**Matematický ústav Slezské univerzity
v Opavě**

VYBRANÉ PARTIE Z MATEMATICKÉ ANALÝZY I CVIČEBNICE

**Karel Hasík
Zdeněk Kočan
Petra Nábělková**

Obsah

1 Funkce n proměnných - základní pojmy **6**
1.1 Definice a věty . . . 6
1.2 Řešené příklady . . . 7
1.3 Úlohy k samostatnému řešení . . . 15

2 Limita a spojitost **16**
2.1 Definice a věty . . . 16
2.2 Řešené příklady . . . 18
2.3 Úlohy k samostatnému řešení . . . 24

3 Parciální derivace **25**
3.1 Definice a věty . . . 25
3.2 Řešené příklady . . . 26
3.3 Úlohy k samostatnému řešení . . . 32

4 Diferenciál funkce, Taylorův polynom **33**
4.1 Definice a věty . . . 33
4.2 Řešené příklady . . . 35
4.3 Úlohy k samostatnému řešení . . . 46

5 Parciální derivace složených funkcí **47**
5.1 Definice a věty . . . 47
5.2 Řešené příklady . . . 48
5.3 Úlohy k samostatnému řešení . . . 53

6 Derivace v daném směru **54**
6.1 Definice a věty . . . 54
6.2 Řešené příklady . . . 55
6.3 Úlohy k samostatnému řešení . . . 59

7 Implicitní funkce **60**
7.1 Definice a věty . . . 60
7.2 Řešené příklady . . . 61
7.3 Úlohy k samostatnému řešení . . . 69

8 Volné extrémy funkcí n proměnných **70**
8.1 Definice a věty 70
8.2 Řešené příklady 72
8.3 Úlohy k samostatnému řešení 77

9 Vázané extrémy **78**
9.1 Definice a věty 78
9.2 Řešené příklady 79
9.3 Úlohy k samostatnému řešení 89

10 Globální extrémy - příklady **90**
10.1 Definice a věty 90
10.2 Řešené příklady 90
10.3 Úlohy k samostatnému řešení 99

Předmluva

Tato sbírka řešených příkladů doplňuje učební text Vybrané partie z matematické analýzy a spolu s ním pokrývá základní problematiku diferenciálního počtu funkcí více proměnných.

Tento studijní text vznikl jako podpůrný materiál pro studenty Matematického ústavu Slezské univerzity v Opavě. Jeho účelem je napomoci kvalitnějšímu procvičení příslušné látky probírané na přednáškách ať už v rámci výuky ve cvičeních, a nebo při samostatném studiu. Prostudování řešených a propočtení neřešených příkladů by mělo studentům umožnit lépe pochopit a aplikovat získané teoretické poznatky, což je nezbytný krok při studiu každé matematické disciplíny.

Studijní text je určen posluchačům bakalářského studia oborů Matematické metody v ekonomice a Aplikovaná matematika při řešení krizových situací. Nemusí být tedy zcela postačující pro studenty odborného studia matematiky. Jedná se o látku, kterou by měli studenti zvládnout obvykle v průběhu zimního semestru druhého ročníku.

Věříme, že naše snaha pomoci studentům lépe zvládnout látku z diferenciálního počtu funkcí více proměnných bude úspěšná.

Stručný náhled studijní opory

Námi vytvořená sbírka řešených příkladů pokrývá základy teorie, která se probírá v diferenciálním počtu funkcí více proměnných. Pro studium předpokládáme znalost diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné a některé pojmy z lineární algebry a geometrie.

Usilovali jsme o to, aby alespoň do jisté míry vznikl text, který by umožnil studentům řešit úlohy bez dalších studijních pomůcek. Z tohoto důvodu jsou na začátku každé kapitoly uvedeny základní definice a věty, ze kterých při řešení úloh vycházíme. Každá kapitola dále obsahuje nejdříve deset řešených příkladů, které dostatečně ilustrují způsob, jakým lze aplikovat příslušnou teoretickou látku. Prostudování těchto příkladů by mělo studentům umožnit lépe pochopit a aplikovat získané teoretické poznatky. Dále je v každé kapitole uvedeno deset dalších příkladů s výsledky, které slouží k následnému samostatnému studiu.

1 Funkce n proměnných - základní pojmy

1.1 Definice a věty

Definice 1.1. Množinu

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{[x_1, x_2, \ldots, x_n]; x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

nazýváme **n-rozměrným reálným prostorem**. **Bodem** v n-rozměrném reálném prostoru nazýváme uspořádanou n-tici reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Píšeme $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$.
Dále nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Pak každé zobrazení $f : M \mapsto \mathbb{R}^n$ (množiny M do množiny) nazýváme **reálnou funkcí n reálných proměnných**. Množinu M nazýváme **definičním oborem** funkce f a značíme ji symbolem $\mathcal{D}f$.

Definice 1.2. Je-li f funkce dvou proměnných definovaná na množině M, pak **grafem** funkce f nazýváme množinu bodů tvaru

$$G = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; [x, y] \in M, z = f(x, y)\}.$$

Definice 1.3. **Úrovňovými křivkami** neboli **vrstevnicemi** funkce f dvou proměnných rozumíme množiny bodů tvaru:

$$v_k = \{[x, y] \in \mathcal{D}f; f(x, y) = k\},$$

kde k je daná reálná konstanta.

Definice 1.4. **Vzdáleností (metrikou)** v n-rozměrném prostoru nazýváme funkci ρ, která libovolným dvěma bodům z $\mathbb{R}^n$ přiřazuje nějakým způsobem jejich vzdálenost $\rho(x, y)$ tak, že jsou splněny následující axiomy

- $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\rho(x, y) \geq 0$, přičemž $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}^n$ platí $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Definice 1.5. Množinu všech bodů prostoru $\mathbb{R}^n$, jejichž vzdálenost ρ od daného bodu x^* je menší než dané číslo $\delta > 0$, nazýváme **δ-okolím** bodu x^* a značíme jej $\mathcal{O}(x^*, \delta)$, popř. jen $\mathcal{O}(x^*)$.

Množinu $P(x^*, \delta) = \mathcal{O}(x^*, \delta) \setminus \{x^*\}$ nazýváme **prstencovým (redukovaným, ryzím) okolím** bodu x^*.

Definice 1.6. Bod $x^* \in \mathbb{R}^n$ se nazývá

- **vnitřní bod** množiny $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, právě když existuje $\mathcal{O}(x^*)$ takové, že $\mathcal{O}(x^*) \subseteq \Omega$
- **vnější bod** množiny $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, právě když existuje $\mathcal{O}(x^*)$ takové, že $\mathcal{O}(x^*) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega$
- **hraniční bod** množiny $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, právě když $\forall \mathcal{O}(x^*)$ platí $\mathcal{O}(x) \cap \Omega \neq \emptyset \wedge \mathcal{O}(x) \cap \mathbb{R}^n \setminus \Omega \neq \emptyset$.

Definice 1.7. Množina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá

- **otevřená**, právě když každý její bod je vnitřním bodem
- **uzavřená**, právě když obsahuje všechny své hraniční body
- **souvislá**, právě když každé dva její body lze spojit lomenou čarou, jejíž všechny body leží v Ω.

Množinu, která je zároveň otevřená a souvislá, nazýváme **oblastí**. Je-li daná množina uzavřená a souvislá, nazýváme ji **uzavřenou oblastí**.

1.2 Řešené příklady

Příklad 1.8. Určete definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{\sqrt{2x+3y-6}}{y+2}$. Definiční obor znázorněte graficky.

Řešení. Výraz, kterým je daná funkce f, bude mít smysl tehdy, jestliže jmenovatel je různý od nuly a výraz pod od mocninou je nezáporný. Definičním oborem funkce f je tedy množina

$$\mathcal{D}f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x + 3y - 6 \geq 0, y \neq -2\}.$$

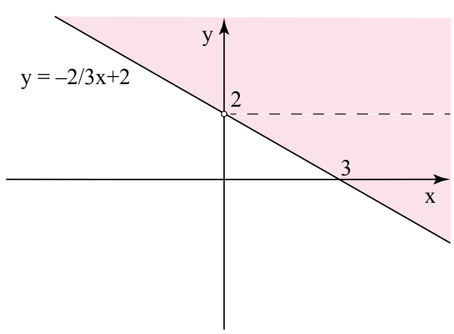
Odtud vidíme, že v definičním oboru nebude ležet přímka $y = -2$. Další vyznačenou přímkou, kterou využijeme ke grafickému znázornění definičního oboru funkce f, je přímka $y = -\frac{2}{3}x + 2$, přičemž nerovnost $2x + 3y - 6 \geq 0$ vymezující definiční obor funkce f je splněna pro všechny body ležící nad přímkou $y = -\frac{2}{3}x + 2$ a na ní. Jestliže z této ploroviny vypustíme body, jejichž y-ová souřadnice je různá od 2, obdržíme definiční obor funkce f (viz obrázek 1).

Příklad 1.9. Určete definiční obor funkce $f(x, y) = \ln \sin x$. Definiční obor graficky znázorněte.

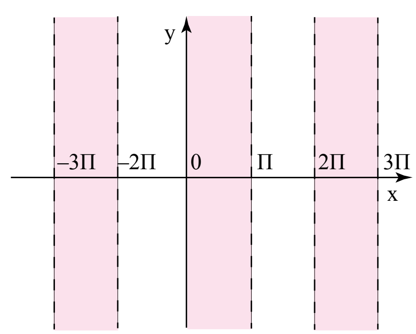
Řešení. Funkce logaritmus je definovaná pro hodnoty větší než 0. Vztah, kterým je funkce f dána, bude mít tedy smysl tehdy, jestliže $\sin x > 0$. Na základě vlastností funkce sinus víme, že tato nerovnost je splněna, jestliže $2k\pi < x < (2k + 1)\pi$, kde k je celé číslo. Hodnoty proměnné y mohou být libovolné. Definičním oborem je tedy množina

$$\mathcal{D}f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2k\pi < x < (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Graficky lze množinu $\mathcal{D}f$ názornit pomocí přímek $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, přičemž body ležící mezi přímkami patří do množiny $\mathcal{D}f$ tehdy, jestliže je pruh zleva vymezen přímkou $x = k\pi$, kde k je sudé a zprava přímkou $x = k\pi$, kde k je liché (viz obrázek 2).



Obrázek 1: Definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{\sqrt{2x+3y-6}}{y+2}$



Obrázek 2: Definiční obor funkce $f(x, y) = \ln \sin x$

Příklad 1.10. Určete definiční obor funkce $f(x,y) = 2+\sqrt{x^2-y^2}$. Definiční obor graficky znázorněte.

Řešení. Výraz, kterým je daná funkce f, bude mít smysl tehdy, jestliže je výraz pod od mocninou nezáporný. Definičním oborem funkce f je tedy množina

$$\mathcal{D}f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 \geq 0\}.$$

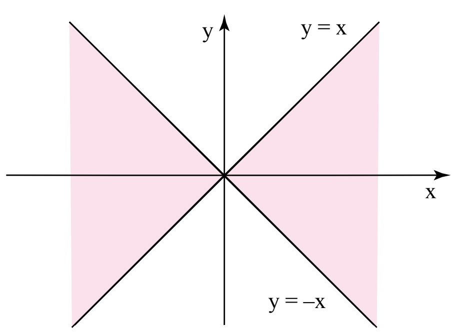
Nerovnost $y^2 \leq x^2$ je ekvivalentní s nerovností $-|x| \leq y \leq |x|$. To znamená, že definičním oborem je množina bodů ležících mezi grafy funkcí $y = |x|$ a $y = -|x|$, jak je znázorněno na obrázku 3.

Příklad 1.11. Určete definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{y-x}$. Definiční obor graficky znázorněte.

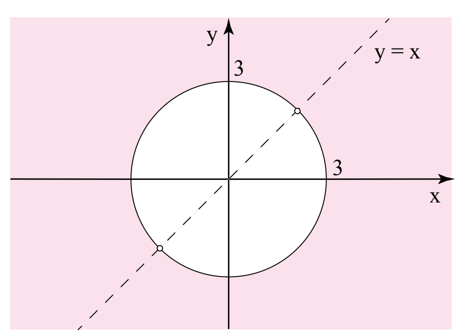
Řešení. Výraz, kterým je daná funkce f, bude mít smysl tehdy, jestliže jmenovatel je různý od nuly a výraz pod od mocninou je nezáporný. Definičním oborem funkce f je tedy množina

$$\mathcal{D}f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - 9 \geq 0, y \neq x\}.$$

V definičním oboru nebude ležet přímka $y = x$. Dále víme, že nerovnost $x^2 + y^2 \geq 9$ je splněna pro všechny body ležící vně kružnice se středem v počátku a poloměrem 3 a na ní. Ve výsledku dostáváme množinu, která je znázorněna na obrázku 4.



Obrázek 3: Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{2x+3y-6}}{y+2}$



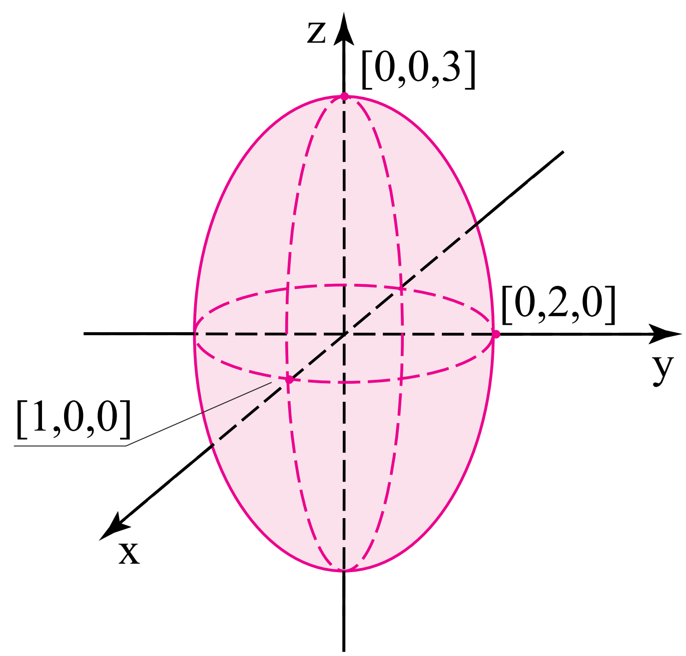
Obrázek 4: Definiční obor funkce $f(x,y) = \ln \sin x$

Příklad 1.12. Určete definiční obor funkce, která je předepsána vztahem $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2/4 - z^2/9}$. Definiční obor graficky znázorněte.

Řešení. Výraz, kterým je daná funkce f, bude mít smysl tehdy, jestliže je výraz pod od mocninou nezáporný. Definičním oborem funkce f je tedy množina

$$\mathcal{D}f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 1 - x^2 - y^2/4 - z^2/9 \geq 0\}.$$

Rovnice $x^2 + y^2/4 + z^2/9 = 1$ je možná čtenáři něčím povědomá. Mohla by mu svým tvarem připomínat rovnici elipsy, kdyby ovšem neobsahovala navíc proměnnou z. Uvědomíme-li si, že přidáním třetího rozměru do rovnice kružnice (což je speciální případ elipsy) získáme rovnici sféry, tj. povrchu koule, není už tak těžké nahlédnout, že rovněž z rovnice elipsy vznikne přidáním proměnné z rovnice popisující povrch tělesa nazývaného elipsoid. Definiční obor námi zkoumané funkce ovšem zahrnuje také všechny body ležící uvnitř elipsoidu a je znázorněn na obrázku 5.



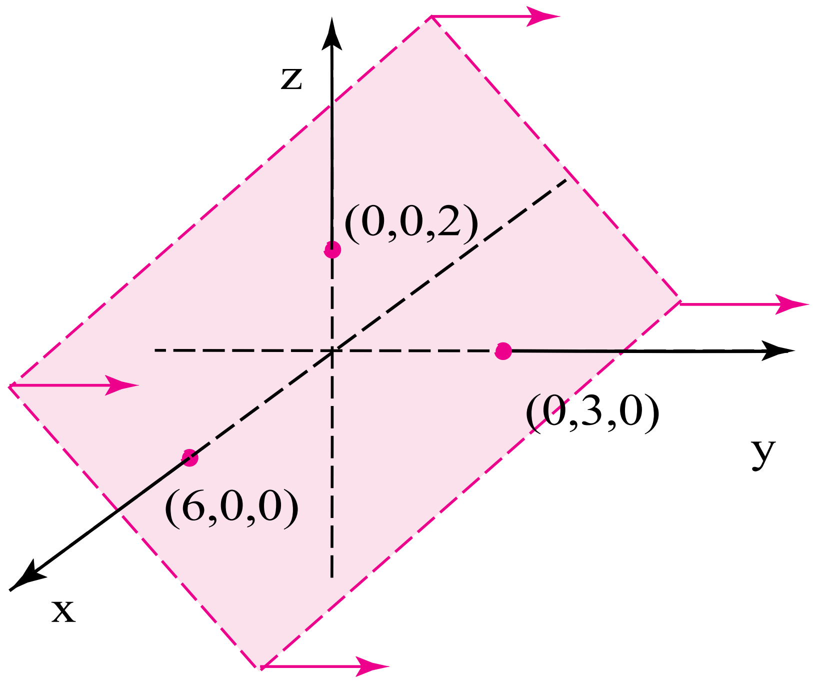
Obrázek 5: Definiční obor funkce $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2/4 - z^2/9}$

Příklad 1.13. Určete definiční obor funkce $f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z - 6)$. Definiční obor graficky znázorněte.

Řešení. Výraz, kterým je daná funkce f, bude mít smysl tehdy, jestliže je výraz uvnitř logaritmické funkce kladný. Definičním oborem funkce f je tedy množina

$$\mathcal{D}f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y + 3z > 6\}.$$

Rovnice $x + 2y + 3z = 6$ je rovnice roviny. To znamená, že definičním oborem funkce f je poloprostor nad touto rovinou, který ji ale nezahrnuje. Graficky je situace zachycena na obrázku 6.

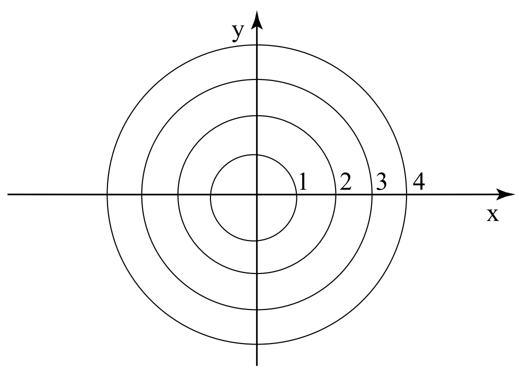


Obrázek 6: Definiční obor funkce $f(x, y, z) = \ln x + 2y + 3z - 6$

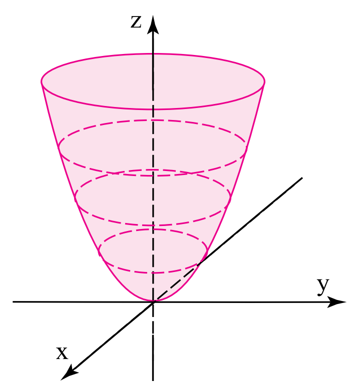
Příklad 1.14. Nakreslete úrovňové křivky funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ pro hodnoty $k = 1, 4, 9, 16$. Na základě obdrženého výsledku se pokuste nakreslit graf funkce.

Řešení. Úrovňové křivky mají tvar $x^2+y^2=k$, $k=1,4,9,16$. Jedná se tedy o kružnice s poloměry $r=1,2,3,4$.

Chceme-li nyní nakreslit graf funkce, tak především konstatujeme, že jejím definičním oborem je celé $\mathbb{R}^2$. Dále ve třírozměrném prostoru znázorníme jednotlivé kružnice v příslušných výškách. Kružnice o poloměru 1 bude tedy ležet ve výšce 1, tj. v rovině $z=1$, kružnice o poloměru bude ležet v rovině $z=4$ atd. Plocha, která představuje graf funkce, je vlastně tvořena nespočetně mnoha kružnicemi ležícími nad sebou, jejichž poloměr se postupně zvětšuje. Nazýváme ji paraboloid. Vrstevnice a graf funkce jsou znázorněny na obrázcích 7, 8.



Obrázek 7: Vrstevnice funkce $f(x,y)=x^2+y^2$

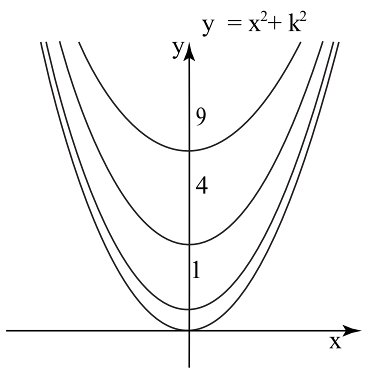


Obrázek 8: Graf funkce dané vztahem $f(x,y)=x^2+y^2$

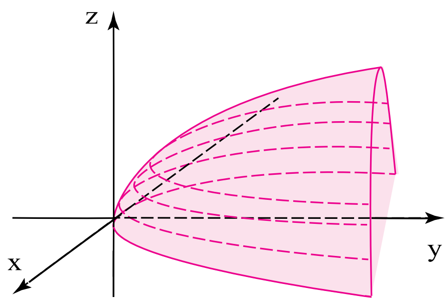
Příklad 1.15. Nakreslete úrovňové křivky funkce $f(x,y)=\sqrt{x-y^2}$ pro hodnoty $k=0,1,2,3$. Na základě obdržených vrstevnic nakreslete graf funkce f.

Řešení. Nejdříve poznamenejme, že definičním oborem funkce $f=(x,y)$ je množina $\mathcal{D}f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x\geq y^2\}$. Úrovňové křivky mají nyní tvar $\sqrt{y-x^2}=k$, neboli $y=x^2+k^2, k=1,2,3,4$. Jedná se tedy o soustavu parabol Všiměme si, že parabola $y=x^2$ vymezující definiční obor je zároveň vrstevnicí pro $k=0$.

Jestliže nyní znázorníme v třírozměrném prostoru vrstevnici v příslušné výšce, získáme určitou představu o tom, jak by mohl vypadat graf námi zkoumané funkce. Čtenáři ale nemusí být úplně zřejmé, že se jedná o kvalitativně stejnou plochu jako v předcházejícím příklahu, tj. o paraboloid, přesněji řečeno o jeho polovinu ležící nad rovinou xy. Druhá část paraboloidu by byla dána funkčním vztahem $f(x,y) = -\sqrt{y-x^2}$. Vrstevnice a graf funkce jsou znázorněny na obrázcích 9, 10.



Obrázek 9: Vrstevnice funkce $f(x,y) = \sqrt{y-x^2}$



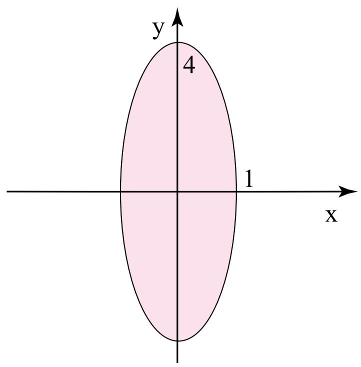
Obrázek 10: Graf funkce dané vztahem $f(x,y) = \sqrt{y-x^2}$

Příklad 1.16. Rozhodněte, zda definiční obor funkce předepsané vztahem $f(x,y) = \sqrt{(1-x^2-y^2/16)}$ je otevřenou či uzavřenou množinou v $\mathbb{R}^2$. Určete její vnitří a hraniční body. Ověřte rovněž, zda definiční obor funkce je souvislá množina.

