Matematická analýza III
cvičení Z. Kočana
Zimní semestr 1999/2000

2. Derivace prvního řádu - příklady a cvičení

Příklady

1. *Rozhodněte, je-li funkce* $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^3$, $f(x)=(\cos x,\sin x,x)$, *diferencovatelná v bodě* $x_0=\frac{\pi}{2}$.

Řešení. Všechny složky funkce f jsou spojité a diferencovatelné v každém bodě $x\in\boldsymbol{R}$. Tedy f je spojitá a diferencovatelná v $x_0=\frac{\pi}{2}$. Máme

$$f'(x)=(-\sin x,\cos x,1),$$

tedy

$$f'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=(-1,0,1).$$

2. *Najděte parciální derivace zobrazení* $f\left(x^1,x^2\right)=\left(x^1\right)^2+x^2\cos x^1$ *v bodě* $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$.

Řešení. Platí $D_1f\left(\frac{\pi}{2},1\right)=g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, kde $g\left(x^1\right)=f\left(x^1,1\right)=\left(x^1\right)^2+\cos x^1$. Tedy $D_1f\left(\frac{\pi}{2},1\right)=\pi-1$. Podobně $D_2f\left(\frac{\pi}{2},1\right)=h'(1)$, kde $h\left(x^2\right)=f\left(\frac{\pi}{2},x^2\right)=\frac{\pi^2}{4}$. Tedy $D_2f\left(\frac{\pi}{2},1\right)=0$.

3. *Dokažte, že funkce* $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^1+2x^2+\ldots+nx^n$ *je diferencovatelná v bodě* $x_0=\left(1,\frac{1}{2},\ldots\frac{1}{n}\right)$ *a najděte* $Df\left(x_0\right)$.

Řešení. Pro $k=1,\ldots,n$ platí $D_kf\left(x_0\right)=k$. Dále

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)-\left(h^1+2h^2+\ldots+nh^n\right)}{\|h\|}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{\|h\|}=0.$$

Funkce f je tedy diferencovatelná v bodě x_0 a platí $Df\left(x_0\right)(h)=h^1+2h^2+\ldots nh^n$.

Druhá možnost: Pro každé $x\in\boldsymbol{R}^n$ a $k=1,\ldots,n$ platí $D_kf(x)=k$. Funkce f tedy má spojité parciální derivace. To znamená, že je diferencovatelná a platí $Df\left(x_0\right)(h)=h^1+2h^2+\ldots+nh^n$.

Třetí možnost: Funkce f je lineární. Je tedy diferencovatelná v každém bodě a platí $Df\left(x_0\right)=f$.

4. *Dokažte, že funkce* $f\left(x^1,x^2\right)=\left(x^1\right)^2+x^2\cos x^1$ *je diferencovatelná v bodě* $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$.

Řešení. Z příkladu 2 plyne, že existuje-li derivace funkce f v bodě $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$, platí

$$Df\left(\tfrac{\pi}{2},1\right)\left(h^1,h^2\right)=(\pi-1,0)\begin{pmatrix}h^1\\h^2\end{pmatrix}=(\pi-1)h^1.$$

Stačí tedy provést následující výpočet:

$$
\begin{aligned}
0 &\le \lim_{h\to 0} \frac{\left|\left(\frac{\pi}{2}+h^1\right)^2+\left(1+h^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+h^1\right)-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\cos\frac{\pi}{2}-(\pi-1)h^1\right|}{\sqrt{\left(h^1\right)^2+\left(h^2\right)^2}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left|\left(h^1\right)^2-\left(1+h^2\right)\sin h^1+h^1\right|}{\sqrt{\left(h^1\right)^2+\left(h^2\right)^2}} \\
&\le \lim_{h\to 0} \frac{\left(h^1\right)^2}{\sqrt{\left(h^1\right)^2+\left(h^2\right)^2}} + \lim_{h\to 0} \frac{\left|\sin h^1+h^1\right|}{\sqrt{\left(h^1\right)^2+\left(h^2\right)^2}} + \lim_{h\to 0} \frac{\left|h^2\sin h^1\right|}{\sqrt{\left(h^1\right)^2+\left(h^2\right)^2}} \\
&\le \lim_{h^1\to 0} \frac{\left(h^1\right)^2}{\left|h^1\right|} + \left|\lim_{h^1\to 0} \frac{\sin h^1-h^1}{h^1}\right| + \lim_{h^2\to 0}\left|h^2\right| \cdot \lim_{h^1\to 0} \frac{\left|\sin h^1\right|}{\left|h^1\right|} = 0+0+0\cdot 1 = 0.
\end{aligned}
$$

