má funkce* f *definovaná* $f(x,y) = (x^4 - y^4)/(x^2 + y^2)$ *pro* $(x,y) \ne (0,0)$ *limitu v bodě* $(0,0)$*?*

Řešení. Máme

$$f(x,y) = \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = x^2 - y^2.$$

f je tedy definována na libovolném okolí bodu $(0,0)$ mimo ten bod. Navíc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 - y^2) = 0.$$

5. *Vypočtěte*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{tg}(x-y)}{x-y}.$$

Řešení. Nechť

$$g(x,y) = x - y,$$
$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t = 0; \\ \dfrac{\operatorname{tg} t}{t} & \text{jinde.} \end{cases}$$

Jelikož

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg} t}{t}=1,$$

je funkce h spojitá. Navíc $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x-y)=0$ a pro $(x,y)\neq(0,0)$ platí

$$h\circ g(x,y)=\frac{\operatorname{tg}(x-y)}{x-y}.$$

Je tedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{tg}(x-y)}{x-y}=h(0)=1.$$

6. *Rozhodněte, je-li funkce f spojitá v bodě $(0,0)$, jestliže*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2y^2} & \text{pro } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{pro } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Řešení. Tato funkce je samozřejmě spojitá ve všech bodech (x,y) takových, že $x^2+2y^2\neq 0$, to jest, všude mimo bod $(0,0)$. Abychom vyřešili otázku v bodě$(0,0)$, odhadneme odpověď a poté se pokusíme náš odhad ověřit. V tomto případě odhadněme, že se jedná o nespojitost. Pokusíme se tedy najít takovou cestu, po níž, když se budeme přibližovat k $(0,0)$, limita $f(x,y)$ bude jiná než $f(0,0)$.

Předpokládejme, že $(x,y)\to(0,0)$ po přímce $y=x$. Potom $(x,y)=(t,t)$ a na uvažované přímce platí

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{t\to 0}\frac{t^2-t^2}{t^2+2t^2}=0=f(0,0).$$

Náš první odhad cesty tedy nevyšel, protože jsme se po ní přiblížili k hodnotě $f(0,0)$.

Pokusíme se přiblížit k bodu $(0,0)$ po přímce $y=2x$, to jest, $(x,y)=(t,2t)$. Na této přímce tedy platí

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{t\to 0}\frac{t^2-4t^2}{t^2+8t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{-3t^2}{9t^2}=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$=-\frac{1}{3}\neq 0=f(0,0).$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ tedy neexistuje a funkce f není spojitá v bodě $(0,0)$.

7. *Rozhodněte, je-li funkce f spojitá v bodě $(0,0)$, jestliže*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+2y^2} & \text{pro } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{pro } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Řešení. V tomto případě budeme očekávat v bodě $(0,0)$ spojitost. Abychom to ověřili, musíme ukázat, že $f(x,y)\to 0$ pro $(x,y)\to(0,0)$. Nejlépe toho dosáhneme tak, že najdeme výraz, jehož absolutní hodnota je větší než $|f(x,y)|$ a který zřejmě konverguje k 0, když $z=(x,y)\to(0,0)$. Všimněme si, že $|x|\le\|z\|$ a $|y|\le\|z\|$. Pak

$$|f(x,y)|=\frac{|xy(x^2-y^2)|}{x^2+y^2}=\frac{|x||y||x+y||x-y|}{x^2+y^2}\le\frac{|x||y|(|x|+|y|)(|x|+|y|)}{x^2+y^2}$$
$$\le\frac{\|z\|\|z\|(\|z\|+\|z\|)(\|z\|+\|z\|)}{\|z\|^2}=4\|z\|^2=4(x^2+y^2).$$

Jelikož pro $(x,y)\to(0,0)$ máme $4(x^2+y^2)\to 0$, dostáváme, že $|f(x,y)|\to 0$.