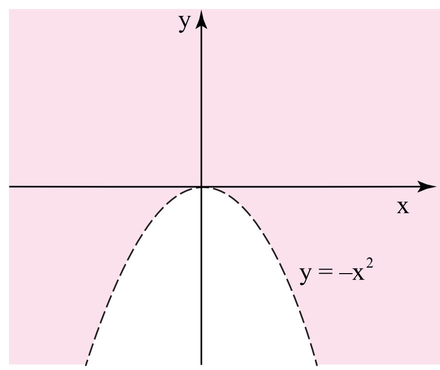
Řešení. Definičním oborem funkce $f(x,y) = \ln(x^2+y)$ je množina bodů tvaru

$$\mathcal{D}f = \{(x,y) \geq \mathbb{R}^2; 1 - x^2 - y^2/16 \geq 0\}.$$

Rovnice $x^2 + y^2/16 = 1$ je rovnicí elipsy se středem v počátku, jejíž hlavní poloosa leží na ose y a má délku 4. Vedlejší poloosa ležící na ose x má délku 1. Nerovnost vymezující definiční obor funkce dále zahrnuje všechny body ležící uvnitř této elipsy viz obrázek . Vybereme-li nyní kterýkoli bod ležící vně či uvnitř elipsy, jsme schopni k němu nalézt bod na elipse, který má od námi zvoleného bodu nejmenší vdálenost. Označíme-li tuto vzdálenost d pak kružnice o poloměru $r < d$ leží celá vně, resp. uvnitř elipsy. Z výše uvedeného je jíž zřejmé, že všechny body ležící uvnitř elipsy jsou body vnitřními, zatímco body ležící vně elipsy jsou vnější body definičního oboru funkce. Samotná elipsa je pak množinou hraničních bodů definičního oboru naší funkce. Protože body ležící na elipse patří rovněž do definičního oboru funkce f, je množina $\mathcal{D}f$ uzavřená. Její souvislost je zřejmá a jedná se tedy o uzavřenou oblast.



Obrázek 11: Definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{(1 - x^2 - y^2/16)}$



Obrázek 12: Definiční obor funkce $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$

Příklad 1.17. Rozhodněte, zda definiční obor funkce $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$ je otevřenou či uzavřenou množinou v $\mathbb{R}^2$. Určete její vnitří a hraniční body. Ověřte rovněž, zda definiční obor funkce je souvislá množina.

Řešení. Definičním oborem funkce $f(x, y) = \ln(x^2+y)$ je možina bodů tvaru

$$\mathcal{D}f = \{(x, y) \geq \mathbb{R}^2; y > -x^2\}.$$

Tato množina je vymezena grafem paraboly $y = -x^2$, přičemž body ležící na této parabole nepatří do definičního bodu funkce $f(x, y)$. Vnitřní body množiny $\mathcal{D}f$ jsou body ležící nad grafem paraboly $y = -x^2$ a vnější body množiny $\mathcal{D}f$ jsou body ležící pod grafem funkce $y = -x^2$.

Jelikož body paraboly $y = -x^2$ jsou hraničními body množiny $\mathcal{D}f$ vidíme, že tato množina je otevřená. Je rovněž souvislá, protože její dva libovolné body lze spojit lomenou čarou tvořenou nejvýše dvěma úsečkami. Např. body ze 3. a 4. kvadrantu náležící množině $\mathcal{D}f$ spojíme prostřednictvím bodu ležícího dostatečně vysoko na kladné poloose y. Z toho vyplývá, že definiční obor funkce f je oblastí.

1.3 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 1.1. Najděte definiční obor funkce $f(x,y) = e^{x^2-y}$.

Cvičení 1.2. Najděte definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{1-x^2+3y^2}$.

Cvičení 1.3. Najděte definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$.

Cvičení 1.4. Najděte definiční obor funkce dané vztahem $f(x,y,z) = 1/xyz$.

Cvičení 1.5. Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce dané vztahem $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-4}}{x}$.

Cvičení 1.6. Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce dané vztahem $f(x,y) = \ln(xy-3)$.

Cvičení 1.7. Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce dané vztahem $f(x,y) = \arcsin(x+y)$.

Cvičení 1.8. Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce dané vztahem $f(x,y,z) = \sqrt{9-x^2-y^2-z^2}$.

Cvičení 1.9. Graficky znázorněte vstevnice funkce $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$.

Cvičení 1.10. Graficky znázorněte vstevnice funkce $f(x,y) = 9x^2+y^2$.

2 Limita a spojitost

2.1 Definice a věty

Definice 2.1. Bod $P \in \mathcal{D}f$ se nazývá **hromadný bod** definičního oboru $\mathcal{D}f$, jestliže každé jeho ryzí okolí $\mathcal{O}(P)$ obsahuje alespoň jeden bod této množiny $\mathcal{D}f$, tj. $\mathcal{O}(P) \cap \mathcal{D}f \neq \emptyset$.

Definice 2.2. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce, $P = [x_0, y_0] \in (\mathbb{R}^*)^2$ je hromadný bod definičního oboru funkce f. Řekneme, že $L \in \mathbb{R}^*$ je **limitou** funkce f v bodě $[x_0, y_0]$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(P)$ bodu P takové, že pro každý bod $X = [x, y] \in \mathcal{O}(P) \cap \mathcal{D}f$ platí $f(x, y) \in \mathcal{O}(L)$. Píšeme

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = L, \text{ resp. } \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = L, \text{ resp. } \lim_{X\to P} f(X) = L. \quad (2.1)$$

Definice 2.3. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v hromadném bodě P svého definičního oboru $\mathcal{D}f$ **limitu** $L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému číslu $\epsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechny body $X \in \mathcal{D}f$, pro jejichž vzdálenost $\rho(P, X)$ platí nerovnost $0 < \rho(P, X) < \delta$, je splněna nerovnost $|f(X) - L| < \epsilon$. Píšeme

$$\lim_{X\to P} f(X) = L.$$

Věta 2.4. *Funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ nejvýše jednu limitu.*

Věta 2.5. *Nechť $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = 0$ a funkce g je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu $[x_0, y_0]$ (tj., existuje konstanta $K \geq 0$ tak, že $|g(x,y)| \leq K$ v tomto ryzím okolí). Pak*

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} (f(x,y) \cdot g(x,y)) = 0.$$

Věta 2.6. *Nechť existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ bodu $[x_0, y_0]$ takové, že*

$$h(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y)$$

pro všechna $[x,y] \in \mathcal{O}(x_0,y_0)$. *Nechť existuje limita* $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} h(x,y)$ *a limita* $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} g(x,y)$ *a platí, že*

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} h(x,y) = \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} g(x,y) = L.$$

Potom existuje také limita $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y)$ *a platí*

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = L.$$

Věta 2.7. *Nechť*

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = L_1 \quad a \quad \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} g(x,y) = L_2$$

a $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. *Pak pro každé* $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} cf(x,y) = cL_1,$$

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} [c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y)] = c_1 L_1 + c_2 L_2,$$

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} [f(x,y) g(x,y)] = L_1 L_2.$$

Je-li $L_2 \neq 0$, *pak*

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Věta 2.8. *Má-li funkce* f *v bodě* $[x_0,y_0] \in (\mathbb{R}^*)^2$ *vlastní limitu, pak existuje ryzí okolí bodu* $[x_0,y_0]$, *v němž je funkce* f *ohraničená.*

Definice 2.9. Buď $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkce dvou proměnných, $[x_0,y_0]$ bod. Pak limity

$$\lim_{y\to y_0}\big(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\big) = L_1 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to x_0}\big(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\big) = L_2$$

se nazývají **postupné dvojnásobné limity**.

Věta 2.10.

1. *Nechť existují limity L_1, L_2 a $L_1 = L_2$. Pak limita L dané funkce v daném bodě $[x_0, y_0]$ nemusí existovat.*

2. *Nechť existuje limita L dané funkce v bodě $[x_0, y_0]$. Pak nemusí existovat limity L_1 a L_2.*

3. *Existují-li všechny tři limity L, L_1, L_2, pak jsou si nutně rovny.*

4. *Nechť existují L_1, L_2 a $L_1 \neq L_2$. Pak limita L neexistuje.*

Definice 2.11. Nechť $[x_0, y_0] \in \mathcal{D}f$ je hromadným bodem $\mathcal{D}f$. Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$ svého definičního oboru $\mathcal{D}f$, jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x, y) = f(x_0, y_0)$. Řekneme, že funkce f je spojitá na množině $\Omega \subset \mathcal{D}f$, je-li spojitá v každém bodě této množiny.

Věta 2.12. *Buďte funkce f, g spojité v bodě $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$. Pak jsou v tomto bodě spojité i funkce $f \pm g$, $f \cdot g$. Je-li navíc $g(x_0, y_0) \neq 0$, pak rovněž $\frac{f}{g}$ je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$.*

Věta 2.13. *Uvažujme složenou funkci $F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$. Buďte funkce g, h spojité v bodě $[x_0, y_0]$ a nechť $u_0 = g(x_0, y_0)$, $v_0 = h(x_0, y_0)$. Je-li funkce f spojitá v bodě $[x_0, y_0]$, pak je složená funkce F spojitá v bodě $[x_0, y_0]$.*

2.2 Řešené příklady

Příklad 2.14. Vypočtěte limitu funkce $f(x, y) = \frac{6x-3y-5}{x^3-y^2}$ v bodě $[-1, 5]$.

Řešení. Pokud můžeme souřadnice limitního bodu dosadit do příslušného výrazu, aniž bychom obdrželi neurčitý výraz, je hodnota limity rovna funkční hodnotě v tomto bodě. Platí tedy

$$\lim_{[x,y]\to[-1,5]} \frac{6x - 3y - 5}{x^3 - y^2} = \frac{6 \cdot (-1) - 3 \cdot 5 - 5}{(-1)^3 - 5^2} = \frac{-6 - 15 - 5}{-26} = 1.$$

Příklad 2.15. Vypočtěte limitu funkce $f(x, y) = \frac{x^2-1}{y+4}$ v bodě $[1, -4]$.

Řešení. K vyšetření limity nejdříve použijeme metodu postupných limit. Platí

$$L_1 = \lim_{y\to -4}\left(\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{y+4}\right) = \lim_{y\to -4}\frac{0}{y+4} = 0.$$

$$L_2 = \lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to -4}\frac{x^2-1}{y+4}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{0} \Rightarrow \text{ limita } L_2 \text{ neexistuje.}$$

Limita L_1 existuje, limita L_2 neexistuje. Tedy ani limita L neexistuje.
Pro ověření limity můžeme použít i jinou metodu. Použijeme metodu svazku přímek.

$$\begin{aligned} L^{**} &= \lim_{x\to 1, y=k(x-1)-4}\frac{x^2-1}{y+4} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{k(x-1)-4+4} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{k(x-1)} = \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{k} = \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Limita L^{**} závisí na k, tedy limita neexistuje.

Příklad 2.16. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$ v bodě $[2,2]$.

Řešení. Po dosazení souřadnic limitního bodu získáme neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$, proto se snažíme příslušný výraz vhodně upravit.

$$\begin{aligned} &\lim_{[x,y]\to[2,2]}\frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \lim_{[x,y]\to[2,2]}\frac{x^3-y^3}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} \\ = &\lim_{[x,y]\to[2,2]}\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x^2+y^2)(x-y)(x+y)} = \lim_{[x,y]\to[2,2]}\frac{(x^2+xy+y^2)}{(x^2+y^2)(x+y)} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Příklad 2.17. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{y^3-x^3-7}{x+y-3}$ v bodě $[1,2]$.

Řešení. K vyšetření limity nejdříve použijeme metodu postupných limit. Platí

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{y\to 2}\left(\lim_{x\to 1}\frac{y^3-x^3-7}{x+y-3}\right) = \lim_{y\to 2}\frac{y^3-8}{y-2} = \lim_{y\to 2}\frac{(y-2)(y^2+2y+4)}{y-2} = \\ &= \lim_{y\to 2}(y^2+2y+4) = (2)^2+2\cdot 2+4 = 12. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 2}\frac{y^3-x^3-7}{x+y-3}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \\ &= -\lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = -(1+1+1) = -3 \end{aligned}$$

Limity L_1, L_2 existují, ale jsou různé. Z věty o jednoznačnosti limity plyne, že daná limita neexistuje.

Příklad 2.18. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2}$ v bodě $[0,0]$.

Řešení. K vyšetření limity nejdříve použijeme metodu postupných limit. Platí

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{y^2+4}-2}{y^2} \overset{L'H}{=} \\ &\overset{L'H}{=} \lim_{y\to 0}\frac{y(y^2+4)^{-\frac{1}{2}}}{2y} == \lim_{y\to 0}\frac{(y^2+4)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{(4)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} \overset{L'H}{=} \\ &\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{(4)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Obě limity L_1, L_2 existují a jsou si rovny. O existenci limity nelze na tomto základě nic soudit. Použijeme metodu transformace do polárních souřadnic. Platí

$$\begin{aligned} L^* &= \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+}\frac{\sqrt{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2+4}-2}{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2} = \\ &= \lim_{r\to 0^+}\frac{\sqrt{r^2+4}-2}{r^2} \overset{L'H}{=} \lim_{r\to 0^+}\frac{r(r^2+4)^{-\frac{1}{2}}}{2r} = \lim_{r\to 0^+}\frac{(r^2+4)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Zadaná limita L existuje a je rovna $\frac{1}{4}$.

Příklad 2.19. Určete body nespojitosti funkce $f(x,y) = \frac{5x-4}{\sqrt{x^2-y+5}}$.

Řešení. Funkce $u = 5x-4$, $v = x^2-y+5$ jsou polynomy dvou proměnných a ty jsou spojité v celé rovině. Funkce $F = \frac{u}{\sqrt{v}}$ je spojitá v bodech, ve kterých je definována, tj. kde $x^2 - y + 5 > 0$. Tedy složená funkce $F(x,y) = \frac{5x-4}{\sqrt{x^2-y+5}}$ není spojitá pro $y \geq x^2 + 5$. Jinými slovy body nespojitosti tvoří vnitřek a okraj paraboly s vrcholem o souřadnicích $V = [0, 5]$.

Příklad 2.20. Určete body nespojitosti funkce $f(x,y) = 3x\cos(x^2+y^2-4)$.

Řešení. Položme $u = 3x$, $v = x^2 + y^2 - 4$. Jedná se o polynomy dvou proměnných a ty jsou spojité v celé rovině. Také funkce $\cos v$ je spojitá v celé rovině pro v dvou proměnných. Složená funkce $F(x,y) = 3x\cos(x^2 + y^2 - 4)$ je spojitá v každém bodě $[x, y] \in \mathbb{R}^2$.

Příklad 2.21. Určete body nespojitosti funkce $f(x,y) = \frac{3y-2x}{\ln\sqrt{6y^2-11}}$.

Řešení. Položme $u = 3y - 2x$, $v = 6y^2 - 11$. Jedná se o polynomy dvou proměnných a ty jsou spojité v celé rovině. Funkce $\ln\sqrt{v}$ je spojitá v bodech, ve kterých je definována, tj. kde $6y^2 - 11 > 0$. Funkce $\frac{u}{\ln\sqrt{v}}$ je spojitá v bodech, pro které platí $6y^2 - 11 > 0 \wedge 6y^2 - 11 \neq 1$. Druhá podmínka přibyla skrz výraz $\ln\sqrt{v}$ ve jmenovateli. Výsledkem tedy je, že složená funkce $F(x,y) = \frac{3y-2x}{\ln\sqrt{6y^2-11}}$ je nespojitá pro $y^2 \leq \frac{11}{6}$ a $y = \pm\sqrt{2}$.

Příklad 2.22. Vyšetřete, zda je funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy+3y-2x-6}{y^2x-4x+2y^2-8} & \text{pro} \quad [x,y] \neq [-1,2] \\ 1 & \text{pro} \quad [x,y] = [-1,2] \end{cases}$$

spojitá v bodě $[-1, 2]$.

Řešení. Aby byla funkce f spojitá v bodě $[-1, 2]$, musí mít v tomto bodě limitu rovnu jedné. Než začneme počítat limitu, upravíme si zadanou funkci f, tj.

$$f(x,y) = \frac{xy+3y-2x-6}{y^2x-4x+2y^2-8} = \frac{y(x+3)-2(x+3)}{y^2(x+2)-4(x+2)} = \frac{(y-2)(x+3)}{(y^2-4)(x+2)}$$

$$f(x,y) = \frac{x+3}{(y+2)(x+2)}.$$

Nyní můžeme spočíst limitu přímým dosazením bodu $[-1,2]$, tj.

$$\lim_{[x,y]\to[-1,2]} \frac{x+3}{(y+2)(x+2)} = \frac{-1+3}{(2+2)(-1+2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Limita funkce f v bodě $[-1,2]$ je rovna $\frac{1}{2}$. Aby zadaná funkce byla spojitá, musí platit, že $\lim\limits_{[x,y]\to[-1,2]} f(x,y) = f(-1,2)$, což v našem případě není splněno, jelikož $\frac{1}{2} \neq 1$. Z toho tedy plyne, že funkce f není v bodě $[-1,2]$ spojitá.

Příklad 2.23. Vyšetřete, zda je funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4} & \text{pro} \quad [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro} \quad [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

spojitá v bodě $[0,0]$.

Řešení. Aby byla funkce f spojitá v bodě $[0,0]$, musí mít v tomto bodě limitu rovnu nule. Při vyšetřování limity metoda postupných limit, metoda svazku přímek i metoda transformace do polárních souřadnic selhává, dávají výsledek nula. Z toho nemůžeme o existenci limity či spojitosti nic usuzovat. Dále k vyšetření limity použijeme metodu svazku parabol, tj.

$$L^{**} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y=kx^2}} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4(kx^2)^2}{x^8+(kx^2)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^8k^2}{x^8(1+k^4)} = \frac{k^2}{1+k^4}.$$

Protože limita L^{**} závisí na parametru k, zadaná limita neexistuje. Jelikož limita není rovna nule, zkoumaná funkce f v bodě $[0,0]$ nemůže být spojitá.

Příklad 2.24. Nalezněte číslo c, pro které je funkce f spojitá v bodě $[-1,0]$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1} & \text{pro} \quad [x,y] \neq [-1,0] \\ c & \text{pro} \quad [x,y] = [-1,0] \end{cases}$$

Řešení. Než začneme počítat limitu, upravíme si zadanou funkci f, tj.

$$f(x,y) = \frac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1} = \frac{x(y+2)+y+2}{y^2(x+1)+x+1} = \frac{(x+1)(y+2)}{(y^2+1)(x+1)} = \frac{y+2}{y^2+1}.$$

Nyní můžeme spočíst limitu přímým dosazením bodu

$$\lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{y+2}{y^2+1} = \frac{0+2}{0^2+1} = 2.$$

Číslo $c = 2$.

2.3 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 2.1. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \tan y + 2\cot(x+y)$ v bodě $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$.

Cvičení 2.2. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^2+2xy+y^2}{y+x}$ v bodě $[-1,1]$.

Cvičení 2.3. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{-y^2}{x}$ v bodě $[0,0]$.

Cvičení 2.4. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{-x^2}{y}$ v bodě $[0,0]$.

Cvičení 2.5. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{2x-8}{y-2}$ v bodě $[4,2]$.

Cvičení 2.6. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ v bodě $[\infty,\infty]$.

Cvičení 2.7. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = (1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$ v bodě $[\infty,1]$.

Cvičení 2.8. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^6+y^2}$ v bodě $[0,0]$.

Cvičení 2.9. Vyšetřete, zda je funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{pro} \quad [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro} \quad [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

spojitá v bodě $[0,0]$.

Cvičení 2.10. Vyšetřete, zda je funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & \text{pro} \quad [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro} \quad [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

spojitá v bodě $[0,0]$.

Cvičení 2.11. Nalezněte číslo c, pro které je funkce f spojitá v bodě $[0,0]$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{pro} \quad [x,y] \neq [0,0] \\ c & \text{pro} \quad [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

Cvičení 2.12. Nalezněte číslo c, pro které je funkce f spojitá v bodě $[2,-3]$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy-2-2y+x}{x+y+1} & \text{pro} \quad [x,y] \neq [2,-3] \\ c & \text{pro} \quad [x,y] = [2,-3] \end{cases}$$

3 Parciální derivace

3.1 Definice a věty

Definice 3.1. Nechť je funkce $f(x,y)$ definovaná na oblasti Ω, ve které leží bod $[x_0,y_0]$. Jestliže existuje limita tvaru

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h},$$

nazýváme ji **parciální derivací** funkce $f(x,y)$ podle proměnné x v bodě $[x_0,y_0]$ a značíme ji

$$f_x(x_0,y_0), \qquad \text{popř.} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Analogicky pak limitu tvaru

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h},$$

nazýváme parciální derivací funkce $f(x,y)$ podle proměnné y v bodě a $[x_0,y_0]$ a značíme ji

$$f_y(x_0,y_0) \qquad \text{popř.} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Definice 3.2. Nechť je funkce $f(x_1,x_2,\dots x_n)$ definovaná na oblasti Ω, ve které leží bod $[x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*]$. Jestliže existuje limita tvaru

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1^*+h,x_2^*,\dots,x_n^*)-f(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*)}{h},$$

nazýváme ji **parciální derivací** funkce $f(x_1,x_2,\dots x_n)$ podle proměnné x_1 v bodě $[x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*]$ a značíme ji

$$f_{x_1}(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*), \qquad \text{popř.} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*).$$

Věta 3.3. *Nechť mají funkce funkce $f(x_1,x_2,\dots x_n)$ a $g(x_1,x_2,\dots x_n)$ v bodě $x^*=[x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*]$ parciální derivace podle proměnné x_i, $i=1,\dots,n$. Pak mají v tomto bodě parciální derivace také funkce $c.f$, $f+g$, $f-g$, $f.g$ a f/g, přičemž platí:*

1. $(c.f)_{x_i}(x^*) = c.f_{x_i}(x^*)$,

2. $(f+g)_{x_i}(x^*) = f_{x_i}(x^*) + g_{x_i}(x^*)$,

3. $(f-g)_{x_i}(x^*) = f_{x_i}(x^*) - g_{x_i}(x^*)$,

4. $(f.g)_{x_i}(x^*) = f_{x_i}(x^*).g(x^*) + f(x^*).g_{x_i}(x^*)$,

5. $(\frac{f}{g})_{x_i}(x^*) = \frac{f_{x_i}(x^*).g(x^*)+f(x^*).g_{x_i}(x^*)}{g^2(x^*)}$.

Definice 3.4. Nechť $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ je funkce n proměnných. Má-li funkce $f_{x_i}(x_1, x_2, \dots x_n)$ v bodě $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ parciální derivaci podle proměnné x_j, nazýváme ji **parciální derivací druhého řádu** funkce $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ v bodě x^* podle proměnných x_i a x_j a značíme ji

$$f_{x_i x_j}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*), \qquad \text{popř.} \qquad \frac{\partial f^2}{\partial x_i \partial x_j}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*).$$

Věta 3.5. *(Schwarzova) Jestliže jsou smíšené parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y)$ spojité v bodě $x^* = [x^*, y^*]$, pak platí*

$$f_{xy}(x^*, y^*) = f_{yx}(x^*, y^*).$$

Věta 3.6. *Jestliže jsou smíšené parciální derivace funkce $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ řádu k spojité v bodě $[x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$, pak jejich hodnota v tomto bodě nezávisí na pořadí derivování, ale pouze na tom, kolikrát jsme funckci f podle jednotlivých proměnných derivovali.*

3.2 Řešené příklady

Příklad 3.7. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce předepsané vztahem $f(x,y) = x^3 + 4x^2y + 3xy^2 + y^3$ v bodě $B = [1, 2]$.