Druhá možnost: Jelikož funkce $D_1 f\left(x^1,x^2\right)=2x^1-x^2\sin x^1$ a $D_2 f\left(x^1,x^2\right)=\cos x^1$ jsou spojité, je funkce f spojitě diferencovatelná, a tedy i diferencovatelná.

5. *Rozhodněte, zda funkce* $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ *daná předpisem*

$$
f\left(x^1,x^2\right)=\begin{cases} x^1, & \textit{jestliže } \left|x^1\right|\le\left|x^2\right|, \\ x^2, & \textit{jestliže } \left|x^1\right|>\left|x^2\right|, \end{cases}
$$

je diferencovatelná v bodě $(0,0)$.

Řešení. Platí $f\left(x^1,0\right)=f\left(0,x^2\right)=0$, máme tedy $D_1 f(0,0)=D_2 f(0,0)=0$. V případě, že funkce f je diferencovatelná, tedy musí být $Df(0,0)=0$. Jelikož však

$$
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f\left(x^1,x^2\right)}{\sqrt{\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2}}
$$

neexistuje (stačí položit $x^1=x^2$), není funkce f v bodě $(0,0)$ diferencovatelná.

6. *Najděte parciální derivace funkce* $g\circ f$, *jestliže*

$$
f\left(x^1,x^2,x^3\right)=\begin{pmatrix} 2x^1x^2x^3 \\ \left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2-\left(x^3\right)^2 \end{pmatrix}, \qquad g\left(x^1,x^2\right)=\begin{pmatrix} x^1x^2 \\ \dfrac{x^1}{x^2} \end{pmatrix}.
$$

Řešení. Platí

$$
(g\circ f)\left(x^1,x^2,x^3\right)=g\left(2x^1x^2x^3,\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2-\left(x^3\right)^2\right)=\begin{pmatrix} 2x^1x^2x^3\left(\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2-\left(x^3\right)^2\right) \\ \dfrac{2x^1x^2x^3}{\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2-\left(x^3\right)^2} \end{pmatrix}.
$$

Lze tedy postupovat přímým výpočtem. My ale využijeme větu o derivaci složené funkce:

$$
\begin{aligned}
&D_1 f^1\left(x^1,x^2,x^3\right)=2x^2x^3, && D_2 f^1\left(x^1,x^2,x^3\right)=2x^1x^3, && D_3 f^1\left(x^1,x^2,x^3\right)=2x^1x^2, \\
&D_1 f^2\left(x^1,x^2,x^3\right)=2x^1, && D_2 f^2\left(x^1,x^2,x^3\right)=2x^2, && D_3 f^2\left(x^1,x^2,x^3\right)=-2x^3, \\
&D_1 g^1\left(x^1,x^2\right)=x^2, && D_2 g^1\left(x^1,x^2\right)=x^1, \\
&D_1 g^2\left(x^1,x^2\right)=\frac{1}{x^2}, && D_2 g^2\left(x^1,x^2\right)=-\frac{x^1}{\left(x^2\right)^2},
\end{aligned}
$$

máme tedy

$$
f'(1,1,1)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad g'(2,1)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.
$$

Jelikož parciální derivace funkcí f a g jsou spojité, jsou tyto funkce diferencovatelné a

$$
(g\circ f)'(1,1,1)=g'\left(f(1,1,1)\right)\cdot f'(1,1,1)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}.
$$

Je tedy

$D_1(f\circ g)^1(1,1,1)=6$, $D_2(f\circ g)^1(1,1,1)=6$, $D_3(f\circ g)^1(1,1,1)=-2$,

$D_1(f\circ g)^2(1,1,1)=-2$, $D_2(f\circ g)^2(1,1,1)=-2$, $D_3(f\circ g)^2(1,1,1)=6$.