8. Najděte

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

Řešení. Přejdeme k polárním souřednicím. Tedy $x=\rho\sin\varphi$, $y=\rho\cos\varphi$ a

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\frac{x+y}{x^2+y^2}=\lim_{\varphi\in[0,\pi/2],\rho\to\infty}\frac{\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}$$
$$=\lim_{\varphi\in[0,\pi/2],\rho\to\infty}\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\rho}=0.$$

Cvičení

1. Najděte vnitřek, vnějšek, hrajici a užávěr množiny
$$\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\middle|\ n\in\boldsymbol{N}\right\}\subset\boldsymbol{R}^2.$$
2. Uveďte příklad množin $A, B\subset\boldsymbol{R}^2$ takových, že $\operatorname{int}A=\operatorname{cl}A$ a $\operatorname{cl}B=\operatorname{fr}B$. Existuje množina $C\subset\boldsymbol{R}^2$ taková, že $\operatorname{fr}C=\operatorname{int}C$?
3. Dokažte, že pro každé dvě množiny $A, B\subset\boldsymbol{R}^n$ platí
$$\operatorname{int}(A\setminus B)\subset\operatorname{int}A\setminus\operatorname{int}B,$$
a uveďte příklad, ve kterém neplatí opačná inkluze.
4. Dokažte, že každé konstantní zobrazení $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ je spojité.
5. Rozhodněte, zda množina $M=\left\{x\in R^n\middle|\ x^1>x^2>\cdots>x^n\right\}$ je otevřená.
6. Považujme prvky množiny $\boldsymbol{R}^9$ za čtvercové matice typu 3×3. Dokažte, že množina $M\subset\boldsymbol{R}^9$ tvořená regulárními maticemi je otevřená.
7. Najděte obraz definičního oboru a načrtněte graf funkce $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$. Najděte množinu všech bodů, ve kterých je uvedená funkce spojitá.

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2,\ f(x)=(\sin x,\cos x)$;
b) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2,\ f(x)=(\operatorname{sgn}x, x)$;
c) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2,\ f(x)=(\rho(x),\sin x)$;
d) $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R},\ f(x,y)=\operatorname{sgn}(xy)$.

8. V případě, že následující limity existují, najděte je. Pokud neexistují, pokuste se zdůvodnit proč.

a) $\lim_{(x,y)\to(2,0)}\ln\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$;
b) $\lim_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\ln xy}{x^2+y^2}$;
c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{xy}$;
d) $\lim_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin xy}{x}$;
e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x}{x+y}$;
f) $\lim_{(x,y)\to(\infty,k)}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$.

9. Najděte všechny body, ve kterých jsou následující funkce spojité:

a) $f_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{pro } (x,y)=(0,0);\end{cases}$
b) $f_2(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{pro } (x,y)=(0,0);\end{cases}$
c) $f_3(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y+3x^2}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{pro } (x,y)=(0,0);\end{cases}$
d) $f_4(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y)\neq(0,0);\\ \dfrac{1}{2} & \text{pro } (x,y)=(0,0);\end{cases}$
e) $f_5(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$;
f) $f_6(x,y)=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$.

10. Ukažte, že jestliže $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ je spojitá v (x_0,y_0), pak f_{x_0}, definovaná $f_{x_0}(y)=f(x_0,y)$, je spojitá v bodě $y=y_0$ a f_{y_0}, definovaná $f_{y_0}(x)=f(x,y_0)$, je spojitá v bodě $x=x_0$.
11. Spojitost f_{x_0} v $y=y_0$ a f_{y_0} v $x=x_0$ nezaručuje spojitost f v bodě (x_0,y_0). Ověřte toto tvrzení na funkci f_1 ze cvičení 9.
12. Nechť pro (x,y) taková, že $x^2+y^2\neq 0$,
$$f(x,y)=\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}.$$
Jak musí být definováno $f(0,0)$, aby byla funkce f spojitá v bodě $(0,0)$?
13. Nechť
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x} & \text{pro } x\neq 0;\\ y & \text{pro } x=0.\end{cases}$$
Má tato funkce nějaké body nespojitosti?