Řešení. Můžeme postupovat dvěma způsoby. První spočívá v tom, že za proměnnou x, resp. y ihned dosadíme příslušné hodnoty, a pak počítáme už jen s funkcemi jedné proměnné podle známých pravidel pro derivování. Dostáváme tedy vztah

$$f(1, y) = 1 + 4y + 3y^2 + y^3,$$

který dál derivujeme podle proměnné y, což nám dává

$$f_y(1, y) = 4 + 6y + 3y^2,$$

odkud nám po dosazení vyjde hodnota $f_y(1, 2) = 28$.

Obdobně vypočteme

$$f(x, 2) = x^3 + 8x^2 + 12x + 8$$

a po derivaci podle x obdržíme

$$f_x(x, 2) = 3x^2 + 16x + 12,$$

a tedy $f_x(1, 2) = 31$.

Při výpočtu samozřejmě nemusíme ihned za proměnné x, y dosadit, chápeme-li je jako konstanty. To znamená, že při derivování podle x zacházíme s proměnnou y jako s konstantou a naopak. Jestliže postupujeme takto, dostaneme

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 8xy + 3y^2$$
$$f_y(x, y) = 4x^2 + 6xy + 3y^2,$$

odkud nám opět vyjde $f_x(1, 2) = 31$, $f_y(1, 2) = 28$.

Je zřejmé, že druhý postup má výhodu ve své obecnosti, a dojde-li ke změně bodu, v němž má být derivace vypočtena, nemusíme výpočet opakovat celý, ale stačí jen dosadit nové hodnoty do výrazů udávajících f_x a f_y. Výhodou prvního postupu je skutečnost, že někdy může vést ke zjednodušení výpočtu a snížit tak pravděpodobnost, že se při výpočtu dopustíme chyby.

Příklad 3.8. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x, y) = \ln(x.y) + \exp(\frac{x}{y})$.

Řešení. Postup bude opět založen na tom, že při výpočtu jednotlivých parciálních derivací budeme druhou proměnnou považovat za konstantu. Nyní je ovšem zapotřebí vzít navíc v úvahu skutečnost, že pracujeme vlastně se složenými funkcemi, a je tedy nutné derivovat součin a podíl uvnitř logaritmické, resp. exponenciální funkce. Máme tedy

$$f_x(x,y) = \left(\frac{1}{x.y}\right).y + \exp\left(\frac{x}{y}\right).\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\exp\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$f_y(y,x) = \left(\frac{1}{x.y}\right).x + \exp\left(\frac{x}{y}\right).\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\exp\left(\frac{x}{y}\right).$$

Příklad 3.9. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y}$.

Řešení. Chápeme-li y jako konstantu, dostáváme

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y}}.$$

Považujeme-li v dalším za konstantu proměnnou x, vyjde nám

$$f_y(y,x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}.$$

Příklad 3.10. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{xy}$.

Řešení. Chápeme-li y jako konstantu, můžeme použít pravidlo pro součin funkcí, což nám dává

$$f_x(x,y) = 2x \cdot e^{xy} + (x^2+y^2)ye^{xy} = (2x + x^2y + y^3)e^{xy}.$$

V dalším můžeme využít symetrie zadané funkce vzhledem k proměnným x a y k získání výsledku pro parciální derivaci podle y. Stačí ve výrazu $f_x(x,y)$ zaměnit x za y. Ihned tedy dostáváme

$$f_x(x,y) = (2y + xy^2 + x^3)e^{xy}.$$

Doporučujeme nicméně čtenáři, aby výpočet v rámci cvičení provedl přímo.

Příklad 3.11. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce dané vztahem $f(x,y) = \tan(x^2-y^2)$.

Řešení. Chápeme-li y jako konstantu, můžeme použít opět pravidlo pro derivování složené funkce, což nám dává

$$f_x(x,y) = \frac{1}{\cos^2(x^2-y^2)} \cdot 2x = \frac{2x}{\cos^2(x^2-y^2)}$$

a

$$f_x(x,y) = \frac{1}{\cos^2(x^2-y^2)} \cdot (-2y) = \frac{-2y}{\cos^2(x^2-y^2)}.$$

Povšimněte si, že i v tomto příkladě jsme mohli využít struktury zadané funkce vzhledem k proměnným x a y k získání výsledku pro parciální derivaci podle y. Stačilo ve výrazu $f_x(x,y)$ zaměnit x za $-y$.

Příklad 3.12. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce dané vztahem $f(x,y,z) = x^2z + e^{yz^2} + \sqrt{(x^3y^2z)}$.

Řešení. Při výpočtu parciální derivace podle proměnné x považujeme proměnné y a z za konstanty. Odtud

$$f_x(x,y,z) = 2xz + 0 + \frac{1}{2\sqrt{x^3y^2z}} \cdot 3x^2y^2z = 2xz + \frac{3x^2y^2z}{2\sqrt{x^3y^2z}}.$$

Při výpočtu parciální derivace podle proměnné y považujeme proměnné x a z za konstanty. Odtud

$$f_x(x,y,z) = 0 + z^2e^{yz^2} + \frac{1}{2\sqrt{x^3y^2z}} \cdot 2x^3yz = ye^{yz^2} + \frac{x^3yz}{\sqrt{x^3y^2z}}.$$

Při výpočtu parciální derivace podle proměnné y považujeme proměnné x a z za konstanty. Odtud

$$f_z(x,y,z) = x^2 + 2yze^{yz^2} + \frac{1}{2\sqrt{x^3y^2z}} \cdot x^3y^2 = x^2 + 2yze^{yz^2} + \frac{x^3y^2}{2\sqrt{x^3y^2z}}.$$

Příklad 3.13. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(u,v,w) = u^v + v^w + w^u$.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že při výpočtu jednotlivých parciálních derivací pracujeme vždy se součtem mocninné, exponenciální a konstantní funkce. Např. při výpočtu f_u je u^v mocninná funkce, w^u exponenciální funkce a v^w je konstanta. Aplikujeme-li nám známé vzorce pro derivování těchto funkcí, dostaneme

$$f_u(u,v,w) = v.u^{u-1} + 0 + w^u.e^w = v.u^{v-1} + w^u.e^w.$$

Při výpočtu zbylých derivací f_v, f_w můžeme opět využít symetrického výskytu proměnných, a proto uvádíme jen výsledky. Opět doporučujeme čtenáři, aby výpočtem ověřil jejich správnost.

$$f_v(u,v,w) = u^v.e^u + w.v^{w-1}$$

$$f_w(u,v,w) = v^w.e^v + u.w^{u-1}.$$

Příklad 3.14. Vypočtěte nesmíšené parciální druhého řádu funkce dané vztahem $f(x,y) = e^{xy} \sin x \cos y$.

Řešení. Jen připomínáme, že derivujeme-li funkci více proměnných podle jednotlivých proměnných obdržíme jako výsledek opět funkci více proměnných. Opětovným derivováním těchto funkcí obdržíme parciální derivace druhého, příp. vyššího řádu. Máme tedy

$$f_x(x,y) = \cos y(ye^{xy}.\sin x + e^{xy}.\cos x)$$

$$f_y(x,y) = \sin x(xe^{xy}.\cos y - e^{xy}.\sin y)$$

Dále pak

$$f_{xx} = \cos y(y^2e^{xy} \sin x + 2ye^{xy} \sin x - e^{xy} \sin x),$$

$$f_{yy} = \sin x(x^2e^{xy}.cosy - 2xe^{xy} \cos y - e^{xy} \cos y).$$

Příklad 3.15. Vypočtěte všechny smíšené parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y,z) = e^{xy^2}xz^3$.

Řešení. Jedná se o součin spojitých funkcí. Při jeho derivování vznikne vždy jen spojitá funkce. Z tohoto důvodu nemusíme počítat všechny smíšené parciální derivace druhého řádu, jestliže se odvoláme na Schwarzovu větu, která nám rovnost některých z nich zaručuje. Dostáváme tedy

$$f_x(x,y,z) = y^2e^{xy^2} \cdot xz^3 + e^{xy^2}z^3 = z^3e^{xy^2}(xy^2+1).$$

Dále máme

$$f_{xz}(x,y,z) = f_{zx}(x,y,z) = 3z^2e^{xy^2}(xy^2+1)$$

a

$$f_{xy}(x,y,z) = f_{yx}(x,y,z) = 2xyz^3e^{xy^2}(xy^2+1) + 2xyz^3e^{xy^2} =$$

$$= 2xyz^3e^{xy^2}(xy^2+2).$$

Zbývá vypočítat smíšené parciální derivace, kdy derivujeme podle proměnných y a z. Máme tedy např.

$$f_z(x,y,z) = 3e^{xy^2}xz^2$$

a

$$f_{zy}(x,y,z) = f_{yz}(x,y,z) = 6x^2yz^2e^{xy^2}.$$

Příklad 3.16. Je dána rovnice

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = nw.$$

Ověřte, že funkce $w = (ax+by+cz)^n$, kde a, b, c jsou konstanty, je řešením této rovnice.

Řešení. Abychom ověřili platnost rovnice pro danou funkci, vypočteme nejdříve její parciální derivace podle jednotlivých proměnných a pak do rovnice obdržené výsledky dosadíme. Potřebné vztahy pro dosazení jsou

$$\frac{\partial w}{\partial x} = na(ax+by+cz)^{(n-1)},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = nb(ax+by+cz)^{(n-1)}$$

a

$$\frac{\partial w}{\partial x} = nc(ax+by+cz)^{(n-1)}.$$

Po dosazení do levé strany rovnice dostáváme výraz

$$xna(ax+by+cz)^{(n-1)} + ynb(ax+by+cz)^{(n-1)} + znc(ax+by+cz)^{(n-1)} =$$

$$= n(ax+by+cz)^{(n-1)}(ax+by+cz) = n(ax+by+cz)^n = nw.$$

Vidíme tedy, že funkce w dané rovnici vyhovuje.

3.3 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 3.1. Vypočtěte hodnotu parciálních derivací prvního řádu funkce $f(x,y) = xe^{-y} + 3y$ v bodě $[1,0]$.

Cvičení 3.2. Vypočtěte hodnotu parciálních derivací prvního řádu funkce $f(x,y) = \sin(x+y)$ v bodě $[\pi/6, \pi/3]$.

Cvičení 3.3. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce dané vztahem $f(x,y) = e^x \tan(x-y)$.

Cvičení 3.4. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce dané vztahem $f(x,y) = \frac{4\sqrt{x}}{3y^2+1}$.

Cvičení 3.5. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce dané vztahem $f(x,y) = \frac{3x-y}{x+2y}$.

Cvičení 3.6. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce dané vztahem $f(x,y,z) = 2\sqrt{x}y - ye^{y/z}$.

Cvičení 3.7. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce dané vztahem $f(w,x,y,z) = w^2u^2 - wx^3 + xu\cos(wz^2) + (2y^2z)^4$.

Cvičení 3.8. Výpočtem ověřte, že pro funkci $f(x,y) = e^{-3x}\cos y$ platí rovnost $f_{xy} = f_{yx}$.

Cvičení 3.9. Výpočtem ověřte, že pro funkci $f(x,y) = \ln(x+y)$ platí rovnost $f_{xy} = f_{yx}$

Cvičení 3.10. Ověřte, že funkce $u = 1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ je řešením Laplaceovy rovnice $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

4 Diferenciál funkce, Taylorův polynom

4.1 Definice a věty

Definice 4.1. Funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná v bodě $P = [x_0, y_0] \in \mathcal{D}f$ je v tomto bodě **diferencovatelná**, jestliže existují reálná čísla $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ taková, že platí

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - (\mathcal{A}h + \mathcal{B}k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \tag{4.1}$$

Lineární funkce $\mathcal{A}h + \mathcal{B}k$ proměnných h, k se nazývá **totální** (neboli úplný) **diferencál** funkce f v bodě $P = [x_0, y_0]$. Označujeme $\mathrm{d}f(x_0, y_0)(h, k)$, příp. $\mathrm{d}f(P)(h, k)$ nebo $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$.

Věta 4.2. *Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $P = [x_0, y_0]$, pak má v tomto bodě parciální derivace prvního řádu a platí $\mathcal{A} = f_x(P)$, $\mathcal{B} = f_y(P)$, tj.*

$$\mathrm{d}f(P)(h,k) = f_x(P)h + f_y(P)k. \tag{4.2}$$

Věta 4.3. *Má-li funkce f v bodě $P = [x_0, y_0]$ spojité parciální derivace prvního řádu, pak je v tomto bodě diferencovatelná.*

Věta 4.4. *Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $P = [x_0, y_0]$, pak je v tomto bodě spojitá.*

Věta 4.5. *Tečná rovina plochy $z = f(x, y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ existuje právě tehdy, když je funkce f diferencovatelná v bodě $P = [x_0, y_0]$. Rovnice tečné roviny v bodě T je dána vztahem*

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0). \tag{4.3}$$

Věta 4.6. *Normála ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě T je určena parametrickými rovnicemi*

$$\begin{aligned} n: x &= x_0 - f_x(x_0,y_0)t,\\ y &= y_0 - f_y(x_0,y_0)t,\\ z &= z_0 + t, \end{aligned} \tag{4.4}$$

kde $t \in \mathbb{R}$.

Definice 4.7. Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace až do řádu m včetně. **Diferenciálem m-tého řádu** funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ rozumíme homogenní funkci m-tého stupně

$$\mathrm{d}^m f(x_0, y_0)(h, k) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x_0, y_0) h^j k^{m-j}. \qquad (4.5)$$

Poznámka 4.8. Pro případ n proměnných je diferenciál m-tého řádu homogenní funkce n proměnných $h = (h_1, \ldots, h_n)$

$$\mathrm{d}^m f(x^*)(h) = \sum_{j_1+\ldots+j_n=m} \frac{m!}{j_1! \ldots j_n!} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}(x^*) h_1^{j_1} \ldots h_n^{j_n}, \qquad (4.6)$$

kde $x^* = [x_1^*, \ldots, x_n^*] \in \mathbb{R}^n$. Tento vztah se zapisuje pomocí formálního umocnění následovně:

$$\mathrm{d}^m f(x^*)(h) = (\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n)^m f(x^*),$$

přičemž po umocnění nahradíme součiny

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x^*)\right)^{j_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} f(x^*)\right)^{j_n}$$

členy

$$\frac{\partial^{j_1} f}{\partial x_1^{j_1}}(x^*) \ldots \frac{\partial^{j_n} f}{\partial x_n^{j_n}}(x^*).$$

Věta 4.9. *Nechť funkce $P(x, y)$ a $Q(x, y)$ mají spojité parciální derivace na otevřené souvislé množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Pak výraz*

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$$

je totálním diferenciálem nějaké funkce na množině M právě tehdy, když platí

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) \quad \textit{pro každé } [x, y] \in M.$$

Věta 4.10. *Nechť funkce* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]$ *a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu* $m+1$. *Pak pro* $\theta \in (0,1)$ *a* $h = (h_1, \dots, h_n) = x - x^*$ *platí*

$$
\begin{aligned}
f(x^* + h) &= f(x^*) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(x^*)(h) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x^*)(h) + \\
&\quad + \dots + \frac{1}{m!}\mathrm{d}^m f(x^*)(h) + \frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}^{m+1} f(x^* + \theta h)(h) = \\
&= \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!}\mathrm{d}^i f(x^*)(h) + \frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}^{m+1} f(x^* + \theta h)(h). \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Poznámka 4.11. Výraz (4.7) nazýváme Taylorův vzorec nebo také Taylorova formule. Hodnota

$$R_m(x) = \frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}^{m+1} f(x^* + \theta h)(h) \qquad (4.8)$$

se nazývá Taylorův zbytek. Polynom

$$T_m(x) = f(x^*) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(x^*)(h) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x^*)(h) + \dots + \frac{1}{m!}\mathrm{d}^m f(x^*)(h) \qquad (4.9)$$

se nazývá Taylorův polynom m-tého řádu funkce f v bodě x^*. V případě, že $x^* = [0, \dots, 0]$ mluvíme o vzorci (4.7) jako o Maclaurinově vzorci.

4.2 Řešené příklady

Příklad 4.12. Rozhodněte, zda je funkce $f(x, y) = x^2 + y \cos x$ diferencovatelná v bodě $[\frac{\pi}{2}, 1]$.

Řešení. Definičním oborem funkce f je $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^2$. Využijeme větu 4.3, která říká, že spojité parciální derivace funkce f v bodě P dávají diferencovatelnost funkce f v bodě P. V našem případě $P = [\frac{\pi}{2}, 1]$. Spočteme parciální derivace funkce f v bodě $[\frac{\pi}{2}, 1]$, tj.

$$
\begin{aligned}
f_x(x, y) &= 2x - y \sin x, & f_y(x, y) &= \cos x, \\
f_x(\tfrac{\pi}{2}, 1) &= \pi - 1, & f_y(\tfrac{\pi}{2}, 1) &= 0.
\end{aligned}
$$

Tyto funkce jsou spojité na celém svém definičním oboru, tedy i v bodě $[\frac{\pi}{2}, 1]$. Funkce f je diferencovatelná v bodě $[\frac{\pi}{2}, 1]$.

Poznámka 4.13. Tento příklad lze také řešit pomocí definice 4.1, tj. ověříme, zda limita $\lim\limits_{[h,k]\to[0,0]} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-(\mathcal{A}h+\mathcal{B}k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$, kde $f(x,y) = x^2 + y\cos x$ a $[x_0, y_0] = [\frac{\pi}{2}, 1]$.

Příklad 4.14. Pomocí totálního diferenciálu přibližně vypočtěte $\sqrt{3.01 \cdot 0.99}$.

Řešení. Označme $f(x,y) = \sqrt{x \cdot y}$. Zvolme bod $[x_0, y_0] = [3, 1]$ a spočteme diference $h = x - x_0 = 0.01$, $k = y - y_0 = -0.01$. Pro výpočet použijeme vztah $f(x,y) \doteq f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f(x_0,y_0)(h,k)$. V bodě $[3,1]$ a s diferencemi $h = 0.01$, $k = -0.01$ máme

$$f(3.01, 0.99) \doteq f(3,1) + \mathrm{d}f(3,1)(0.01, -0.01).$$

Ze vztahu (4.2) dostaneme

$$\mathrm{d}f(x,y)(h,k) = \frac{y}{2\sqrt{xy}}h + \frac{y}{2\sqrt{xy}}k,$$

$$\mathrm{d}f(3,1)(0.001, -0.01) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot 0.01 + \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot (-0.01) = -\frac{1}{100\sqrt{3}}.$$

Pak dosazením do výše uvedeného vztahu dostáváme

$$\sqrt{3.01 \cdot 0.99} = f(3.01, 0.99) \doteq f(3,1) + \mathrm{d}f(3,1) = \sqrt{3} - \frac{1}{100\sqrt{3}} = \frac{299}{100\sqrt{3}}.$$

Příklad 4.15. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = xy\ln(x+y)$ v obecném bodě.

Řešení. Definičním oborem dané funkce je $\mathcal{D}f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x > -y\}$. Spočteme první parciální derivace, tj.

$$f_x(x,y) = y\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y} = \frac{(x+y)y\ln(x+y) + xy}{x+y},$$

$$f_y(x,y) = x\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y} = \frac{(x+y)x\ln(x+y) + xy}{x+y}.$$

Jelikož parciální derivace jsou spojité v každém bodě definičního oboru $\mathcal{D}f$, totální diferenciál existuje. Dosazením do vztahu (4.2) dostaneme

$$\mathrm{d}f(x,y)(h,k) = \frac{(x+y)y\ln(x+y)+xy}{x+y}h + \frac{(x+y)x\ln(x+y)+xy}{x+y}k.$$

Příklad 4.16. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$ v bodě $[2,1,1]$.

Řešení. Definiční obor funkce f je $\mathcal{D}f = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; z \neq 0\}$. Spočteme první parciální derivace a dosadíme bod $[2,1,1]$

$$\begin{aligned} &f_x(x,y,z) = \frac{yx^{\frac{y}{z}-1}}{z}, && f_y(x,y,z) = \frac{x^{\frac{y}{z}}\ln x}{z}, && f_z(x,y,z) = -\frac{x^{\frac{y}{z}}y\ln x}{z^2},\\ &f_x(2,1,1) = 1, && f_y(2,1,1) = 2\ln 2, && f_z(2,1,1) = -2\ln 2. \end{aligned}$$

Parciální derivace jsou v bodě $[2,1,1]$ spojité. Totální diferenciál v bodě $[2,1,1]$ podle vzorce (4.6) je

$$\mathrm{d}f(2,1,1)(h_1,h_2,h_3) = h_1 + 2\ln 2\, h_2 - 2\ln 2\, h_3.$$

Příklad 4.17. Určete totální diferenciál druhého řádu funkce $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$ v bodě $[2,1,1]$.

Řešení. Definiční obor funkce f je $\mathcal{D}f = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; z \neq 0\}$. Z předchozího příkladu 4.16 známe hodnoty prvních parciálních derivací. Nyní vypočítáme parciální derivace druhého řádu:

$$\begin{aligned} &f_{xx}(x,y,z) = \frac{x^{\frac{y}{z}-2}y(y-z)}{z^2}, && f_{xy}(x,y,z) = \frac{x^{\frac{y}{z}-1}(z+y\ln x)}{z^2},\\ &f_{xz}(x,y,z) = -\frac{yx^{\frac{y}{z}-1}(z+y\ln x)}{z^3}, && f_{yx}(x,y,z) = \frac{x^{\frac{y}{z}-1}(z+y\ln x)}{z^2},\\ &f_{yy}(x,y,z) = \frac{x^{\frac{y}{z}}\ln^2 x}{z^2}, && f_{yz}(x,y,z) = -\frac{zx^{\frac{y}{z}}\ln(x)(z+y\ln x)}{z^3},\\ &f_{zx}(x,y,z) = -\frac{yx^{\frac{y}{z}-1}(z+y\ln x)}{z^3}, && f_{zy}(x,y,z) = -\frac{zx^{\frac{y}{z}}\ln(x)(z+y\ln x)}{z^3},\\ &f_{zz}(x,y,z) = \frac{y\ln(x)x^{\frac{y}{z}}(2z+y\ln x)}{z^4} \end{aligned}$$

a dosadíme bod [2, 1, 1]

$$
\begin{array}{ll}
f_{xx}(2,1,1) = 0, & f_{xy}(2,1,1) = 1 + \ln 2, \\
f_{xz}(2,1,1) = -1 - \ln 2, & f_{yx}(2,1,1) = 1 + \ln 2, \\
f_{yy}(2,1,1) = 2\ln^2 2, & f_{yz}(2,1,1) = -2\ln 2 - 2\ln^2 2, \\
f_{zx}(2,1,1) = -1 - \ln 2, & f_{zy}(2,1,1) = -2\ln 2 - 2\ln^2 2, \\
f_{zz}(2,1,1) = 4\ln 2 + 2\ln^2 2. &
\end{array}
$$

Parciální derivace v bodě [2, 1, 1] jsou spojité. Smíšené parciální derivace v bodě [2, 1, 1] jsou záměnné. Totální diferenciál druhého řádu v bodě [2, 1, 1] existuje a podle vzorce (4.6) je

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 f(2,1,1)(h_1,h_2,h_3) &= 2\ln^2 2 h_2^2 + (4\ln 2 + 2\ln^2 2)h_3^2 + 2(1+\ln 2)h_1h_2 - \\
&- 2(1+\ln 2)h_1h_3 - 2(2\ln 2 + 2\ln^2 2)h_2h_3.
\end{aligned}
$$

Příklad 4.18. Určete totální diferenciál třetího řádu funkce $f(x,y) = x^3e^{2y}$ v bodě $[-1, 0]$.