7. *Vyjádřete pomocí parciálních derivací diferencovatelných zobrazení* $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ *a* $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ *funkci* $(f\circ g)''$. *Do výsledku dosaďte zobrazení*

$$f\left(x^1,x^2\right)=\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2,\qquad g(x)=\begin{pmatrix}x\sin x\\ x\cos x\end{pmatrix}.$$

Řešení. Platí

$$\begin{aligned}
(f\circ g)'' &= \left((f\circ g)'\right)' = \left((D_1f)\circ g\cdot\left(g^1\right)' + (D_2f)\circ g\cdot\left(g^2\right)'\right)'\\
&= \left((D_{11}f)\circ g\cdot\left(g^1\right)' + (D_{12}f)\circ g\cdot\left(g^2\right)'\right)\left(g^1\right)' + (D_1f)\circ g\cdot\left(g^1\right)''\\
&+\left((D_{21}f)\circ g\cdot\left(g^1\right)' + (D_{22}f)\circ g\cdot\left(g^2\right)'\right)\left(g^2\right)' + (D_2f)\circ g\cdot\left(g^2\right)''\\
&= (D_{11}f)\circ g\cdot\left(g^1\right)'^2 + 2(D_{12}f)\circ g\cdot\left(g^1\right)'\cdot\left(g^2\right)' + (D_{22}f)\circ g\cdot\left(g^2\right)'^2\\
&+(D_1f)\circ g\cdot\left(g^1\right)'' + (D_2f)\circ g\cdot\left(g^2\right)''.
\end{aligned}$$

Zkouška pro zadaná zobrazení: Platí $f\circ g(x)=x^2$, tedy $(f\circ g)''=2$. Dosazení do výsledného vzorce:

$D_1f\left(x^1,x^2\right)=2x^1$, $(D_1f)(g(x))=2x^1\sin x^1$,

$D_2f\left(x^1,x^2\right)=2x^2$, $(D_2f)(g(x))=2x^1\cos x^1$,

$D_{11}f\left(x^1,x^2\right)=D_{22}f\left(x^1,x^2\right)=2$, $(D_{11}f)(g(x))=(D_{22}f)(g(x))=2$,

$D_{12}f\left(x^1,x^2\right)=D_{21}f\left(x^1,x^2\right)=0$, $(D_{12}f)(g(x))=(D_{21}f)(g(x))=0$,

$\left(g^1\right)'(x)=\sin x+x\cos x$, $\left(g^1\right)''(x)=2\cos x-x\sin x$,

$\left(g^2\right)'(x)=\cos x-x\sin x$, $\left(g^2\right)''(x)=-2\sin x-x\cos x$.

Celkově tedy dostáváme

$$\begin{aligned}
&(D_{11}f)(g(x))\cdot\left(g^1\right)'^2(x)+2(D_{12}f)(g(x))\cdot\left(g^1\right)'(x)\cdot\left(g^2\right)'(x)+(D_{22}f)(g(x))\cdot\left(g^2\right)'^2(x)\\
&+(D_1f)(g(x))\cdot\left(g^1\right)''(x)+(D_2f)(g(x))\cdot\left(g^2\right)''(x)\\
&=2(\sin x+x\cos x)^2+2\cdot 0+2(\cos x-x\sin x)^2\\
&+2x\sin x(2\cos x-x\sin x)+2x\cos x(-2\sin x-x\cos x)\\
&=2\left(\sin^2 x+2x\sin x\cos x+x^2\cos^2 x+\cos^2 x-2x\sin x\cos x+x^2\sin^2 x\right.\\
&\left.+2x\sin x\cos x-x^2\sin^2 x-2x\sin x\cos x-x^2\cos^2 x\right)=2.
\end{aligned}$$

Cvičení

1. Najděte parciální derivace funkce $f\left(x^1,x^2\right)=\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2$ v bodě $x_0=(1,2)$.