Řešení. Definiční obor je $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^2$. Budeme potřebovat parciální derivace třetího řádu. Derivace funkce f jsou spojité, a tedy nebude záviset na pořadí derivování.

$$
\begin{array}{lll}
f_x(x,y) = 3x^2e^{2y}, & f_{xx}(x,y) = 6xe^{2y}, & f_{xxx}(x,y) = 6e^{2y} \\
f_y(x,y) = 2x^3e^{2y}, & f_{yy}(x,y) = 4x^3e^{2y}, & f_{yyy}(x,y) = 8x^3e^{2y}, \\
 & f_{xy} = 6x^2e^{2y}, & f_{xyx}(x,y) = 12xe^{2y}, \\
 & & f_{xyy}(x,y) = 12x^2e^{2y}.
\end{array}
$$

Po dosazení bodu $[-1, 0]$ vyjde

$$
\begin{array}{ll}
f_{xxx}(-1,0) = 6, & f_{xxy}(-1,0) = -12, \\
f_{yyy}(-1,0) = -8, & f_{yyx}(-1,0) = 12.
\end{array}
$$

Totální diferenciál třetího řádu v bodě $[-1, 0]$ existuje a podle vzorce (4.5) je

$$
\mathrm{d}^3 f(-1,0)(h,k) = 6h^3 - 36h^2k + 36hk^2 - 8k^3.
$$

Příklad 4.19. Určete tečnou rovinu a normálu k funkci $f(x,y) = \ln \frac{1-x+y}{1+x+y}$ v bodě $[-1, 1]$.

Řešení. Nejdříve dopočteme třetí souřadnici bodu T:

$$z_0 = f(x_0, y_0) = f(-1, 1) = \ln 3.$$

Funkce je definována pro $\frac{1-x+y}{1+x+y} > 0$. Spočteme parciální derivace prvního řádu

$$f_x(x,y) = \frac{-2(y+1)}{(y+1)^2 - x^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{2x}{(y+1)^2 - x^2}$$

a určíme jejich hodnoty v bodě $[-1, 1]$

$$f_x(-1,1) = -\frac{4}{3}, \quad f_y(-1,1) = -\frac{2}{3}.$$

Parciální derivace jsou v bodě $[-1, 1]$ spojité, tudíž funkce f je v tomto bodě diferencovatelná a tedy existuje tečná rovina. Dosazením do rovnice pro tečnou rovinu (4.3) máme

$$z - \ln 3 = -\frac{4}{3}(x+1) - \frac{2}{3}(y-1) \Rightarrow \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y + z + \frac{2}{3} + \ln 3 = 0.$$

Rovnici normály získáme dosazením do vztahu (4.4)

$$n : x = -1 + \frac{4}{3}t, \quad y = 1 + \frac{2}{3}t, \quad z = \ln 3 + t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Příklad 4.20. Na grafu funkce $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ najděte bod, v němž je tečná rovina rovnoběžná s rovinou $\rho : 12x + 3y - z = 0$.

Řešení. Hledáme bod $T = [x_0, y_0, z_0]$. Z analytické geometrie víme, že dvě rovnoběžné roviny mají totožný normálový vektor. Určíme si tedy normálový vektor roviny ρ, značíme $\mathbf{n}_\rho$, tečné roviny t, značíme $\mathbf{n}_t$, a porovnáme jejich složky. Normálový vektor roviny ρ určíme ze zadání, $\mathbf{n}_\rho = (-12, -3, 1)$. Normálový vektor tečné roviny t určíme pomocí parciálních derivací funkce f.

$$\mathbf{n}_t = (-f_x(x_0,y_0), -f_y(x_0,y_0), 1) = \left(\frac{-x_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}, \frac{-y_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}, 1 \right).$$

Porovnáním složek normálových vektorů $f_x(x_0, y_0) = 12$, $f_y(x_0, y_0) = 3$ dostáváme

$$\frac{-x_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}} = 12, \quad \frac{-y_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}} = 3.$$

Aby tyto rovnosti byly splněny, musí být hodnoty x_0, y_0 záporné. Počítáme a dostaneme $T = [-\frac{12}{\sqrt{154}}, -\frac{3}{\sqrt{154}}, \frac{1}{\sqrt{154}}]$.

Příklad 4.21. Zjistěte, zda daný výraz $(y - \frac{\sin^2 y}{x^2})\mathrm{d}x + (x + \frac{\sin 2y}{x} + 1)\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem nějaké funkce v obecném bodě. Pokud ano, určete ji.

Řešení. Nejprve ověříme, zda je zadaný výraz opravdu diferenciálem. Označíme $P(x,y) = y - \frac{\sin^2 y}{x^2}$ a $Q(x,y) = x + \frac{\sin 2y}{x} + 13$. Podle Věty 4.9 musí platit, že $P_y(x,y) = Q_x(x,y)$. Spočteme parciální derivace

$$P_y(x,y) = \frac{x^2 - \sin 2y}{x^2} \quad Q_x(x,y) = \frac{x^2 - \sin 2y}{x^2}$$

a dostáváme, že $P_y(x,y) = Q_x(x,y)$. Zadaný výraz je tedy diferenciálem jisté kmenové funkce f. Dále platí

$$f(x,y) = \int \left(y - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right) \mathrm{d}x = yx + \frac{\sin^2 y}{x} + \varphi(y),$$

kde $\varphi(y)$ je integrační konstantou, neboť její derivace podle x je nulová. Derivováním funkce f podle proměnné y a dosazením do vztahu $f_y = Q$ dostáváme

$$f_y = x + \frac{\sin 2y}{x} + \varphi'(y) = x + \frac{\sin 2y}{x} + 1.$$

Odtud máme, že $\varphi'(y) = 1$, tedy $\varphi(y) = y + c$. Spočetli jsme, že zadaný výraz je diferenciálem funkce

$$f(x,y) = yx + \frac{\sin^2 y}{x} + y + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Příklad 4.22. Najděte Taylorův vzorec druhého řádu funkce $f(x,y) = x^3y^2$ v bodě $[-2,1]$.

Řešení. Podle (4.7) bude platit

$$f(x,y) = f(-2,1) + \mathrm{d}f(-2,1)(h) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(-2,1)(h) + R_2(x,y),$$

kde $h = (h_1,h_2) = (x+2, y-1)$ a $R_2(x,y) = \frac{1}{3!}\mathrm{d}^3 f(2+\theta h_1, -1+\theta h_2)(h_1,h_2)$. Označme $\nu = 2 + \theta h_1$ a $\mu = -1 + \theta h_2$.

Funkce f má spojité parciální derivace až do třetího řádu v libovolném bodě $\mathbb{R}^2$, nebude tedy záviset na pořadí derivování.

$$\begin{array}{lll}
f_x(x,y) = 3x^2y^2, & f_{xx}(x,y) = 6xy^2, & f_{xxx}(x,y) = 6y^2,\\
f_y(x,y) = 2x^3y, & f_{yy}(x,y) = 2x^3, & f_{yyy}(x,y) = 0,\\
 & f_{xy}(x,y) = 6x^2y, & f_{xxy}(x,y) = 12xy,\\
 & & f_{xyy}(x,y) = 6x^2.
\end{array}$$

Po dosazení bodu $[-2,1]$ vyjde

$$\begin{array}{lll}
f(-2,1) = -8, & f_x(-2,1) = 12, & f_{xx}(-2,1) = -12,\\
f_y(-2,1) = -16, & f_{yy}(-2,1) = -16 & f_{yx}(-2,1) = 24.
\end{array}$$

Diferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu (4.9) mají tvar:

$$\mathrm{d}f(-2,1)(h) = f_x(-2,1)h_1 + f_y(-2,1)h_2 = 12(x+2) - 16(y-1),$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2f(-2,1)(h) &= f_{xx}(-2,1)h_1^2 + 2f_{xy}(-2,1)h_1h_2 + f_{yy}(-2,1)h_2^2 =\\
&= -12(x+2)^2 + 48(x+2)(y-1) - 16(y-1)^2.
\end{aligned}$$

Taylorův polynom je

$$T_2(x,y) = f(-2,1) + \mathrm{d}f(-2,1)(x+2,y-1) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2f(-2,1)(x+2,y-1) =$$

$$= -8 + 12(x+2) - 16(y-1) - 6(x+2)^2 + 24(x+2)(y-1) - 8(y-1)^2.$$

Abychom vyjádřili Taylorův zbytek podle vzorce (4.8), potřebujeme diferenciál třetího řádu, tj.

$$\mathrm{d}^3f(\nu,\mu)(h_1,h_2) = 6\mu^2h_1^3 + 3(12\nu\mu)h_1^2h_2 + 3(6\nu^2)h_1h_2^2.$$

Pak

$$\begin{aligned}
R_2(x,y) &= \frac{1}{3!}\mathrm{d}^3f(\nu,\mu)(x+2,y-1) =\\
&= \mu^2(x+2)^3 + 6\nu\mu(x+2)^2(y-1) + 3\nu^2(x+2)(y-1)^2.
\end{aligned}$$

Celkově pro funkci $f(x,y)$ dostáváme

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= T_2(x,y) + R_2(x,y) =\\
&= -8 + 12(x+2) - 16(y-1) - 6(x+2)^2 + 24(x+2)(y-1) -\\
&- 8(y-1)^2 + \mu^2(x+2)^3 + 6\nu\mu(x+2)^2(y-1) + 3\nu^2(x+2)(y-1)^2
\end{aligned}$$

Příklad 4.23. Pomocí Taylorova polynomu druhého stupně přibližně vypočtěte $\sqrt{3.01 \cdot 0.99}$.

Řešení. K výpočtu použijeme vztah $T_2(x,y) \doteq f(x,y)$. Zvolíme funkci $f(x,y) = \sqrt{x \cdot y}$, bod $[x_0, y_0] = [3,1]$. Spočteme diference $h = x - x_0 = 0.01$, $k = y - y_0 = -0.01$. Nejdříve spočteme požadované parciální derivace funkce $f(x,y) = \sqrt{x \cdot y}$, tj.

$$f_x(x,y) = \frac{y}{2\sqrt{xy}}, \quad f_{xy}(x,y) = \frac{1}{4\sqrt{xy}}, \quad f_{xx}(x,y) = -\frac{y^2}{4(xy)^{\frac{3}{2}}},$$

$$f_y(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{xy}}, \quad f_{yx}(x,y) = \frac{1}{4\sqrt{xy}}, \quad f_{yy}(x,y) = -\frac{x^2}{4(xy)^{\frac{3}{2}}}.$$

Spočteme hodnoty parciálních derivací v bodě $[3,1]$

$$f_x(3,1) = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad f_{xy}(3,1) = -\frac{3}{4\sqrt{3}}, \quad f_{xx}(3,1) = -\frac{1}{4\sqrt{27}},$$
$$f_y(3,1) = \frac{3}{2\sqrt{3}}, \quad f_{yx}(3,1) = -\frac{3}{4\sqrt{3}}, \quad f_{yy}(3,1) = \frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

Vypočtené hodnoty dosadíme do vzorce (4.9)

$$T_2(x,y) = f(3,1) + \mathrm{d}f(3,1)(h) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(3,1)(h),$$

kde $h = (h_1, h_2)$ a $h_1 = x - 3$, $h_2 = y - 1$. Diferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu mají tvar:

$$\mathrm{d}f(3,1)(h) = f_x(3,1)h_1 + f_y(3,1)h_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-3) + \frac{3}{2\sqrt{3}}(y-1),$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 f(3,1)(h) &= f_{xx}(3,1)h_1^2 + 2f_{xy}(3,1)h_1h_2 + f_{yy}(3,1)h_2^2 = \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{27}}(x-3)^2 - \frac{3}{2\sqrt{3}}(x-3)(y-1) + \frac{1}{4\sqrt{3}}(y-1)^2.
\end{aligned}$$

Taylorův polynom je roven

$$\begin{aligned}
T_2(x,y) &= \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-3) + \frac{3}{2\sqrt{3}}(y-1) + \\
&+ \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4\sqrt{27}}(x-3)^2 - \frac{3}{2\sqrt{3}}(x-3)(y-1) + \frac{1}{4\sqrt{3}}(y-1)^2\right].
\end{aligned}$$

Odtud

$$\sqrt{3.01 \cdot 0.99} \doteq \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}} 0.01 + \frac{3}{2\sqrt{3}}(-0.01) - \frac{1}{8\sqrt{27}}(0.01)^2 - \\ -\frac{3}{4\sqrt{3}} \cdot 0.01(-0.01) + \frac{1}{8\sqrt{3}}(-0.01)^2 = 1.726325.$$

Příklad 4.24. Určete Taylorův polynom třetího stupně se středem v bodě $[-1, 0]$ pro funkci $f(x, y) = x^3 e^{2y}$.

Řešení. Definiční obor je $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^2$. Budeme potřebovat parciální derivace do třetího řádu. Derivace funkce f jsou spojité, a tedy nebude záviset na pořadí derivování (viz příklad 4.18).

$$\begin{array}{lll} f_x(x,y) = 3x^2 e^{2y}, & f_{xx}(x,y) = 6xe^{2y}, & f_{xxx}(x,y) = 6e^{2y} \\ f_y(x,y) = 2x^3 e^{2y}, & f_{yy}(x,y) = 4x^3 e^{2y}, & f_{yyy}(x,y) = 8x^3 e^{2y}, \\ & f_{xy} = 6x^2 e^{2y}, & f_{xyx}(x,y) = 12xe^{2y}, \\ & & f_{xyy}(x,y) = 12x^2 e^{2y}. \end{array}$$

Po dosazení bodu $[-1, 0]$ vyjde

$$\begin{array}{lll} f_x(-1,0) = 3, & f_{xx}(-1,0) = -6, & f_{xxx}(-1,0) = 6, \\ f_y(-1,0) = -2, & f_{yy}(-1,0) = -4, & f_{yyy}(-1,0) = -8, \\ & f_{xy}(-1,0) = 6, & f_{xxy}(-1,0) = -12, \\ & & f_{yyx}(-1,0) = 12. \end{array}$$

Vypočtené hodnoty dosadíme do vztahu (4.9)

$$T_3(x,y) = f(-1,0) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(-1,0)(h) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(-1,0)(h) + \frac{1}{3!}\mathrm{d}^3 f(-1,0)(h),$$

kde $h = (h_1, h_2)$ a $h_1 = x + 1$, $h_2 = y$. Diferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu mají tvar:

$$\mathrm{d}f(-1,0)(h) = f_x(-1,0)h_1 + f_y(-1,0)h_2 = 3(x+1) - 2y,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 f(-1,0)(h) &= f_{xx}(-1,0)h_1^2 + 2f_{xy}(-1,0)h_1 h_2 + f_{yy}(-1,0)h_2^2 = \\ &= -6(x+1)^2 + 12(x+1)y - 4y^2, \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}^3 f(-1,0)(h) = f_{xxx}(-1,0)h_1^3 + 3f_{xxy}(-1,0)h_1^2 h_2 + 3f_{xyy}(-1,0)h_1 h_2^2 + \\ + f_{yyy}(-1,0)h_2^3 = 6(x+1)^3 - 36(x+1)^2 y + 36(x+1)y^2 - 8y^3.$$

Spočtené diferenciály dosadíme do vztahu pro Taylorův polynom a dostáváme

$$\begin{aligned}
T_3(x,y) &= -1+3(x+1)-2y+\frac{1}{2!}[-6(x+1)^2+12(x+1)y-4y^2]+\\
&+ \frac{1}{3!}[6(x+1)^3-36(x+1)^2y+36(x+1)y^2-8y^3]=\\
&= x^3-\frac{4}{3}y^3+4y^2-6x^2y+6xy^2-6xy-2y.
\end{aligned}$$

Příklad 4.25. Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě $[2,1,1]$ pro funkci $f(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}$.

Řešení. Definiční obor funkce f je $\mathcal{D}f=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3; z\neq 0\}$. Z příkladu 4.17 známe hodnoty prvních a druhých parciálních derivací. Nyní vypočítáme parciální derivace druhého řádu:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y,z) &= \frac{x^{\frac{y}{z}-2}y(y-z)}{z^2}, & f_{xy}(x,y,z) &= \frac{x^{\frac{y}{z}-1}(z+y\ln x)}{z^2},\\
f_{xz}(x,y,z) &= -\frac{yx^{\frac{y}{z}-1}(z+y\ln x)}{z^3}, & f_{yx}(x,y,z) &= \frac{x^{\frac{y}{z}-1}(z+y\ln x)}{z^2},\\
f_{yy}(x,y,z) &= \frac{x^{\frac{y}{z}}\ln^2 x}{z^2}, & f_{yz}(x,y,z) &= -\frac{zx^{\frac{y}{z}}\ln(x)(z+y\ln x)}{z^3},\\
f_{zx}(x,y,z) &= -\frac{yx^{\frac{y}{z}-1}(z+y\ln x)}{z^3}, & f_{zy}(x,y,z) &= -\frac{zx^{\frac{y}{z}}\ln(x)(z+y\ln x)}{z^3},\\
f_{zz}(x,y,z) &= \frac{y\ln(x)x^{\frac{y}{z}}(2z+y\ln x)}{z^4}.
\end{aligned}$$

Nyní spočteme hodnoty druhých derivací v bodě $[2,1,1]$

$$\begin{aligned}
&f_{xx}(2,1,1)=0, && f_{xy}(2,1,1)=1+\ln 2,\\
&f_{xz}(2,1,1)=-1-\ln 2, && f_{yx}(2,1,1)=1+\ln 2,\\
&f_{yy}(2,1,1)=2\ln^2 2, && f_{yz}(2,1,1)=-2\ln 2-2\ln^2 2,\\
&f_{zx}(2,1,1)=-1-\ln 2, && f_{zy}(2,1,1)=-2\ln 2-2\ln^2 2,\\
&f_{zz}(2,1,1)=4\ln 2+2\ln^2 2.
\end{aligned}$$

Parciální derivace v bodě $[2,1,1]$ jsou spojité. Smíšené parciální derivace v bodě $[2,1,1]$ jsou záměnné. Dosadíme do vzorce (4.9)

$$T_2(x,y,z)=f(2,1,1)+\mathrm{d}f(2,1,1)(h)+\frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(2,1,1)(h),$$

kde $h = (h_1, h_2, h_3)$ a $h_1 = x-2$, $h_2 = y-1$, $h_3 = z-1$. Diferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu mají tvar:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(2,1,1)(h) &= f_x(2,1,1)h_1 + f_y(2,1,1)h_2 + f_z(2,1,1)h_3 = \\ &= (x-2) + 2\ln 2(y-1) - 2\ln 2(z-1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2f(2,1,1)(h) &= f_{xx}(2,1,1)h_1^2 + f_{yy}(2,1,1)h_2^2 + f_{zz}(2,1,1)h_3^2 + \\ &+ 2f_{xy}(2,1,1)h_1h_2 + 2f_{xz}(2,1,1)h_1h_3 + 2f_{yz}(2,1,1)h_2h_3 = \\ &= 2\ln^2 2(y-1)^2 + (4\ln 2 + 2\ln^2 2)(z-1)^2 + \\ &+ 2(1+\ln 2)(x-2)(y-1) - 2(1+\ln 2)(x-2)(z-1) - \\ &- 2(2\ln 2 + 2\ln^2 2)(y-1)(z-1). \end{aligned}$$

Spočtené diferenciály dosadíme do vztahu pro Taylorův polynom a dostáváme

$$\begin{aligned} T_2(x,y,z) &= 2 + (x-2) + 2\ln 2(y-1) - 2\ln 2(z-1) + \ln^2 2(y-1)^2 + \\ &+ (2\ln 2 + \ln^2 2)(z-1)^2 + (1+\ln 2)(x-2)(y-1) - \\ &- (1+\ln 2)(x-2)(z-1) - (2\ln 2 + 2\ln^2 2)(y-1)(z-1). \end{aligned}$$

4.3 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 4.1. Pomocí definice ověřte, zda $\mathrm{d}f(1,0)(h_1,h_2)=0$ pro zadanou funkci $f(x,y)=x^2-2x+y^2$.

Cvičení 4.2. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y,z)=yz^2\tan(x+\frac{x}{y})$ v bodě $[\frac{\pi}{8},1,2]$.

Cvičení 4.3. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y)=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$ v bodě $[-1,1]$.

Cvičení 4.4. V bodě $[4,1]$ určete totální diferenciál druhého řádu funkce $f(x,y)=\sin(\pi xy+\ln y)$.

Cvičení 4.5. V bodě $[-4,\frac{\pi}{3},2]$ určete totální diferenciál druhého řádu funkce $f(x,y,z)=e^{z^2+x}\cos y$.

Cvičení 4.6. Určete totální diferenciál třetího řádu funkce $f(x,y)=x\ln\frac{y}{x}$ v obecném bodě.

Cvičení 4.7. Zjistěte, zda daný výraz $(y^2\sin 2x)\mathrm{d}x+(-y\cos 2x-4)\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem nějaké funkce. Pokud ano, určete ji.

Cvičení 4.8. V bodě $[2,1]$ určete tečnou rovinu a normálu ke grafu funkce $f(x,y)=\ln(2x^3-8y^2)$.

Cvičení 4.9. V bodě $[0,0]$ spočtěte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y)=\sqrt{e^x+\sin 2y}$ a s jeho pomocí určete $\sqrt{\sqrt{e}+\sin 1}$.

Cvičení 4.10. Spočtěte Taylorův polynom třetího stupně se středem v bodě $[1,\sqrt{3}]$ pro funkci $f(x,y)=\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Cvičení 4.11. Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě $[1,2,4]$ pro funkci $f(x,y,z)=\frac{x-y}{z}$.

5 Parciální derivace složených funkcí

5.1 Definice a věty

Definice 5.1. Nechť jsou funkce $u = g(x, y)$ a $v = h(x, y)$ definovány na oblasti Ω, přičemž množina všech příslušných bodů $[u, v]$ leží v oblasti Γ, na které je definována funkce $z = f(u, v)$. Pak je na oblasti Ω definována funkce

$$z = F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y)),$$

kterou nazýváme **složenou funkcí**. Funkce g, h nazýváme jejími **vnitřními složkami** a funkci f její **vnější složkou**.

Věta 5.2. *Nechť jsou funkce $u = g(x, y)$ a $v = h(x, y)$ spojitě diferencovatelné na oblasti Ω a funkce $z = f(u, v)$ je spojitě diferencovatelná na oblasti Γ. Potom za předpokladů uvedených v předcházející definici je složená funkce $z = F(x, y) = f(g(x, y), k(x, y))$ na oblasti Ω spojitě diferencovatelná a platí vztahy*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad a \qquad ß\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Věta 5.3. *Nechť jsou funkce $u_1 = g_1(x_1, ..., x_n)$,...,$u_m = g_m(x_1, ..., x_n)$ spojitě diferencovatelné na oblasti Ω a funkce $z = f(u_1, ..., u_m)$ je spojitě diferencovatelná na oblasti Γ. Potom je složená funkce*

$$z = F(x_1, .., x_n) = f(g_1(x_1, .., x_n), ..., g_m(x_1, .., x_n))$$

na oblasti Ω spojitě diferencovatelná a pro její parciální derivace podle jednotlivých proměnných platí vztahy

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}$$

pro všechna $j = 1, ..., n$.

5.2 Řešené příklady

Příklad 5.4. Uvažujme funkci $z = e^{x^3(x-y^2)^2}$. Navrhněte, jak by mohly vypadat její vnitřní složky a vnější složka, pokud bychom tuto funkci chtěli chápat jako složenou funkci.

Řešení. Chceme-li přistupovat k nějaké funkci jako ke složené funkci, je zapotřebí si uvědomit, že závislost proměnné z na proměnných x a y bude "zprostředkována" pomocí jiných proměnných. Není přitom určeno jednoznačně, o jaký počet proměnných se jedná, ani to, jak mají tyto závislosti vypadat. Máme tedy značnou volnost v tom, jak k úloze přistoupíme. Vyjděme třeba ze skutečnosti, že v exponentu zadané funkce se vyskytuje součin dvou funkcí, a položme

$$u = g(x, y) = x^3 \qquad v = h(x, y) = x - y^2.$$

Tím jsme vymezili vnitřní složky a zároveň odtud dostáváme, že vnější složkou je funkce $z = f(u, v) = e^{uv^2}$.

Pokud bychom provedli volbu vnitřních složek ve tvaru

$$u = g(x, y) = x^3 \qquad v = h(x, y) = (x - y^2)^2,$$

měla by pak vnější složka složené funkce tvar $z = f(u, v) = e^{uv}$.

Jaké další možnosti vás napadají?

Příklad 5.5. Uvažujme funkci $z = x^4y^6 \cos(x^3 + y^3)$. Navrhněte, jak by mohly vypadat její vnitřní složky a vnější složka, pokud bychom tuto funkci chtěli chápat jako složenou funkci.

Řešení. Ve světle úvah prováděných v předcházejícím příkladě můžeme např. položit

$$u = g(x, y) = x^4y^6 \qquad v = h(x, y) = x^3 + y^3.$$

Odtud dostáváme, že vnější složkou je funkce $z = f(u, v) = u \cos v$.

Můžeme ale také zvolit

$$u = g(x, y) = x^2y^3 \qquad v = h(x, y) = (x - y^2)^2.$$

Pak by vnější složka složené funkce měla tvar $z = f(u, v) = u^2 \cos v$.

Jaké další možnosti vás napadají?

Příklad 5.6. Vypočtěte derivaci složené funkce $z = u\sqrt{1+v^2}$, kde $u = e^{2x}$, $v = e^{-x}$.

Řešení. V tomto případě je proměnná z funkcí proměnné x. Máme tedy vypočítat obyčejnou derivaci funkce jedné proměnné pomocí pravidla pro derivování složené funkce. Využijeme vztahu

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx},$$

který v našem případě dává

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1+v^2} \cdot 2e^{2x} + \frac{uv}{\sqrt{1+v^2}} \cdot (-e^{-x}) =$$

$$= \frac{(1+e^{-2x})2e^{2x} - x}{\sqrt{1+e^{-2x}}} = \frac{2e^{2x} + 2 - x}{\sqrt{1+e^{-2x}}}.$$

Příklad 5.7. Vypočtěte derivaci složené funkce $z = uv^2w^3$, kde $u = \sin x$, $v = -\cos x$, $w = e^x$.

Řešení. Opět se jedná o výpočet obyčejné derivace funkce jedné proměnné pomocí pravidla pro derivování složené funkce. Využijeme vztahu

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx},$$

který nyní dává

$$\frac{dz}{dx} = v^2w^3 \cdot \cos x + 2uvw^3 \cdot \sin x + 3uv^2w^2 \cdot e^x =$$

$$= e^{3x}\cos x(\cos^2 x + 2\sin^2 x + 3\sin x\cos x) = e^{3x}\cos x(\sin^2 x + \frac{3}{2}\sin 2x).$$

Příklad 5.8. Vypočtěte parciální derivace složené funkce $z = \sin u \cos v$, kde $u = (x-y)^2$, $v = x^2 - y^2$ podle proměnných x a y.

Řešení. Pro výpočet využijeme vztahů ve větě 5.2, podle kterých máme nejdříve

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

a odtud

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos u \cos v \cdot 2(x-y) + (-\sin u \sin v) \cdot 2x =$$

$$= 2x \cos(u+v) - 2y \cos u \cos v.$$

Parciální derivaci podle y vypočteme podle vtahu

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos u \cos v \cdot (-2)(x-y) + (-\sin u \sin v) \cdot (-2y) =$$

$$= 2y \cos(u-v) - 2x \cos u \cos v.$$

Příklad 5.9. Vypočtěte parciální derivace složené funkce $w = yz^2 - x^3$, kde $x = e^{r-t}$, $y = \ln(r+2s+3t)$ a $z = \sqrt{rs+t}$ podle proměnných r, s a t.

Řešení. Pro výpočet využijeme vztahů ve větě 5.3, kdy $m = n = 3$. Máme

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = -3x^2 \cdot e^{r-t} + z^2 \cdot \left(\frac{1}{r+2s+3t}\right) +$$

$$+2yz \cdot \left(\frac{s}{2\sqrt{rs+t}}\right) = -3e^{3(r-t)} + \frac{rs+t}{r+2s+3t} + s\ln(r+2s+3t).$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = -3x^2 \cdot 0 + z^2 \cdot \left(\frac{2}{r+2s+3t}\right) +$$

$$+2yz \cdot \left(\frac{r}{2\sqrt{rs+t}}\right) = \frac{2(rs+t)}{r+2s+3t} + r\ln(r+2s+3t).$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial t}{\partial s} = -3x^2 \cdot (-e^{r-t}) + z^2 \cdot \left(\frac{3}{r+2s+3t}\right) +$$

$$+2yz \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{rs+t}}\right) = 3e^{3(r-t)} + \frac{3(rs+t)}{r+2s+3t} + \ln(r+2s+3t).$$

Příklad 5.10. Je dáno $g(x, y) = f(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$, přičemž o funkci f předpokládáme, že je diferencovatelná. Ukažte, že funkce g vyhovuje rovnici

$$y\frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Řešení. Položme $u = x^2 - y^2$ a $v = y^2 - x^2$. Potom na základě pravidla pro derivování složené funkce obdržíme

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}(-2x),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot (-2y) + \frac{\partial f}{\partial v}(2y).$$

Odtud vyplývá

$$y\frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = \left(2xy\frac{\partial f}{\partial u} - 2xy\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \left(-2xy\frac{\partial f}{\partial u} + 2xy\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0.$$

Příklad 5.11. Je-li dán tlak v kilopascalech, objem v litrech a teplota ve stupních Kelvina jednoho molu ideálního plynu, pak jsou tyto tři veličiny svázány vztahem $PV = 8.31T$. Určete, jak rychle se mění v daném okamžiku tlak, jestliže stávající teplota 300°K narůstá rychlostí 0,2K/s a stávající objem 100l narůstá rychlostí 0,3l/s.

Řešení. Máme vypočítat $\frac{dP}{dt}$, přičemž $P = 8,31\frac{T}{V}$.

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V}\frac{dV}{dt} = \frac{8,31}{V} \cdot 0,2 - \frac{8,31T}{V^2} \cdot 0,3 = \frac{1,662}{V} - \frac{2,493T}{V^2}.$$

Vypočteme-li hodnotu této derivace v zadaném bodě, dostaneme

$$\frac{dP}{dt}(300, 100) = \frac{1,662}{100} - \frac{2,493 \cdot 300}{100^2} = -0,05817\text{kPa/s}.$$

Příklad 5.12. Poloměr rotačního kuželu narůstá rychlostí 6mm/s, zatímco jeho výška roste rychlostí 9mm/s. Jak rychle roste jeho objem, jestliže je dáno $r = 13$mm a $h = 20$mm?

Řešení. Máme vypočítat $\frac{dV}{dt}$, přičemž $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt} = \frac{2}{3}\pi r h \cdot 4 + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 9 =$$
$$= 4\pi r h + 3\pi r^2.$$

Vyčíslíme-li hodnotu této derivace v zadaném bodě, dostaneme

$$\frac{dV}{dt}(15, 25) = \pi(4 \cdot 13 \cdot 20 + 3 \cdot 13^2) = 1547\pi \mathrm{mm}^3/s.$$

Příklad 5.13. Uvažujme funkci $z = f(u, v)$, která má spojité parciální derivace druhého řádu. Dále je dáno $u = (x^2 + y^2)$ a $v = 2xy$. Vypočtěte $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Řešení. Vyjdeme ze vtahu

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}(2x) + \frac{\partial z}{\partial v}(2y).$$

Nyní na tento vztah aplikujeme pravidlo o derivaci součinu funkcí, čímž dostaneme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\frac{\partial z}{\partial u} + 2y\frac{\partial z}{\partial v}\right) = 2\frac{\partial z}{\partial u} + 2x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + 2y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right). \quad (5.1)$$

V dalším aplikujeme znovu pravidlo pro derivování složené funkce na výrazy $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$ a $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$. Obdržíme vztahy

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot 2x + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot 2y,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot 2x + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot 2y.$$

Dosadíme-li tyto vztahy do výrazů v rovnici 5.1, pak s využitím Schwarzovy věty, která zaručuje rovnost smíšených derivací druhého řádu, získáme požadovaný vztah ve tvaru

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\frac{\partial z}{\partial u} + 2x\left(2x\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2y\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right) + 2y\left(2x\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2y\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) =$$
$$= 2\frac{\partial z}{\partial u} + 4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 8xy\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

5.3 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 5.1. Vypočtěte derivaci funkce $z = f(x, y) = \arctan(v/u)$, kde $u = \cos 3x$, $y = \sin 5x$.

Cvičení 5.2. Vypočtěte derivaci funkce $z = f(x, y) = \ln(x + y^2)$, jestliže $x = \sqrt{1+t}$, $y = 1 + \sqrt{t}$.

Cvičení 5.3. Vypočtěte derivaci funkce $z = f(x, y) = e^{-x^2-y^2)}$, kde $x = t$, $y = \sqrt{t}$.

Cvičení 5.4. Vypočtěte $\frac{\partial w}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$, je-li dáno $w = f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $x = s - t$, $y = s + t$, $z = \sqrt{st}$.

Cvičení 5.5. Vypočtěte $\frac{\partial w}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$, je-li dáno $w = f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $x = s^2 r$, $y = r^2 s$, $z = 4e^t$.

Cvičení 5.6. Vypočtěte $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$, je-li dáno $w = f(x, y, z) = x^2 y + yz^2$, $x = rst$, $y = rs/t$, $z = 1/rst$.

Cvičení 5.7. Vypočtěte $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$, je-li dáno $w = f(x, y, z) = e^{\frac{xy}{z}}$, kde $x = r^2 + t^2$, $y = s^2 - t^2$, $z = r^2 + s^2$.

Cvičení 5.8. Uvažujme funkci $z = f(x, y)$, kde $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$. Vypočtěte $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \phi}$.

Cvičení 5.9. Jestliže $z = f(x - y)$, rozhodněte, zda platí $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Cvičení 5.10. Ukažte, že každá funkce tvaru $z = f(x + at) + g(x - at)$ je řešením rovnice $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

6 Derivace v daném směru

6.1 Definice a věty

Definice 6.1. Nechť je funkce $f(x,y)$ definovaná na oblasti Ω, ve které leží bod $[x_0,y_0]$, a nechť $\vec{u}=(u_1,u_2)$. Jestliže existuje limita tvaru

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+hu_1,y_0+hu_2)-f(x_0,y_0)}{h},$$

nazýváme ji **směrovou derivací** funkce $f(x,y)$ ve směru vektoru $\vec{u}$ v bodě $[x_0,y_0]$ a značíme ji

$$f_{\vec{u}}(x_0,y_0).$$

Definice 6.2. Obdobným způsobem je možné definovat pojem směrové derivace pro funkci tří a více proměnných v bodě $[x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*]$, tj. jako limitu tvaru

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1^*+hu_1,x_2^*+hu_2,\dots x_n^*+hu_n)-f(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*)}{h}=$$
$$=f_{\vec{u}}(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*).$$

Věta 6.3. *Je-li funkce $f(x,y)$) diferencovatelná na okolí bodu $[x_0,y_0]$, pak má v tomto bodě směrovou derivaci ve s směru libovolného vektoru $\vec{u}=(u_1,u_2)$ a platí vztah*

$$f_{\vec{u}}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)u_1+f_y(x_0,y_0)u_2.$$

Definice 6.4. Gradientem funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0]$ nazýváme vektor, jehož souřadnicemi jsou parciální derivace fce f v tomto bodě a značíme jej

$$\nabla f(x_0,y_0)=(f_x(x_0,y_0,f_y(x_0,y_0)).$$

Věta 6.5. *Předpokládejme, že funkce f má v daném bodě $[x_0,y_0]$ derivaci ve směru libovolného vektoru $\vec{u}$. Pak je hodnota směrové derivace funkce f ve směru vektorů o stejné délce maximální pro vektor, který má stejný směr jako gradient.*

6.2 Řešené příklady

Příklad 6.6. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y) = xy^2$ v bodě $[4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (2,3)$.

Řešení. Podle věty (6.3) stačí vypočítat parciální derivace funkce $f(x,y)$ v daném bodě. Máme tedy

$$f_x = y^2, \quad \text{tj. } f_x(4,-1) = 1 \qquad \text{a} \qquad f_y = 2yx, \quad \text{tj. } f_y(2,1) = -8$$

a po dosazení do příslušného vztahu dostáváme

$$f_{\vec{u}}(4,-1) = 1 \cdot 2 + (-8) \cdot (3) = -22.$$

Příklad 6.7. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y) = y^2 \ln x$ v bodě $[1,4]$ ve směru jednotkového vektoru daného úhlem $\pi/6$.

Řešení. Derivaci budeme počítat ve směru vektoru $(\cos(\pi/6), \sin(\pi/6))$. Jestliže dále vypočteme

$$f_x = y^2/x, \quad \text{tj. } f_x(1,4) = 16 \qquad \text{a} \qquad f_y = 2y \ln x, \quad \text{tj. } f_y(1,4) = 0,$$

dostáváme po dosazení do příslušného vztahu

$$f_{\vec{u}}(1,4) = 16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot \frac{1}{6} = 8\sqrt{3}.$$

Příklad 6.8. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y,z) = x \ln y - e^{xz^3}$ v bodě $[-5,1,-2]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1,-1,3)$.

Řešení. Analogický vztah jako ve větě (6.3) platí i pro funkce tří a více proměnných. Nejdříve je zapotřebí vypočítat parciální derivace prvního řádu funkce $f(x,y,z)$ v daném bodě. Máme tedy

$$f_x = \ln y, \quad \text{tj. } f_x(-5,1,-2) = 0 \quad \text{a} \quad f_y = x/y, \quad \text{tj. } f_y(-5,1,-2) = -5$$

$$\text{a} \qquad f_z = -3xz^2 \cdot e^{xz^3}, \quad \text{tj. } f_z(-5,1,-2) = 60e^{40}$$

a po dosazení do příslušného vztahu dostáváme

$$f_{\vec{u}}(-5,1,-2) = 0 \cdot 1 + (-5) \cdot (-1) + (60e^{40}) \cdot 3 = 5 + 180e^{40}.$$

Příklad 6.9. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y, z) = z - e^x \sin y$ v bodě $[\ln 3, 3\pi/2, -3]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (2, 3, 6)$.

Řešení. Opět je zapotřebí vypočítat parciální derivace funkce $f(x, y, z)$ v daném bodě. Máme tedy

$$f_x = -e^x \sin y, \quad \text{tj. } f_x(\ln 3, 3\pi/2, -3) = 3,$$

$$f_y = -e^x \cos y, \quad \text{tj. } f_y(\ln 3, 3\pi/2, -3) = 0$$

a

$$f_z = 1 \cdot e^{xz^3}, \quad \text{tj. } f_z(\ln 3, 3\pi/2, -3) = 1$$

a po dosazení do příslušného vztahu dostáváme

$$f_{\vec{u}}(\ln 3, 3\pi/2, -3) = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 6 = 12.$$

Příklad 6.10. Vypočtěte gradient funkce $f(x, y) = \sqrt{x^3 y - y^3}$ v bodě $[2, 2]$.

Řešení. Složkami gradientu funkce f v daném bodě jsou parciální derivace funkce fv tomto bodě. Máme tedy

$$\nabla f(2, 3) = (f_x(2, 3), f_y(2, 3)).$$

Ze vztahů

$$f_x = \frac{3x^2 y}{2\sqrt{x^3 y - y^3}} \qquad \text{a} \qquad f_y = \frac{x^3 - 3y^2}{2\sqrt{x^3 y - y^3}}$$

plyne

$$\nabla f(2, 3) = (f_x(2, 3), f_y(2, 3)) = (\frac{6}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Příklad 6.11. Vypočtěte gradient funkce $f(x, y, z) = x^2 z^2 \sin(4y)$ v bodě $[-2, \pi/3, 1]$.

Řešení. Složkami gradientu funkce f v daném bodě jsou parciální derivace funkce fv tomto bodě. Máme tedy

$$\nabla f(-2, \pi/3, 1) = (f_x(-2, \pi/3, 13), f_y(-2, \pi/3, 1), f_z(-2, \pi/3, 1)).$$

Ze vztahů

$$f_x = 2xz^2 \sin(4y), \qquad f_y = 4x^2 z^2 \cos(4y) \qquad \text{a} \qquad f_z = 2x^2 z \sin(4y)$$

plyne

$$\nabla f(-2,\pi/3,1) = (2\sqrt{3}, -8, -4\sqrt{3}).$$

Příklad 6.12. Najděte maximální hodnotu směrové derivace funkce dané vztahem $f(x,y) = 2x^2y + xe^{y^2}$ v bodě $[1,0]$ pro vektory délky 1 a jednotkový vektor, pro který toto maximum nastává.

Řešení. Parciální derivace funkce f jsou dány vztahy

$$f_x = 4xy + e^{y^2} \qquad \text{a} \qquad f_y = 2x^2 + 2xyey^2,$$

což nám dává

$$\nabla f(1,0) = (1,2).$$

Jednotkový vektor, který má stejný směr jako gradient, má tedy souřadnice $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$. Maximální hodnota směrové derivace pak vychází $\sqrt{5}$.

Příklad 6.13. Najděte maximální hodnotu směrové derivace funkce dané vztahem $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1}$ v bodě $[1,2,-3]$ pro vektory délky 1 a jednotkový vektor, pro který toto maximum nastává.

Řešení. Parciální derivace funkce f jsou dány vztahy

$$f_x = -\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}, f_y = -\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^2} \quad \text{a} \qquad f_z = -\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

což nám dává

$$\nabla f(3,1,1) = (-\frac{1}{98}, -\frac{1}{49}, \frac{3}{98}).$$

Jednotkový vektor, který má stejný směr jako gradient, má tedy souřadnice $(-\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}})$. Maximální hodnota směrové derivace pak vychází $\sqrt{14}/98$.

Příklad 6.14. Teplota vyhřívaného kovového plátu v bodě $[x,y]$ je ve stupních Celsia dána vztahem

$$T(x,y) = \frac{300}{x^2+y^2+3},$$

přičemž hodnoty x a y jsou udávány v centimetrech. Jakým směrem se máme pohybovat z bodu $[-4,3]$, jestliže chceme sledovat nejprudší nárůst teploty v plátu? Jaký je okamžitý nárůst teploty, pokud se z bodu $[-4,3]$ vydáme tímto směrem?

Řešení. Víme, že k nejrychlejšímu růstu funkčních hodnot dochází ve směru gradientu. V našem případě máme

$$T_x = -\frac{600x}{(x^2+y^2+3)^2} \quad \text{a} \qquad T_y = -\frac{600y}{(x^2+y^2+3)^2}.$$

Gradient funkce T v bodě $[-4,3]$ je tedy vektor

$$\nabla T(4,3) = (\frac{2400}{784}, -\frac{1800}{784}).$$

Jednotkový vektor $\vec{u}$ mající stejný směr jako gradient má tedy souřadnice $\vec{u} = (4/5, 3/5)$. Maximální hodnota směrové derivace ve směru gradientu, resp. vektoru $\vec{u}$, uvažujeme-li vektory jednotkové délky, je $\frac{375}{98}$. To znamená, že okamžitý nárůst teploty v bodě $[-4,3]$ je $\frac{375}{98} \approx 3,83$ stupňů Celsia na jeden centimentr vzdálenosti.

Příklad 6.15. Stojíte na kopci, jehož tvar je popsán funkcí $f(x,y) = 500 - 0,003x^2 - 0,004y^2$. Vaše poloha je dána bodem $[-100,-100,430]$. Jak prudké stoupání vás čeká, jestliže se vydáte na severozápad?

Řešení. Máme-li se pohybovat severozápadním směrem, odpovídá to v kartézské soustavě souřadné směru, který je dán úhlem $3\pi/4$ neboli $135°$. To znamená, že máme vypočítat směrovou derivaci ve směru vektoru $\vec{u} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Parciální derivace v bodě $[-100,-100]$ mají hodnoty

$$f_x(-100,-100) = -0,6 \quad \text{a} \qquad f_y(-100,-100) = -0,8.$$

Hodnota požadované směrové derivace činí

$$f_{\vec{u}}(-100,-100) = 0,6 \cdot (-\frac{\sqrt{1}}{2}) + 0,8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,14.$$

Při cestě severozápadním směrem nás tedy čeká čtrnáctiprocentní stoupání.

6.3 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 6.1. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \sqrt{x - y}$ v bodě $[5, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (12, 5)$.

Cvičení 6.2. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = e^x \cos y$ v bodě $[1, \pi/6]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1, -1)$.

Cvičení 6.3. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = x^2y^3 + 2x^4y$ v bodě $[1, -2]$ ve směru jednotkového vektoru daného úhlem $\pi/6$.

Cvičení 6.4. Vypočtěte směrovou derivaci funkce, která je daná vztahem $f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ v bodě $[-1, 2, 3]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1, -1, 1)$.

Cvičení 6.5. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y, z) = \sqrt{x^2y + 2y^2z}$ v bodě $[-2, 2, 1]$ ve směru záporné poloosy z.

Cvičení 6.6. Vypočtěte gradient funkce $f(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$ v bodě $[1, -2]$.

Cvičení 6.7. Vypočtěte gradient funkce tří proměnných, která je daná vztahem $f(x, y, z) = 2\sqrt{xyz}$ v bodě $[3, -4, -3]$.

Cvičení 6.8. Najděte minimální hodnotu směrové derivace funkce dané vztahem $f(x, y) = \tan(x^2 + y^2)$ v bodě $[\sqrt{\pi/6}, \sqrt{\pi/6}]$ pro vektory jednotkové délky a vektor, pro který toto minimum nastává.

Cvičení 6.9. Najděte maximální hodnotu směrové derivace funkce dané vztahem $f(x, y) = x^2 + 4xz + 2yz^2)$ v bodě $[1, 2, -1]$ pro vektory jednotkové délky a vektor, pro který toto maximum nastává.

Cvičení 6.10. Teplota vyhřívaného kovového plátu v bodě $[x, y]$ je ve stupních Celsia dána vztahem

$$T(x, y) = \frac{400}{x^2 + y^2 + 2},$$

přičemž hodnoty x a y jsou udávány v centimetrech. Jakým směrem se máme pohybovat z bodu $[1, 1]$, jestliže chceme sledovat nejprudší nárůst teploty v plátu? Jaký je okamžitý nárůst teploty pokud se z bodu $[1, 1]$ vydáme tímto směrem?