2. Najděte parciální derivace funkce f, jestliže

a) $f\left(x^1,x^2,x^3\right)=\mathrm{e}^{x^1x^2}\sin^2\left(x^2x^3\right)+\left(x^2\right)^2\ln\left(x^1x^2x^3\right)$,

b) $f(x^1,x^2)=e^{x^1}\sin x^2$, c) $f(x^1,x^2)=\dfrac{x^1}{x^2}+\dfrac{x^2}{x^1}$,

d) $f(x^1,x^2)=\operatorname{arctg}\dfrac{x^1}{x^2}$, e) $f(x^1,x^2)=\dfrac{1}{\sqrt{x^1}-\sqrt{x^2}}$,

f) $f(x^1,x^2)=\ln\left(x^1-\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}\right)$, g) $f(x^1,x^2,x^3)=(x^1)^{\frac{1}{x^2}}x^3$,

h) $f(x^1,x^2,x^3)=(x^1)^{(x^2)^{x^3}}$.

3. Najděte $D_2 f(1,x^2)$, jestliže

$$f(x^1,x^2)=(x^1)^{(x^1)^{(x^1)^{(x^1)^{x^2}}}}+(\ln x^1)\left(\operatorname{arctg}\left(\operatorname{arctg}\left(\operatorname{arctg}\left(\sin\left(\cos\left(x^1x^2\right)\right)-\ln\left(x^1+x^2\right)\right)\right)\right)\right).$$

4. Nechť $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ je spojitá funkce. Najděte parciální derivace funkcí

a) $f(x^1,x^2)=\int_{x^2}^{x^1}g$, b) $f(x^1,x^2)=\int_0^{x^1x^2}g$.

5. Pomocí definice derivace dokažte diferencovatelnost funkce $f(x^1,x^2)=(x^1)^2-2x^1+(x^2)^2$ v bodě $(1,0)$ a určete $Df(1,0)$.

6. Je dána funkce $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^4-2x$. Vypočtěte $Df(2)(x)$, $Df(x)(2)$.

7. Uveďte příklad funkce $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$, která má obě parciální derivace v bodě $(0,0)$ rovny 0 a přitom zde není diferencovatelná.

8. Rozhodněte, které z funkcí

$$f(x^1,x^2)=\begin{cases}\dfrac{x^1x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2}, & (x^1)^2+(x^2)^2\neq 0,\\ 0, & (x^1)^2+(x^2)^2=0,\end{cases}$$

$$f(x^1,x^2)=\begin{cases}(x^1)^2+(x^2)^2\sin\dfrac{1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}, & (x^1,x^2)\neq(0,0),\\ 0, & (x^1,x^2)=(0,0),\end{cases}$$

$$f(x^1,x^2)=\max{}^2\left(|x^1|,|x^2|\right),$$

jsou direfencovatelné v bodě $(0,0)$.

9. Je dáno spojitě diferencovatelné zobrazení $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$. Dokažte, že množina všech $x\in\boldsymbol{R}^n$ takových, že $Df(x)$ je surjektivní, je otevřená.

10. Nechť $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ je lineární zobrazení. Dokažte, že $Df(x)=f$. Na základě toho dokažte, že pro libovolná diferencovatelná zobrazení $g,h:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ a bod $x\in\boldsymbol{R}^n$ platí:

$$D(g+h)(x)=Dg(x)+Dh(x),$$

$$D(g)(x)=\left(Dg^1(x),\ldots,Dg^m(x)\right),$$

$$D(g-Dg(x))(x)=0.$$

11. Pro diferencovatelné zobrazení $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ platí

$$f(0,0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\qquad f'(0,0)=\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}.$$

Roznodněte, zda je funkce $g\circ f$, kde $g(x^1,x^2)=(x^1)^2-(x^2)^2$, diferencovatelná. V kladném případě určete $D(g\circ f)(0,0)$.

12. Najděte parciální derivace funkcí

a) $F(x^1,x^2)=f\left(g(x^1)h(x^2),g(x^1)+h(x^2)\right)$, b) $F(x^1,x^2)=f\left(x^1,g(x^1),h(x^1,x^2)\right)$,

c) $F(x^1,x^2)=f\left(g(x^1,x^2),g(x^2,x^1)\right)$, d) $F(x^1,x^2)=f\left(x^1,x^2,x^1\right)$,

e) $F(x^1,x^2,x^3)=f\left(g(x^1+x^2),h(x^1+x^3)\right)$, f) $F(x^1,x^2)=f\left((x^1)^{x^2},(x^2)^{x^3},(x^3)^{x^1}\right)$.