7 Implicitní funkce

7.1 Definice a věty

Definice 7.1. Buď $F(x, y)$ funkce dvou proměnných. Označme

$$\Omega = \{[x, y] \in \mathcal{D}(F); F(x, y) = 0\}$$

a nechť $P = [x_0, y_0] \in \mathcal{D}(F)$ je bod definičního oboru funkce $F(x, y)$ takový, že $P \in \Omega$. Je-li rovnicí $F(x, y) = 0$ určena na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ funkce $y = f(x)$ tak, že pro $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $F(x, f(x)) = 0$, pak se funkce $f(x)$ nazývá **implicitní funkce** určená rovnicí $F(x, y) = 0$.

Věta 7.2. *Nechť $F(x, y)$ je funkce dvou proměnných a má tyto tři vlastnosti:*

- *má na nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace prvního řádu,*
- *v bodě $[x_0, y_0]$ je $F(x_0, y_0) = 0$,*
- *parciální derivace $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.*

Pak rovnicí $F(x, y) = 0$ je na určitém okolí bodu $[x_0, y_0]$ $\mathcal{O}([x_0, y_0])$, definována právě jedna implicitní funkce $y = f(x)$ taková, že

- *má graf procházející bodem $[x_0, y_0]$, tj. $y_0 = f(x_0)$*
- *je spojitá na okolí $\mathcal{O}([x_0, y_0])$,*
- *má v bodě x_0 derivaci a platí $y'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$.*

Poznámka 7.3.

1. Je-li funkce $y = f(x)$ dána rovnicí $F(x, y) = 0$ a funkce $F(x, y)$ je jedenkrát spojitě diferencovatelná, můžeme použít pravidla pro derivovaní složené funkce a dostaneme

$$F_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + F_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \text{neboli} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

pro $F_y \neq 0$.

2. Je-li funkce $F(x, y)$ dvakrát spojitě diferencovatelná, pak implicitní funkce $y = f(x)$ v bodě $[x_0, y_0]$ má pro $F_y([x_0, y_0]) \neq 0$ druhou derivaci

$$y''(x_0) = \frac{1}{(F_y([x_0, y_0]))^3} \begin{vmatrix} 0 & F_x([x_0, y_0]) & F_y([x_0, y_0]) \\ F_x([x_0, y_0]) & F_{xx}([x_0, y_0]) & F_{xy}([x_0, y_0]) \\ F_y([x_0, y_0]) & F_{xy}([x_0, y_0]) & F_{yy}([x_0, y_0]) \end{vmatrix}$$

Věta 7.4. *Nechť $F(x, y, z)$ je funkce tří proměnných a má tyto tři vlastnosti:*

- *má na nějakém okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ spojité parciální derivace prvního řádu,*
- *v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ je $F(x_0, y_0, z_0) = 0$,*
- *parciální derivace $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.*

Pak existuje na vhodném okolí $\mathcal{O}([x_0, y_0])$ právě jedna taková implicitní funkce $z = f(x, y)$, že

- *identicky vyhovuje rovnici $F([x, y, z]) = 0$, takže $F(x, y, f(x, y)) = 0$,*
- *jde bodem $[x_0, y_0]$, takže $z_0 = f(x_0, y_0)$,*
- *je spojitá na okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ a má parciální derivace*

$$f_x(x_0, y_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad f_y(x_0, y_0) = -\frac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

7.2 Řešené příklady

Příklad 7.5. Vypočítejte první derivaci implicitní funkce $x^y - y^x = 0$, $x > 0$, $y > 0$.

Řešení. Označme $F(x, y) = x^y - y^x$. Podmínky věty 7.2 jsou splněny, pokud $F_y(x, y) = x^y \ln x - xy^{x-1} \neq 0$. Derivováním $F(x, y)$ podle x dostáváme $F_x(x, y) = yx^{y-1} - y^x \ln y$. Odtud

$$y' = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{x^y \ln x - xy^{x-1}}.$$

Místo použití věty 7.2 můžeme použít alternativní přístup. Zderivujeme rovnici $x^y - y^x = 0$ podle x. Derivace dává

$$yx^{y-1} + y'x^y \ln x - y^x \ln y - xy'y^{x-1} = 0,$$

odtud vyjádřením y' dostáváme

$$y' = \frac{y^x \ln y - yx^{y-1}}{x^y \ln x - xy^{x-1}}.$$

Úpravou výrazu získáváme $y' = \frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}$.

Příklad 7.6. Vypočítejte y' pro funkci zadanou rovnicí $\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ v bodě $[1, 0]$.

Řešení. Označme $F(x, y) = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Opět máme možnost počítat dvěma způsoby jako v předešlém příkladu. Nyní si vybereme výpočet bez použití věty 7.2. Rovnici $\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ derivujeme podle x, y bereme za funkci proměnné x. Pak dostáváme

$$-\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2+y^2}}} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{2x^2 + 2yy'}{2\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \right] = 0.$$

Z této rovnice vyjádříme y',

$$y' = \frac{y}{x}$$

a dosadíme bod $[1, 0]$, tj. $y'(1) = \frac{0}{1} = 0$.

Příklad 7.7. Vypočítejte první a druhou derivaci implicitní funkce dané rovnicí $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ v bodě $[2, 0]$.

Řešení. Označme $F(x, y) = e^{xy} + \sin y + y^2 - 1$.
1. Při určování y' budeme vycházet z věty 7.2. Vypočítáme jednotlivé parciální derivace funkce F podle proměnných x a y v bodě $[2, 0]$,

$$F_x(2, 0) = (ye^{xy})|_{[2,0]} = 0, \quad F_y(2, 0) = (xe^{xy} + \cos y + 2y)|_{[2,0]} = 3.$$

Jsou splněny všechny podmínky věty 7.2, můžeme tedy dosadit do vzorce pro derivaci implicitní funkce a dostáváme

$$y'(2) = -\frac{ye^{xy}}{xe^{xy} + \cos y + 2y}\bigg|_{[2,0]} = -\frac{0}{3} = 0.$$

Pro určení druhé derivace využijeme vztah z poznámky 7.3. Vypočteme jednotlivé hodnoty parciálních derivací, tj.

$$\begin{vmatrix} 0 & (ye^{xy}) & xe^{xy}+\cos y+2y \\ ye^{xy} & y^2e^{xy} & e^{xy}+xye^{xy} \\ xe^{xy}+\cos y+2y & e^{xy}+xye^{xy} & x^2e^{xy}-\sin y+2 \end{vmatrix}$$

vyčíslíme je v bodě $[2,0]$ a spočteme příslušný determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Hodnota druhé derivace je

$$y''(2) = \frac{1}{(xe^{xy}+\cos y+2y)^3}\Big|_{[2,0]} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{3^3}\cdot 0 = 0.$$

2. Totéž můžeme získat i jiným způsobem. Hledáme y' pomocí derivace složené funkce, tj. v rovnici $e^{xy}+\sin y+y^2=1$ bereme y za funkci proměnné x a rovnici derivujeme podle x. Pak dostáváme

$$ye^{xy}+xy'e^{xy}+y'\cos y+2yy'=0.$$

Z této rovnice vyjádříme y',

$$y' = \frac{-ye^{xy}}{xe^{xy}+\cos y+2y},$$

dosadíme bod $[2,0]$ a dostáváme

$$y'(2)=0.$$

K získání druhé derivace implicitní funkce y'' derivujeme zadanou rovnici $e^{xy}+\sin y+y^2=1$ dvakrát podle x (neustále předpokládáme závislost y na x) a vyjádříme y''. Rovnici implicitní funkce jsme již jednou podle x derivovali, stačí tedy přidat ještě jednu derivavi podle x,

$$((xe^{xy}+\cos y+2y)y' = -ye^{xy})',$$

$$(e^{xy}+xye^{xy}+x^2y'e^{xy}-y'\sin y+2)y'+(xe^{xy}+\cos y+2y)y'' = -e^{xy}(y'+y^2+xyy')$$

Odtud vyjádříme y''

$$y'' = \frac{-2y'e^{xy} - y^2e^{xy} - 2xyy'e^{xy} - x^2(y')^2e^{xy} - 2y' + (y')^2\sin y}{xe^{xy} + \cos y + 2y},$$

$$y''(2) = 0.$$

Příklad 7.8. Napište rovnici tečny a normály ke křivce dané implicitně rovnicí $y - \frac{1}{2}\sin y = x$ v bodě $[\pi, \pi]$.

Řešení. Rovnice tečny je $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Dosadíme do rovnice za f' výraz uvedený ve větě 7.2 a dostáváme $y - y_0 = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}(x - x_0)$.
Označme $F(x,y) = y - \frac{1}{2}\sin y - x$. Platí $F_y(x,y) = 1 - \frac{1}{2}\cos y$ a její hodnota v bodě $[\pi,\pi]$ je $F_y(\pi,\pi) = \frac{3}{2} \neq 0$ a jsou splněny všechny předpoklady věty 7.2. Tedy rovností $y - \frac{1}{2}\sin y = x$ je v jistém okolí bodu $[\pi,\pi]$ určena implicitně funkce $y = f(x)$. Její derivace v bodě $x = \pi$ je

$$f'(\pi) = -\frac{F_x(\pi,\pi)}{F_y(\pi,\pi)} = -\frac{-1}{1 - \frac{1}{2}\cos y}\Big|_{[\pi,\pi]} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Rovnice tečny t je $y - \pi = \frac{2}{3}(x - \pi)$, tj. $\frac{2}{3}x - y + \frac{1}{3}\pi = 0$.
Normála n je přímka kolmá k tečně, využijeme faktu, že směrový vektor tečny je stejný jako normálový vektor normály. V našem případě je normálový vektor tečny $\mathbf{n}_t = (\frac{2}{3}, -1)$, směrový vektor tečny $\mathbf{s}_t = (1, \frac{2}{3})$ je totožný s normálovým vektorem normály n. Tudíž rovnice normály n je daná rovnicí $x + \frac{2}{3}y - \frac{5}{3}\pi = 0$.

Poznámka 7.9. Hodnota $-\frac{5}{3}\pi$ se dopočte dosazením normálového vektoru normály $\mathbf{n}_n = (1, \frac{2}{3})$ a bodu $[\pi,\pi]$ do obecné rovnice přímky v rovině.

Příklad 7.10. Rozhodněte, zda křivka $y - \frac{1}{2}\sin y = x$ leží v okolí bodu $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Řešení. K tomu, abychom určili, zda bod $[\pi,\pi]$ leží pod nebo nad tečnou, musíme spočíst druhou derivaci podle x. Budeme určovat, zda implicitně určená funkce je v bodě $x = \frac{\pi-1}{2}$ konvexní nebo konkávní. Derivujeme-li rovnici $y - \frac{1}{2}\sin y - x = 0$ podle x (připomeňme si, že uvažujeme y jako funkci proměnné x), dostáváme $y' - \frac{1}{2}y'\cos y - 1 = 0$. Dalším derivováním podle x obdržíme

$$y'' - \frac{1}{2}y''\cos y + \frac{1}{2}y'\sin y = 0$$

a odtud
$$y'' = \frac{-\frac{1}{2}y' \sin y}{1 - \frac{1}{2}\cos y}.$$
Dosadíme-li do tohoto vztahu bod $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dostaneme $y''(\frac{\pi-1}{2}) = -\frac{1}{2}$. To znamená, že křivka leží v okolí bodu $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pod tečnou, neboť implicitně určená funkce je v bodě $x = \frac{\pi-1}{2}$ konkávní (druhá derivace v daném bodě je záporná).

Příklad 7.11. Nalezněte lokální extrémy funkce dané implicitně rovnicí $-x^2 + y^2 - 2xy + y = 0$.

Řešení. Derivováním rovnosti implicitně zadávající y jako funkci proměnné x dostáváme
$$-2x + 2yy' - 2y - 2xy' + y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{2x + 2y}{1 - 2x + 2y}.$$
Z podmínky $y' = 0$ máme $y = -x$. Dosazením $y = -x$ do zadané rovnice $-x^2 + y^2 - 2xy + y = 0$ dostáváme $x(2x - 1) = 0$ a odtud $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $y_1 = 0$, $y_2 = -\frac{1}{2}$. Máme dva stacionární body: $P = [0, 0]$, $Q = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$. Nyní spočteme y'' v těchto nalezených bodech. Derivujeme zadanou rovnici podruhé podle x,
$$((1 - 2x + 2y)y' = 2x + 2y)' \Rightarrow (-2 + 2y')y' + (1 - 2x + 2y)y'' = 2 + 2y'.$$
Odtud
$$y'' = \frac{2 + 4y' - 2(y')^2}{1 - 2x + 2y}.$$
Nyní do y'' dosadíme stacionární body. Pro bod $P = [0, 0]$ obdržíme hodnotu druhé derivace $y''(0) = 2 > 0$, je tedy bodem lokálního minima. V bodě $Q = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$ dostáváme $y''(\frac{1}{2}) = -2 < 0$, je zde lokální maximum.

Příklad 7.12. Vypočtěte parciální derivace implicitní funkce z dané rovnicí $\ln x^2 z^3 = e^{z \cos y}$.

Řešení. Označme $F(x, y, z) = \ln x^2 z^3 - e^{z \cos y}$. Parciální derivace z_x, z_y vypočteme pomocí věty 7.4 ,
$$z_x = f_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\frac{2xz^3}{x^2z^3}}{\frac{3x^2z^2}{x^2z^3} - e^{z \cos y} \cos y} = -\frac{\frac{2}{x}}{\frac{3}{z} - e^{z \cos y} \cos y},$$

$$z_y = f_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{e^{z\cos y} z \sin y}{\frac{3}{z} - e^{z\cos y}\cos y},$$

za předpokladu, že $F_z = \frac{3}{z} - e^{z\cos y}\cos y \neq 0$. Totéž můžeme spočíst i jiným způsobem. Budeme hledat z_x, z_y podle níže popsaného postupu. Nejdříve spočteme z_x, tj. v rovnici implicitní funkce $F(x, y, z) = 0$ budeme uvažovat y jako konstantu a z bude funkcí x, y. Rovnici zderivujeme podle x a vyjádříme derivaci z_x. Tentýž postup platí i pro určení derivace z podle y jen s tím rozdílem, že v rovnici implicitní funkce $F(x, y, z) = 0$ budeme uvažovat proměnnou x jako konstantu a rovnici derivujeme podle y.

$$(\ln x^2 z^3 = e^{z\cos y})_x \;\Rightarrow\; \frac{2xz^3}{x^2z^3} + \frac{3x^2z^2z_x}{x^2z^3} = e^{z\cos y} z_x \cos y.$$

Odtud vyjádříme z_x,

$$z_x = \frac{\frac{2}{x}}{e^{z\cos y} - \frac{3}{z}}.$$

$$(\ln x^2 z^3 = e^{z\cos y})_y \;\Rightarrow\; \frac{3x^2z^2z_y}{x^2z^3} = e^{z\cos y} z_y \cos y - e^{z\cos y} z \sin y.$$

Odtud vyjádříme z_y,

$$z_y = \frac{-e^{z\cos y} z \sin y}{\frac{3}{z} - e^{z\cos y}\cos y}.$$

Příklad 7.13. Vypočtěte první i druhé parciální derivace implicitní funkce z dané rovnicí $z + e^z = xy + 1$ v bodě $[-1, 1, 0]$.

Řešení. Označme $F(x, y, z) = z + e^z - xy - 1$. Parciální derivace z_x, z_y vypočteme pomocí věty 7.4.

$$z_x(-1, 1) = f_x(-1, 1) = -\frac{F_x}{F_z}\Big|_{[-1,1,0]} = -\frac{-y}{1 + e^z}\Big|_{[-1,1,0]} = \frac{1}{2}.$$

$$z_y(-1, 1) = f_y(-1, 1) = -\frac{F_y}{F_z}\Big|_{[-1,1,0]} = -\frac{-x}{1 + e^z}\Big|_{[-1,1,0]} = -\frac{1}{2}.$$

Alternativně můžeme první derivaci podle x a podle y spočíst následovně. Derivujeme-li rovnici podle x, uvažujeme, že z je funkce dvou proměnných x, y a y považujeme za konstantu. Stejný postup platí pro derivaci rovnice podle y s tím rozdílem, že nyní za konstantu budeme uvažovat proměnnou x.

$$(z + e^z = xy + 1)_x \;\Rightarrow z_x + e^z z_x = y \;\Rightarrow z_x = \frac{y}{1 + e^z},$$

dosadíme bod $[-1,1,0]$ a máme $z_x(-1,1) = \frac{1}{2}$. Analogicky spočteme derivaci z_y ,

$$(z + e^z = xy + 1)_y \quad \Rightarrow z_y + e^z z_y = x \quad \Rightarrow z_y = \frac{x}{1+e^z}$$

a v bodě $[-1,1,0]$ dostáváme hodnotu $z_y(-1,1) = -\frac{1}{2}$. Nyní zbývá spočíst druhé derivace, tedy z_{xx}, z_{xy} a z_{yy}. K jejich výpočtu využijeme již spočtené první derivace a budeme je derivovat ještě jednou buď podle x nebo podle y. Mějme na paměti, že uvažujeme z jako funkci dvou proměnných x, y. Při derivaci podle x vystupuje y jako konstanta a obráceně. Nejdříve vypočítáme derivaci z_{xx}, tj. derivujeme z_x podle x,

$$(z_x + e^z z_x = y)_x \quad \Rightarrow z_{xx} + e^z (z_x)^2 + e^z z_{xx} = 0 \quad \Rightarrow z_{xx} = -\frac{e^z (z_x)^2}{1+e^z}.$$

Hodnota z_{xx} v bodě $[-1,1,0]$ je $z_{xx}(-1,1) = -\frac{1}{8}$.
Dále počítáme derivaci z_{xy}, tj. derivujeme z_x podle y,

$$(z_x + e^z z_x = y)_y \quad \Rightarrow z_{xy} + e^z z_y z_x + e^z z_{xy} = 1 \quad \Rightarrow z_{xy} = \frac{1 - e^z z_y z_x}{1+e^z}.$$

Hodnota z_{xy} v bodě $[-1,1,0]$ je $z_{xy}(-1,1) = \frac{5}{8}$.
Zbývá spočíst derivaci z_{yy}, tj. derivujeme z_y podle y,

$$(z_y + e^z z_y = x)_y \quad \Rightarrow z_{yy} + e^z (z_y)^2 + e^z z_{yy} = 0 \quad \Rightarrow z_{yy} = -\frac{e^z (z_y)^2}{1+e^z}.$$

Hodnota z_{yy} v bodě $[-1,1,0]$ je $z_{yy}(-1,1) = -\frac{1}{8}$.
S ohledem na Schwarzovu větu není potřeba počítat derivaci z_{yx}.

Příklad 7.14. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce z zadané implicitně rovnicí $z = \ln \frac{1-x+y}{1+x+y}$ v bodě $[-1,1,?]$.

Řešení. Označme $F(x,y,z) = \ln \frac{1-x+y}{1+x+y} - z$. Rovnice tečné roviny k funkci $z = f(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0]$ má tvar

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Nejprve zjistíme hodnotu $z_0 = f(x_0,y_0)$. Dosadíme bod $[x_0,y_0] = [-1,1]$ do rovnice $z = \ln \frac{1-x+y}{1+x+y}$:

$$z_0 = \ln \frac{1-(-1)+1}{1+(-1)+1} = \ln \frac{3}{1} = \ln 3.$$

Určíme parciální derivace funkce z,

$$z_x = f_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\frac{2(1+y)}{x^2-(y+1)^2}}{-1}, \quad z_y = f_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\frac{2x}{(y+1)^2-x^2}}{-1}.$$

Hodnoty parciálních derivací v bodě $[-1, 1, \ln 3]$ tedy jsou

$$z_x(-1,1) = f_x(-1,1) = \frac{2(1+y)}{x^2-(y+1)^2}\Big|_{[-1,1,\ln 3]} = -\frac{4}{3},$$

$$z_y(-1,1) = f_y(-1,1) = \frac{2x}{(y+1)^2-x^2}\Big|_{[-1,1,\ln 3]} = -\frac{2}{3}.$$

Vypočtené hodnoty derivací v bodě $[-1, 1, \ln 3]$ dosadíme do vzorce pro tečnou rovinu a dostáváme

$$z - \ln 3 = -\frac{4}{3}(x+1) - \frac{2}{3}(y-1),$$

po úpravě

$$4x + 2y + 3z + 2 - 3\ln 3 = 0.$$

7.3 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 7.1. Vypočítejte y' pro funkci zadanou rovnicí $xy \ln(x+y) = 0$.

Cvičení 7.2. V bodě $[0,0]$ vypočítejte první derivaci implicitní funkce dané rovnicí $e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2$.

Cvičení 7.3. Vypočítejte první a druhou derivaci implicitní funkce dané rovnicí $\sin xy + \cos xy = -1$ v bodě $[1, \pi]$.

Cvičení 7.4. Vypočítejte první a druhou derivaci implicitní funkce dané rovnicí $e^{\cos x} + \sin y^2 + x^2y^3 + y = 1$ v bodě $[\frac{\pi}{2}, 0]$.

Cvičení 7.5. Napište rovnici tečny a normály ke křivce dané implicitně rovnicí $xy + \ln y - 1 = 0$ v bodě $[1,1]$.

Cvičení 7.6. Nalezněte lokální extrémy funkce zadané implicitně rovnicí $x^2 - y^2 + 1 = 0$.

Cvičení 7.7. Vypočtěte parciální derivace implicitní funkce z dané rovnicí $\frac{z-x}{y} = 3$.

Cvičení 7.8. Spočtěte parciální derivace implicitní funkce z dané rovnicí $\arctan x + \arctan y + \arctan z = 5$.

Cvičení 7.9. Spočtěte první a druhé parciální derivace funkce z, která je implicitně daná rovnicí $y^{\frac{z}{x}} = 2$, v bodě $[1,2,1]$.

Cvičení 7.10. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce z zadané implicitně rovnicí $z = x^4 + 2x^2y - xy + x$ v bodě $[1, 0, ?]$.

8 Volné extrémy funkcí n proměnných

8.1 Definice a věty

Definice 8.1. **n-ární kvadratickou formou** nazýváme polynom druhého stupně n argumentů, který lze psát v následujícím tvaru

$$\Phi_2(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{i,j=1, i<j}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

kde $a_{ij} = a_{ji}$.

Definice 8.2. Kvadratická n-ární forma se nazývá

- **kladně definitní**, jestliže v bodech různých od počátku nabývá pouze kladných hodnot.
- **záporně definitní**, jestliže v bodech různých od počátku nabývá pouze záporných hodnot.
- **kladně semidefinitní**, jestliže v bodech různých od počátku nabývá pouze nezáporných hodnot.
- **záporně semidefinitní**, jestliže v bodech různých od počátku nabývá pouze nekladných hodnot.
- **indefinitní**, jestliže v bodech různých od počátku nabývá jak kladných, tak záporných hodnot.

Věta 8.3. *Nechť D_1, D_2,..., D_n jsou základní hlavní minory determinantu D kvadratické formy Φ. Pak je tato forma*

- *kladně definitní, právě když jsou všechny její základní hlavní minory kladné*
- *záporně definitní, právě když je kvadratická forma $-\Phi$ kladně definitní*
- *indefinitní, je-li alespoň jeden z minorů sudého řádu záporný*

Definice 8.4. Říkáme, že funkce $f(x_1, \dots x_n)$ má na oblasti Ω **lokální maximum**, popř. **lokální minimum** v bodě $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*] \in \Omega$ právě tehdy, když existuje prstencové okolí $P(x^*) \subseteq \Omega$ takové, že platí

$$f(x) \leq f(x^*), \qquad \text{popř.} \qquad f(x) \geq f(x^*)$$

pro každý bod $x \in P(x^*)$. Jsou-li uvedené nerovnosti splněny ostře, hovoříme o **ostrém** lokálním maximu, popř. minimu a analogicky také o jejich ostrých formách.

Souhrnně nazýváme maximální a minimální hodnoty funkce f jejími **extrémními hodnotami**, stručně jen extrémy.

Věta 8.5. *(Fermatova) Jestliže má funkce $f(x_1, \dots x_n)$ lokální extrém v bodě $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ a je vněm spojitě diferencovatelná, pak*

$$f_{x_1}(x^*) = f_{x_2}(x^*) = \dots = f_{x_n}(x^*) = 0 \qquad \textit{neboli} \qquad df(x^*) = 0$$

Definice 8.6. Bod x^*, ve kterém jsou všechny parciální derivace prvního řádu funkce n nulové, nazýváme **stacionárním bodem** funkce f.

Věta 8.7. *Nechť $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ je stacionární bod funkce, na jehož okolí má funkce f spojité všechny parciální drivace druhého řádu. Uvažujme kvadratickou formu Φ, kterou představuje diferenciál druhého řádu funkce f v bodě x^*, tj. kvadratickou formu tvaru*

$$d^2 f(x^*) = (h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots h_n \frac{\partial}{\partial x_n}) = \Phi(h_1, h_2, \dots, h_n).$$

V bodě x^* nastává lokální extrém a to

- *ostré lokální maximum, je-li Φ záporně definitní forma*
- *ostré lokální minimum, je-li Φ kladně definitní forma*

je-li Φ indefinitní forma, pak v bodě x^* lokální extrém nenastává. V případě, že Φ je některá semidefinitní forma, může, ale nemusí, nastat v bodě x^* lokální extrém.

8.2 Řešené příklady

Příklad 8.8. Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2+y^2+3x+2y+18$.

Řešení. Nejprve je nutné nají stacionární body funkce f. Vypočteme tedy parciální derivace podle proměnných x, y a položíme je rovny nule. Dostáváme

$$f_x(x,y) = 2x - 3 \qquad \text{a} \qquad f_y(x,y) = 2y + 2.$$

Tyto parciální derivace jsou rovny 0, jestliže $x = 1,5$ a $y = -1$. To znamená, že Vyšetřovaná funkce má pouze jeden stacionární bod. K tomu, abychom zjistili, zda se jedná o lokální maximum či minimum, potřebujeme znát parciální derivace druhého řádu. Snadno vidíme, že

$$f_{xx} = 2, \qquad f_{yy} = 2 \qquad \text{a} \qquad f_{xy} = 0.$$

Ze vztahů $f_{xx} = 2 > 0$ a $f_{xx}f_{yy} - f_{xy} = 4$ vyplývá, že se jedná o bod lokálního minima. Dále pak z toho, že zkoumaná funkce nemá žádné další stacionární body můžeme usoudit, že se jedná o absolutní minimum.

V předcházejícím postupu nebylo nutné využít parciálních derivací druhého řádu. Zadaná funkce má jednoduchý tvar a je možné ji následovně upravit

$$f(x,y) = (x - 1,5)^2 + (y + 1)^2 + 14,75.$$

Nyní díky nerovnostem $(x - 1,5^2) \geq 0$ a $(y + 1)^2 \geq 0$ snadno nahlédneme, že $f(x,y) \geq 14(\frac{3}{4})$ pro libovolné hodnoty proměnných x a y. Bod [1,5;-1] je tedy skutečně globálním minimem zkoumané funkce.

Příklad 8.9. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 - 6xy + y^3$.

Řešení. Budeme postupovat obvyklým způsobem, který spočívá v nalezení stacionárních bodů pomocí parciálních derivací. Dostáváme

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 6y \qquad \text{a} \qquad f_y(x,y) = 3y^2 - 6x.$$

Ze vztahu $x^2 - 2y = 0$ dostáváme $y = (\frac{x^2}{2})$ a po dosazení za y do rovnice $3y^2 - 6x = 0$ obdržíme rovnici

$$\frac{3}{4}x(x^3 - 8) = 0.$$

Řešením této rovnice jsou hodnoty $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$. Dosadíme-li získané hodnoty do rovnice $x^2 - 2y = 0$, abychom vypočetli y-ové souřadnice stacionárních bodů dostáváme $y_1 = 0, y_2 = 2$. Zkoumaná funkce má tedy dva stacionární body $B_1 = [0,0], B_2 = [2,2]$.

Nyní přistoupíme ke zkoumání charakteru bodů B_1, B_2 a k tomu je zapotřebí vypočítat parciální derivace druhého řádu. Obdržíme

$$f_{xx} = 6x, \qquad f_{xy} = -6 \qquad \text{a} \qquad f_{yy} = 6y.$$

Protože $f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0.0) - f_{xy}(0,0) = -36 < 0$, vidíme, že bod B_1 je sedlovým bodem funkce $f(x,y)$.

Analogickým postupem ze vztahů $f_{xx}(2,2) \cdot f_y(2,2) - f_{xy}(2,2) = 108 > 0$ a $f_{xx}(2,2) = 12 > 0$ dostáváme, že bod B_2 je bodem lokálního minima funkce $f(x,y)$.

Příklad 8.10. Najděte lokální extrémy funkce tří proměnných dané vztahem $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz)$.

Řešení. Vyjdeme opět z parciálních derivací finkce $f(x,y,z)$, které mají tvar

$$f_x = 3x^2 - 3y - 3z, \qquad f_y = 3y^2 - 3x \qquad \text{a} \qquad f_z = 3z^2 - 3x.$$

Položíme-li obdržené parciální derivace rovny nule, dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - y - z &= 0 \\ y^2 - x &= 0 \\ z^2 - x &= 0. \end{aligned}$$

Dále lze dosadit y^2 za x do první a třetí rovnice, což dává vztahy

$$\begin{aligned} y^4 - y - z &= 0 \\ z^2 - y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Z rovnosti $z^2 = y^2$ máme $z = y$ nebo $z = -y$. Dosadíme-li za z postupně do rovnice $y^4 - y - z = 0$, dostáváme buď $y^4 = 0$ nebo $y(y^3 - 2) = 0$.

Z obdržených vztahů vyplývá $y_1 = 0$ nebo $y^2 = \sqrt[3]{2}$. Těmto hodnotám dále odpovídají hodnoty proměnné $z_1 = 0, z_2 = \sqrt[3]{2}$ a $z_2' = -\sqrt[3]{2}$. Hodnotám $y_1 = 0, z_1 = 0$ odpovídá $x_1 = 0$, dále pak dvojicí $y_2 = \sqrt[3]{2}, z_2 = \sqrt[3]{2}$ odpovídá

$x_2 = \sqrt{2\sqrt[3]{2}}$ a konečně dvojici $y_2 = \sqrt[3]{2}, z_2' = -\sqrt[3]{2}$ odpovídá $x_2' = 0$. Celkem jsme obdrželi dva stacionární body

$$B_1 = [0, 0, 0], \qquad B_2 = [\sqrt[3]{4}, \sqrt[6]{4}, \sqrt[6]{4}].$$

Pro parciální derivace druhého řádu dostaneme

$$f_{xx} = 6x, f_{yy} = 6y, f_{zz} = 6z, f_{xy} = -3, f_{xz} = -3, f_{yz} = 0.$$

Chceme-li nyní vyšetřit kvadratickou formu, kterou představuje diferenciál druhého řád pracujeme vlastně s determinantem

$$D = \begin{vmatrix} 6x & -3 & -3 \\ -3 & 6y & 0 \\ -3 & 0 & 6z \end{vmatrix}.$$

Uvažujeme-li bod $B_1[0, 0, 0]$, dostaneme

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ihned vidíme, že hlavní minor $D = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$ je záporný, což znamená, že příslušná kvadratická forma je indefinitní a počátek je tedy sedlovým bodem funkce $f(x, y, z)$.

V bodě $B_2 = [\sqrt[3]{4}, \sqrt[6]{4}, \sqrt[6]{4}]$ máme

$$D = \begin{vmatrix} 6\sqrt[3]{4} & -3 & -3 \\ -3 & 6\sqrt[6]{4} & 0 \\ -3 & 0 & 6\sqrt[6]{4} \end{vmatrix}$$

a vidíme, že $D_1 = 6\sqrt[3]{4} > 0, D_2 = 36.2 - 9 > 0, D_3 = 216\sqrt[3]{16} - 108\sqrt[6]{4} > 0$. Kvadratická forma je tedy pozitivně definitní a bod B_2 je v důsledku toho bodem lokálního minima funkce $f(x, y, z)$.

Příklad 8.11. Najděte nejkratší vzdálenost bodu $B = [1, 1, 1]$ od roviny $3x + y + z = 2$.

Řešení. Vzdálenost libovolného bodu $[x, y, z]$ od bodu $B = [1, 1, 1]$ je dána vztahem

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}.$$

Pokud ovšem bod $[x, y, z]$ leží v rovině $3x + y + z = 2$, můžeme vyjádřit některou z proměnných x, y, z pomocí zbylých dvou. Máme tedy například $z = 2 - 3x - y$, což znamená, že je zapotřebí najít extrémní hodnoty funkce

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (1-3x-1y)^2}.$$

Užitečným trikem, který se při minimalizaci vzdálenosti používá, je umocnění funkčního vztahu, čímž odstraníme odmocninu a zjednodušíme tak vztahy, které obdržíme při výpočtu parciálních derivací minimalizované funkce. Budeme tedy hledat extrém funkce.

$$d^2 = f(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (1-3x-y)^2.$$

Dostáváme

$$f_x = 2(x-1) - 2(1-3x-y).(+3) = 20x + 6y - 8$$
$$f_y = 2(y-1) - 2(1-3x-y) = 4y + 6x - 4$$

Vídíme, že funkce d^2 má jediný kritický bod

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{8}{44} = \frac{2}{11}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 20 & 8 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{32}{44} = \frac{8}{11}.$$

Z povahy úlohy vyplývá, že nalezený bod $[\frac{2}{11}, \frac{8}{11}]$ je bodem lokálního i globálního minima funkce d^2, protože v rovině $3x + y + z = 2$ musí ležet bod, který je nejbíž k bodu $B = [1, 1, 1]$. Tyto úvahy už jen formálně potvrďme výpočtem, kdy ze vztahů $f_{xx} = 20, f_{yy} = 4, f_{xy} = 6$ vyplývá

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy^2} = 44 > 0,$$

a to znamená, že bod $[\frac{2}{11}, \frac{8}{11}]$ je skutečně bodem lokálního minima zkoumané funkce. Zbývá určit hodnotu nejkratší vzdálenosti bodu $B = [1, 1, 1]$ od roviny $3x + y + 2 = 2$. Je dána vztahem

$$d = \sqrt{(\frac{9}{11})^2 + (\frac{3}{11})^2 + (1 - \frac{6}{11} - \frac{8}{11})^2} = \frac{3\sqrt{15}}{11}.$$

Příklad 8.12. Obdélníková dřevěná bedna bez víka má objem $C\mathrm{dm}^3$, kde C je kladná konstanta. Jaké mají být rozměry bedny, jestliže chceme minimalizovat spotřebu dřeva potřebného k její výrobě. Při výpočtu zanedbejte tloušťku stěn bedny.

Řešení. Označíme-li délky jednotlivých stran bedny pomocí proměnných x, y a z, pak je objem bedny dán vztahem

$$V = xyz = C.$$

Naším úkolem je minimalizovat plochu stěn bedny, přičemž celkový obsah je dán vztahem

$$S = xy + 2xz + 2yz.$$

Obsah minimalizované plochy je tedy obecně funkcí tří proměnných. Využijeme-li ale skutečnosti, že $z = \frac{C}{xy}$, můžeme náš problém redukovat na hledání extrému funkce dvou proměnných tvaru

$$S = xy + \frac{2xC}{xy} + \frac{2yC}{xy} = xy + \frac{2C}{y} + \frac{2C}{x}.$$

Parciální derivace funkce S podle proměnných x a y mají tvar

$$S_x(x, y) = y - \frac{2C}{x^2} \qquad \text{a} \qquad S_y(x, y) = x - \frac{2C}{y^2}$$

a jso rovny nule, jestliže

$$y = \frac{2C}{x^2} \qquad \text{a} \qquad x = \frac{2C}{y^2}, \qquad \text{neboli} \qquad yx^2 = 2C = xy^2.$$

Z posledního vztahu dostáváme rovnici $xy(x - y) = 0$, jejímž řešením je vzhledem k požadavku nenulovosti proměnných bod, pro který platí $x = y$. Odtud dále dostáváme $x = y = \sqrt[3]{2C}$. Z povahy úlohy a ze skutečnosti, že funkce S má pouze jediný stacionární bod vyplývá, že bod $[\sqrt[3]{2C}, \sqrt[3]{2C}]$ je bodem lokálního minima funkce S. Podotýkáme ještě, že třetí rozměr z je dán vztahem $z = \frac{\sqrt[3]{2C}}{2}$.

8.3 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 8.1. Najděte všechny body grafu funkce, která je daná vztahem $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5$, v nichž je tečná rovina funkce rovnoběžná s rovinou xy.

Cvičení 8.2. Najděte všechny body grafu funkce, která je daná vztahem $f(x, y) = 3x^2 + 12x + 4y^3 - 6y^2 + 5$, v nichž je tečná rovina funkce rovnoběžná s rovinou xy.

Cvičení 8.3. Vyšetřete stacionární body funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 7$.

Cvičení 8.4. Vyšetřete stacionární body funkce $f(x, y) = e^{2x} \cos y$.

Cvičení 8.5. Vyšetřete stacionární body funkce $f(x, y) = 2x \sin y$.

Cvičení 8.6. Vyšetřete stacionární body funkce $f(x, y) = (4 - x - y)xy$.

Cvičení 8.7. Najděte taková tři kladná čísla, jejichž součet je roven 51, aby jejich součin byl maximální.

Cvičení 8.8. Najděte bod ležící v rovině $x + 2y + 3z = 4$, který je nejbližší k počátku.

Cvičení 8.9. Najděte všechny body na ploše dané vztahem $xyz = 8$, které mají nejkratší vzdálenost od počátku.

Cvičení 8.10. Krabice ve tvaru kvádru má mít objem 20 dm^3, přičemž materiál určený k výrobě bočních stěn stojí 10 Kč na dm^2, materiál určený k výrobě dna stojí 20 Kč na dm^2 a materiál určený k výrobě víka stojí 30 Kč na dm^2. Navrhněte rozměry krabice tak, aby náklady na její výrobu byly minimální.

9 Vázané extrémy

9.1 Definice a věty

Definice 9.1. Nechť $f(x)$ je funkce n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $M \subset \mathcal{D}(f)$, $x^* = [x_1^*, \ldots, x_n^*] \in M$. Řekneme, že funkce f na množině M má v bodě a **lokální extrém vázaný m podmínkami**

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\ldots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \quad \text{kde } 1 \le m < n, \end{aligned} \tag{9.1}$$

jestliže pro všechny body x z vhodného okolí $\mathcal{O}(x^*) \subseteq M$, které vyhovují uvedeným podmínkám, platí jeden ze vztahů:
1) $f(x) \ge f(x^*)$ vázané lokální minimum,
2) $f(x) \le f(x^*)$ vázané lokální maximum.

Věta 9.2. *Nechť funkce n proměnných f, $g_1, \ldots, g_m$, $1 \le m < n$, mají spojité parciální derivace 1. řádu v otevřené množině M a nechť v každém bodě množiny M má matice*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdot\cdot & \cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

hodnost m. Buď $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce definovaná vztahem

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x_1, \ldots, x_n).$$

Funkce L se nazývá ***Lagrangeova funkce*** *a konstanty λ_k se nazývají* ***Lagrangeovy multiplikátory****. Nechť systém $n+m$ rovnic o $n+m$ neznámých, tj. systém*

$$\begin{aligned} L_{x_1} &= f_{x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_1} = 0, \\ L_{x_2} &= f_{x_2} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_2} = 0, \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$L_{x_n} = f_{x_n} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_n} = 0,$$

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

má řešení $[x_1^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0]$. Pokud má Lagrangeova funkce L v bodě $x^* = [x_1^*, \ldots, x_n^*]$ pro $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0$ lokální extrém, pak funkce f má v tomto bodě x^* lokální extrém téhož typu s vázanými podmínkami (9.1). Nemá-li L lokální extrém, neplyne odtud, že by funkce f nemohla mít vázaný extrém.

9.2 Řešené příklady

Příklad 9.3. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 4x + 3y - 4$ na množině určené rovností $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$.

Řešení. Úlohu budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbou $g(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 = 0$. Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = 4x + 3y - 4 + \lambda((x-1)^2 + (y-2)^2 - 1),$$

spočteme její parciální derivace podle proměnných x, y a položíme je rovny nule,

$$\begin{aligned} L_x &= 4 + 2\lambda(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = -\frac{2}{\lambda} \\ L_y &= 3 + 2\lambda(y-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad y - 2 = -\frac{3}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Dosazením vyjádřených hodnot $x-1$, $y-2$ do rovnice vazby dostáváme

$$\left(-\frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{5}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{5}{2}.$$

Pro $\lambda_1 = -\frac{5}{2}$ dopočítáme $x_1 = \frac{9}{5}$, $y_1 = \frac{13}{5}$, dostali jsme tak stacionární bod $x_1^* = [\frac{9}{5}, \frac{13}{5}]$. Pro $\lambda_2 = \frac{5}{2}$ dopočítáme $x_2 = \frac{1}{5}$, $y_2 = \frac{7}{5}$, dostali jsme tak

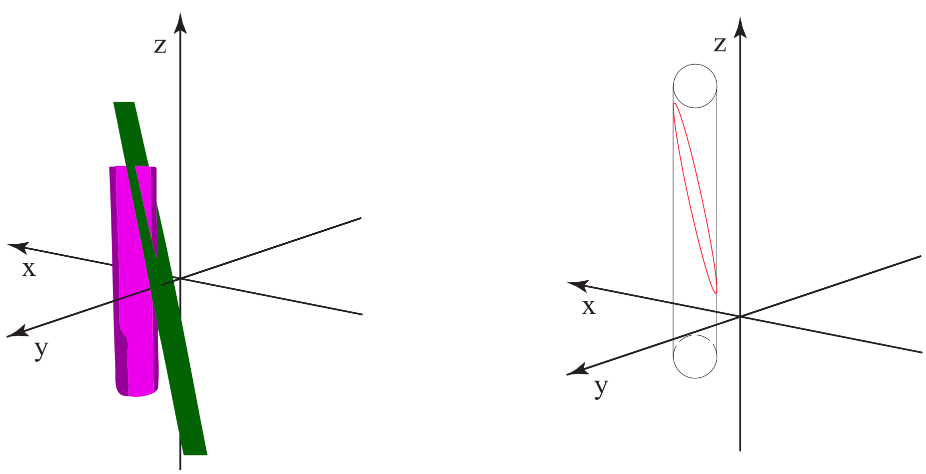
stacionární bod $x_2^* = [\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$.
Sestavíme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do L'' stacionární body a příslušné hodnoty λ:

$$\lambda_1 = -\frac{5}{2}, \quad L''(x_1^*) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \frac{5}{2}, \quad L''(x_2^*) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic. Platí $D_1(x_1^*) = -5 < 0$, $D_2(x_1^*) = 25 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě x_1^* lokální maximum funkce L, tedy vázané lokální maximum funkce f. Dále $D_1(x_2^*) = 5 > 0$, $D_2(x_2^*) = 25 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě x_2^* lokální minimum funkce L, tedy vázané lokální minimum funkce f.
Vysvětleme si geometrický význam úlohy. Grafem funkce $f(x, y) = 4x+3y-4$ je rovina. Vazebná rovnice $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ je rovnice kružnice se středem v bodě $S = [1, 2]$ poloměrem $r = 1$ ležící v rovině xy. Hledáme tedy extrémy na křivce, která vznikne průnikem válcové plochy určené touto kružnicí s danou rovinou. Průnikovou křivkou je elipsa. Situace je znázorněna na obrázku 13.



Obrázek 13: Průniková křivka - elipsa

Příklad 9.4. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = 4 \ln y - x$ vzhledem k podmínce $x^2 = y$.

Řešení. Úlohu budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbou $g(x, y) = x^2 - y$. Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = 4 \ln y - x + \lambda(x^2 - y),$$

spočteme její první parciální derivace podle proměnných x, y a položíme je rovny nule, tj.

$$\begin{aligned} L_x = -1 + 2x\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2\lambda} \\ L_y = \frac{4}{y} - \lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad y = \frac{4}{\lambda}. \end{aligned}$$

Vyjádřené hodnoty x a y dosadíme do rovnice vazby, $g(x, y) = x^2 - y = 0$,

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 - \frac{4}{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{16}.$$

Pro $\lambda = \frac{1}{16}$ dopočítáme souřadnice $x = 8$, $y = 64$, získali jsme stacionární bod $x^* = [8, 64]$. Sestavíme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & -\frac{4}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do L'' stacionární bod $x^* = [8, 64]$ a hodnotu $\lambda = \frac{1}{16}$:

$$L''(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1024} \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matice. Platí $D_1(x^*) = \frac{1}{8} > 0$, $D_2(x^*) = -\frac{1}{8192} < 0$. Podle kritéria pro funkci L v bodě $x^* = [8, 64]$ lokální extrém nenastává. Funkce $f(x, y) = 4 \ln y - x$ s vazbou $g(x, y) = x^2 - y$ však extrém mít může. Úlohu můžeme také řešit jednoznačným vyjádřením proměnné y z rovnice vazby $x^2 - y = 0$. Tím získáváme $y = x^2$, které dosadíme do zadané funkce $f(x, y) = 4 \ln y - x$, dostaneme funkci jedné proměnné

$$F(x) = 4 \ln x^2 - x.$$

Zadanou úlohu jsme tedy převedli na úlohu hledání extrémů funkce jedné proměnné. Platí

$$F'(x) = \frac{8}{x} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 8.$$

Spočtením druhé derivace $F''(x) = -\frac{8}{x^2}$ a dosazením bodu $x = 8$ získáváme hodnotu $F''(8) = -\frac{1}{8} < 0$. Protože je druhá derivace v bodě $x = 8$ záporná, má funkce F v tomto bodě lokální maximum. Dopočítáme $y = 64$. Odtud funkce $f(x, y) = 4 \ln y - x$ má v bodě $[8, 64]$ vázané lokální maximum.

Příklad 9.5. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y$ na množině určené rovností $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení. Úlohu budeme řešit třemi způsoby. Začneme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazba je $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

spočteme její parciální derivace podle proměnných x, y a položíme je rovny nule,

$$\begin{aligned} L_x = 2x + 2x\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2x(1 + \lambda) = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \ \vee \ \lambda = -1 \\ L_y = 1 + 2y\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2y\lambda = -1 \quad \Rightarrow y = -\frac{1}{2\lambda} \end{aligned}$$

Do rovnice vazby $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ dosadíme nejdříve $x = 0$ a dostáváme $y = \pm 1$. Máme tedy stacionární body $x_1^* = [0, 1]$ s příslušnou hodnotou $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ a $x_2^* = [0, -1]$ s hodnotou $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Dále do rovnice vazby $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ dosadíme za $y = -\frac{1}{2\lambda}$ a $\lambda = -1$. Dostaneme $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Získali jsme další dva stacionární body $x_3^* = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$, $x_4^* = [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ pro hodnotu $\lambda = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$.
Sestavíme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do L'' stacionární body a příslušné hodnoty λ:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad L''(x_1^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad L''(x_2^*) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = -1, \quad L''(x_3^*) = L''(x_4^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic. Platí $D_1(x_1^*) = 1 > 0$, $D_2(x_1^*) = -1 < 0$. Podle kritéria v bodě x_1^* lokální extrém funkce L nenastává. Dále $D_1(x_2^*) = 3 > 0$,

$D_2(x_2^*) = 3 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě x_2^* lokální minimum funkce L, tedy vázané lokální minimum funkce f. Pro body x_3^*, x_4^* dostáváme $D_1 = 0$, $D_2 = 0$. Podle kritéria nelze o existenci lokálních extrémů funkce L v těchto bodech rozhodnout. Ve třech bodech funkce L nenastal žádný extrém, což ještě neznamená, že funkce f s vazbou $g(x,y)$ nemůže mít v těchto bodech vázané extrémy.

Jiný způsob řešení úlohy spočívá v jednoznačném vyjádření proměnné y z vazby $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, tj. $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. Úloha se tedy rozpadá na dvě části.

1) Budeme uvažovat $y = \sqrt{1-x^2}$. Tento vztah dosadíme do zadané funkce $f(x,y) = x^2 + y$ a dostaneme funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \sqrt{1-x^2}) = x^2 + \sqrt{1-x^2}.$$

Nyní hledáme extrém funkce jedné proměnné $F(x)$:

$$F'(x) = 2x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \ \Rightarrow x_1 = 0, \ \ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \ x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do druhé derivace

$$F''(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

postupně dosadíme stacionární body. Pro $x_1 = 0$ dostáváme $F''(0) = 1 > 0$, tedy jedná se o lokální minimum. Dopočteme $y = 1$. Odtud zadaná funkce f má v bodě $[0,1]$ vázané lokální minimum. Jelikož v bodě $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ je $F''(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -6 < 0$, nastává v něm lokální maximum. Dopočteme $y = \frac{1}{2}$. Tedy zadaná funkce f má v bodě $[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ vázané lokální maximum. Pro $x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ dostáváme $F''(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -6 < 0$, jedná se o lokální maximum. Dopočteme $y = \frac{1}{2}$. Odtud zadaná funkce f má v bodě $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ vázané lokální maximum.

2) Budeme uvažovat $y = -\sqrt{1-x^2}$. Vztah dosadíme do zadané funkce $f(x,y) = x^2 + y$ a dostaneme funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, -\sqrt{1-x^2}) = x^2 - \sqrt{1-x^2}.$$

Hledáme extrém funkce jedné proměnné $F(x)$:

$$F'(x) = 2x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \Rightarrow x\left(2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0 \ \Rightarrow x_4 = 0.$$

Do druhé derivace

$$F''(x) = 2 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

dosadíme za x bod $x_4 = 0$. Dostáváme $F''(0) = 1 > 0$, tedy jedná se o lokální minimum. Dopočteme $y = -1$. Odtud zadaná funkce f má v bodě $[0, -1]$ vázané lokální minimum.
Další možností jak úlohu řešit je pomocí parametrizace. Vazba je jednotková kružnice, tudíž můžeme pro parametrizaci použít polární souřadnice s poloměrem $r = 1$, pak $x = \cos t$, $y = \sin t$ pro $t \in (0, 2\pi]$. Polární souřadnice dosadíme do zadané funkce f a dostaneme funkci jedné proměnné

$$F(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin t.$$

Ve výpočtu pokračujeme dál jako při hledání extrémů funkce jedné proměnné.

$$F' = -2\cos t \sin t + \cos t = 0 \;\; \Rightarrow \cos t = 0 \;\; \vee \;\; \sin t = \frac{1}{2}.$$

Z rovnosti $\cos t = 0$ dostáváme stacionární body $t_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $t_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, z rovnosti $\sin t = \frac{1}{2}$ máme stacionární body $t_3 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $t_4 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Tyto body dosadíme do druhé derivace

$$F''(t) = 2\sin^2 t - 2\cos^2 t - \sin t$$

a dostáváme v t_1, $F''(t_1) = 1 > 0$, lokální minimum, v t_2 se jedná o lokální minimum, $F''(t_2) = 3 > 0$, dále pro t_3 a t_4 dostáváme lokální maximum $F''(t_3) = -\frac{3}{2} < 0$, $F''(t_4) = -\frac{3}{2} < 0$. Parametrizací se vrátíme zpět k proměnným x, y a dostáváme, že zadaná funkce f má v bodech $[0, 1]$, $[0, -1]$ vázaná lokální minima, v bodech $[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$, $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ vázaná lokální maxima.

Příklad 9.6. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x - y + 3z$ na množině určené rovností $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$.

Řešení. Příklad budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbou $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4 = 0$. Píšeme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, z, \lambda) = x - y + 3z + \lambda(x^2 + y^2 + 4z^2 - 4).$$

Spočteme derivace a položíme je rovny nule,

$$\begin{aligned} L_x &= 1 + 2x\lambda = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{1}{2\lambda} \\ L_y &= -1 + 2y\lambda = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{2\lambda} \\ L_z &= 3 + 8z\lambda = 0 \;\Rightarrow\; z = -\frac{3}{8\lambda}. \end{aligned}$$

Vyjádřené x, y, z dosadíme do rovnice vazby $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ a dostáváme $\lambda = \pm\frac{\sqrt{17}}{8}$, tj. $\lambda_1 = \frac{\sqrt{17}}{8}$, $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{17}}{8}$. Tomu odpovídají stacionární body $x_1^* = [-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}]$, $x_2^* = [\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}]$. Vyjádříme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 8\lambda \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do L'' stacionární body x_1^*, x_2^* a jim příslušnou hodnotu λ_1, resp. λ_2:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{17}}{8},\;\; L''(x_1^*) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{17}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{17}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{17} \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{17}}{8},\;\; L''(x_2^*) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{17}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{17}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{17} \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic. Platí $D_1(x_1^*) = \frac{\sqrt{17}}{4} > 0$, $D_2(x_1^*) = \frac{17}{16} > 0$, $D_3(x_1^*) = \frac{\sqrt{17^3}}{16} > 0$. Všechny hlavní minory jsou kladné, tudíž podle kritéria nastává v bodě x_1^* lokální minimum funkce L, tedy vázané lokální minimum funkce f. Dále pro bod x_2^* platí $D_1(x_2^*) = -\frac{\sqrt{17}}{4} < 0$, $D_2(x_2^*) = \frac{17}{16} > 0$, $D_3(x_2^*) = -\frac{\sqrt{17^3}}{16} < 0$. Podle kritéria nastává v bodě x_2^* lokální maximum funkce L, tedy vázané lokální maximum funkce f.

Příklad 9.7. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na množině určené rovnostmi $x - y + z = 1$, $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení. Příklad budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbami $g_1(x,y,z) = x - y + z - 1 = 0$, $g_2(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x + 2y + 3z + \lambda_1(x - y + z - 1) + \lambda_2(x^2 + y^2 - 1).$$

Spočteme derivace a položíme je rovny nule,

$$\begin{aligned} L_x = 1 + \lambda_1 + 2x\lambda_2 = 0 \ &\Rightarrow\ x = -\frac{1+\lambda_1}{2\lambda_2} \\ L_y = 2 - \lambda_1 + 2y\lambda_2 = 0 \ &\Rightarrow\ y = \frac{\lambda_1 - 2}{2\lambda_2} \\ L_z = 3 + \lambda_1 = 0 \ &\Rightarrow\ \lambda_1 = -3. \end{aligned}$$

Do vyjádřených x a y dosadíme hodnotu $\lambda_1 = -3$ a získáváme, že $x = \frac{1}{\lambda_2}$, $y = -\frac{5}{2\lambda_2}$. Takto vyjádřené x, y dosadíme do rovnice vazby $x^2 + y^2 = 1$ a dostáváme $\lambda_2 = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$, tj. $\lambda_{21} = \frac{\sqrt{29}}{2}$, $\lambda_{22} = -\frac{\sqrt{29}}{2}$. Stacionární body jsou $x_1^* = [\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}, 1 - \frac{7}{\sqrt{29}}]$, $x_2^* = [-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}]$. Sestavíme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do L'' stacionární body x_1^*, x_2^* a jim příslušnou hodnotu λ_{21}, resp. λ_{22}:

$$\lambda_{21} = \frac{\sqrt{29}}{2},\ \ L''(x_1^*) = \begin{pmatrix} \sqrt{29} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{29} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{22} = -\frac{\sqrt{29}}{2},\ \ L''(x_2^*) = \begin{pmatrix} -\sqrt{29} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{29} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic. Platí $D_1(x_1^*) = \sqrt{29} > 0$, $D_2(x_1^*) = 29 > 0$, $D_3(x_1^*) = 0$. Dále platí $D_1(x_2^*) = -\sqrt{29} < 0$, $D_2(x_2^*) = 29 > 0$, $D_3(x_2^*) = 0$. Podle kritéria nelze o existenci lokálních extrémů funkce L v těchto bodech rozhodnout.

Úlohu budeme tedy řešit jiným způsobem. Jednoznačně vyjádříme proměnnou z z rovnice vazby $g_1(x,y,z) = x - y + z - 1 = 0$, tj. $z = 1 - x + y$. Tento vztah dosadíme do zadané funkce $f(x,y,z) = x+2y+3z$ a dostaneme funkci dvou proměnných

$$F(x,y) = f(x,y,1-x+y) = x+2y+3(1-x+y) = -2x+5y+3$$

s vazbou $g(x,y) = g_2(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$. Nyní hledáme extrém funkce dvou proměnných $F(x,y)$ s vazbou $g(x,y) = 0$. Tuto úlohu budeme řešit metodou Langrangeových multiplikátorů. Lagrangeovu funkci

$$L(x,y,\lambda) = -2x+5y+3+\lambda(x^2+y^2-1)$$

derivujeme podle proměnných x, y a derivace položíme rovny nule,

$$L_x = 2+2x\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{\lambda}$$
$$L_y = 5+2y\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{5}{2\lambda}.$$

Vyjádřené x, y dosadíme do rovnice vazby $x^2+y^2 = 1$ a získáváme $\lambda = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$, tedy stacionární body $b_1 = [\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}]$ pro $\lambda_1 = \frac{\sqrt{29}}{2}$, $b_2 = [-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}]$ pro $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{29}}{2}$.
Sestavíme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Do L'' dosadíme stacionární body b_1, resp. b_2 a příslušné hodnoty λ_1, resp. λ_2:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{29}}{2}, \quad L''(b_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{29} & 0 \\ 0 & \sqrt{29} \end{pmatrix},$$
$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{29}}{2}, \quad L''(b_2) = \begin{pmatrix} -\sqrt{29} & 0 \\ 0 & -\sqrt{29} \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic. Platí $D_1(b_1) = \sqrt{29} > 0$, $D_2(b_1) = 29 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě b_1 lokální minimum funkce L. Dopočteme $z = 1-\frac{7}{\sqrt{29}}$. Odtud zadaná funkce f má v bodě $[\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}, 1-\frac{7}{\sqrt{29}}]$ vázané lokální minimum. Dále $D_1(b_2) = -\sqrt{29} < 0$, $D_2(b_2) = 29 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě b_2 lokální maximum funkce L. Dopočteme $z = 1+\frac{7}{\sqrt{29}}$. Odtud zadaná funkce f má v bodě $[-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1+\frac{7}{\sqrt{29}}]$ vázané lokální maximum.

Příklad 9.8. Určete rozměry nádrže tvaru kvádru o objemu $V = 32m^3$ tak, aby dno a stěny měly co nejmenší povrch.

Řešení. Označme x, y rozměry dna a z hloubku nádrže. Podle zadání máme spočíst minimální povrch nádrže $S(x, y, z)$, je-li dán objem $V = 32m^3$. Hledáme tedy vázané minimum funkce $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ s vazbou $g(x, y, z) = V(x, y, z) = xyz = 32$. Úlohu budeme řešit jednoznačným vyjádřením proměnné x z vazebné rovnice g, tj.

$$g(x, y, z) = xyz - 32 = 0 \Rightarrow x = \frac{32}{yz}.$$

Tento vztah dosadíme do dané funkce $S(x, y, z) = xy+2xz+2yz$ a dostaneme

$$F(y, z) = \frac{32}{z} + \frac{64}{y} + 2yz.$$

Úlohu na vázaný extrém funkce S jsme převedli na úlohu o lokálních extrémech funkce F. Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Platí

$$F_y = -\frac{64}{y^2} + 2z = 0, \quad F_z = -\frac{32}{z^2} + 2y = 0.$$

Z rovnice $F_y = -\frac{64}{y^2} + 2z = 0$ vyjádříme $z = \frac{32}{y^2}$ a jeho dosazením do druhé rovnice dostáváme $2y - \frac{y^4}{32} = 0$. Odtud $y = 0 \vee y = 4$. Hodnota $y = 0$ nevyhovuje zadání. Dále pracujeme pouze s hodnotou $y = 4$. Dopočteme $z = 2$. Nalezli jsme jediný stacionární bod $[4, 2]$. Dopočteme $x = 4$. Spočteme matici druhých parciálních derivací funkce F:

$$F'' = \begin{pmatrix} F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{128}{y^3} & 0 \\ 0 & \frac{64}{z^3} \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do F'' stacionární bod $[4, 2]$:

$$F''([4, 2]) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matice. Platí $D_1([4, 2]) = 2 > 0$, $D_2([4, 2]) = 16 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $[4, 2]$ lokální minimum funkce F a tedy v bodě $[4, 4, 2]$ vázané minimum funkce S. Rozměry nádrže jsou $4 \times 4 \times 2$.

9.3 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 9.1. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 - 2y$ na množině určené rovností $2x - y = 1$.

Cvičení 9.2. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 9x^2 + 16y^2 - 64y - 36x$ na množině určené rovností $9x^2 + 16y^2 = 144$.

Cvičení 9.3. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = \ln(x + y)$ vzhledem k podmínce $xy = 1$.

Cvičení 9.4. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = xy^2$ vzhledem k podmínce $x^2 + y^2 = 1$.

Cvičení 9.5. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \sin(y + 1) + \cos x$ na množině určené rovností $y - x = -1$.

Cvičení 9.6. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = \frac{2}{x^2} + \frac{2}{y^2}$ vzhledem k podmínce $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$.

Cvičení 9.7. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ na množině určené rovností $xyz - 4 = 0$.

Cvičení 9.8. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz$ na množině určené rovností $xy + xz + yz = 8$.

Cvičení 9.9. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = xy + xz$ na množině určené rovnostmi $x^2 + y^2 = 1$, $xz = 1$.

Cvičení 9.10. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ vzhledem k podmínkám $2x + y + z = 2$, $x - y - 3z = 4$.

10 Globální extrémy - příklady

10.1 Definice a věty

Definice 10.1. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathcal{D}(f)$, $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*] \in M$. Řekneme, že funkce f má v bodě x^* **globální maximum na** M, jestliže $\forall x \in M$ platí $f(x) \leq f(x^*)$.
Řekneme, že funkce f má v bodě x^* **globální minimum na** M, jestliže $\forall x \in M$ platí $f(x) \geq f(x^*)$. Jsou-li nerovnosti pro $x \neq x^*$ ostré, mluvíme o ostrých globálních extrémech. Místo termínu globální extrém se používá často pojem **absolutní** extrém.

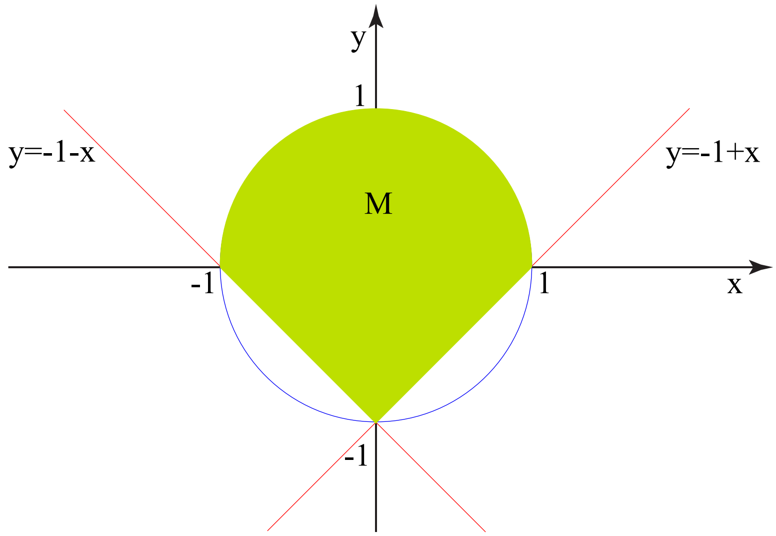
Věta 10.2. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina (tj. uzavřená a ohraničená) a funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá na M. Pak f nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálního extrému ležících uvnitř M nebo v některém hraničním bodě.*

Postup pro nalezení globálních extrémů diferencovatelných funkcí na kompaktních množinách:
1) Určíme lokální extrémy funkce f ležící uvnitř množiny M, nikoli na její hranici. Určíme funkční hodnoty v nalezených bodech.
2) Vyšetříme funkci f na hranici množiny M, tj. určíme vázané extrémy funkce f, a určíme funkční hodnoty v nalezených bodech. Pokud je hranice tvořena více křivkami, je nutno spočíst funkční hodnoty i ve vrcholech hraničních křivek, tj. v průnicích různých vazeb.
3) Porovnáme všechny spočtené funkční hodnoty. Extrém s největší funkční hodnotou je globální maximum, extrém s nejmenší funkční hodnotou je globální minimum.

10.2 Řešené příklady

Příklad 10.3. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2$ na množině M dané nerovnostmi $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq |x| - 1$.

Řešení. Množina M je kompaktní a funkce f je spojitá, pak dle věty 10.2 na množině M existuje maximum a minimum funkce f. Množina M viz obrázek 14.



Obrázek 14: Množina M

Nejprve hledáme lokální extrémy funkce f uvnitř množiny M. Spočteme parciální derivace a položíme rovny nule,

$$f_x(x,y) = 2x - y = 0 \quad \Rightarrow y = 2x, \quad f_y(x,y) = 2y - x = 0 \quad \Rightarrow x = 2y.$$

Dostali jsme stacionární bod $x_1^* = [0,0]$. Tento bod leží uvnitř množiny M. Má tedy smysl v tomto bodě pokračovat v hledání lokálního extrému. Sestavíme matici druhých parciálních derivací a dosadíme bod x_1^*:

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matice. Platí $D_1(x_1^*) = 2 > 0$, $D_2(x_1^*) = 3 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $x_1^* = [0,0]$ ostré lokální minimum funkce f.
Dále hledáme body extrému funkce f na hranicích množiny M. Hranice množiny M je tvořena dvěmi úsečkami a jednou horní půlkružnicí. Úloha hledání vázaných extrémů funkce f se tedy rozpadá na tři případy.

a) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x,y) = y - x + 1$ pro $x \in (0,1)$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření proměnné y z rovnice vazby, tj $y = x - 1$, převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na ekvivalentní úlohu nalezení lokálního extrému funkce

$$F(x) = x^2 + (x-1)^2 - x(x-1) - 2 = x^2 - x - 1.$$

Funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule

$$F'(x) = 2x - 1 = 0 \ \Rightarrow x = \frac{1}{2} \in (0,1).$$

Zkoumáme dále existenci vázaného extrému funkce f. Spočteme druhou derivaci a určíme její hodnotu v bodě $x = \frac{1}{2}$

$$F''(\frac{1}{2}) = 2 > 0 \ \Rightarrow \ \text{ostré lokální minimum.}$$

Dopočteme $y = -\frac{1}{2}$. Funkce f má v bodě $x_2^* = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$ vázané lokální minimum.

b) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x,y) = y + x + 1 = 0$ pro $x \in (-1,0)$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření proměnné y z rovnice vazby, tj $y = -x - 1$, převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na ekvivalentní úlohu nalezení lokálního extrému funkce

$$F(x) = x^2 + (-x-1)^2 - x(-x-1) - 2 = 3x^2 + 3x - 1.$$

Funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule

$$F'(x) = 6x + 3 = 0 \ \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \in (-1,0).$$

Zkoumáme dále existenci vázaného extrému funkce f. Spočteme druhou derivaci a určíme její hodnotu v bodě $x = -\frac{1}{2}$

$$F''(-\frac{1}{2}) = 6 > 0 \ \Rightarrow \ \text{ostré lokální minimum.}$$

Dopočteme $y = -\frac{1}{2}$. Funkce f má v bodě $x_3^* = [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$ vázané lokální minimum.

c) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x,y) = y - \sqrt{1-x^2} = 0$ pro $x \in (-1,1)$, tj. uvažujeme horní půlkružnici. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření proměnné y z rovnice vazby, tj $y = \sqrt{1-x^2}$, převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na ekvivalentní úlohu nalezení lokálního extrému funkce

$$F(x) = x^2 + 1 - x^2 - x\sqrt{1-x^2} - 2 = -x\sqrt{1-x^2} - 1.$$

Funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule

$$F'(x) = \frac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}} \in (-1, 1).$$

Zkoumáme dále existenci vázaného extrému funkce f. Spočteme druhou derivaci

$$F''(x) = \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x(2x^2-1)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

a určíme její hodnoty v bodech $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

$$F''(x_1) = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{ostré lokální minimum,}$$

$$F''(x_2) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{ostré lokální maximum.}$$

Dopočteme $y_1 = y_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Funkce f má v bodě $x_4^* = \left[\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$ vázané lokální minimum, v bodě $x_5^* = \left[-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$ vázané lokální maximum.

Zbývá vyšetřit body $A = [-1, 0]$, $B = [0, -1]$, $C = [1, 0]$, které jsou průniky různých vazeb. Spočteme jednotlivé funkční hodnoty v nalezených bodech a porovnáme je

$$f(x_1^*) = -2, \;\; f(x_2^*) = -\frac{5}{4}, \;\; f(x_3^*) = -\frac{7}{4}, \;\; f(x_4^*) = -\frac{3}{2}, \;\; f(x_5^*) = -\frac{1}{2},$$

$$f(A) = f(B) = f(C) = -1,$$

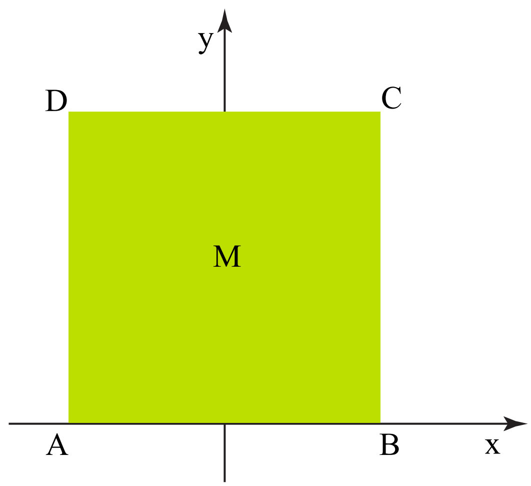
$$f(x_1^*) < f(x_3^*) < f(x_4^*) < f(x_2^*) < f(A) < f(x_5^*).$$

Funkce f má v bodě $x_5^* = \left[-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$ globální maximum a v bodě $x_1^* = [0, 0]$ globální minimum.

Poznámka 10.4. Při řešení příkladu mohlo být v bodě c) použito i Lagrangeovy funkce s vazbou $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, ale muselo by se dále uvažovat, že $y > 0$.

Příklad 10.5. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = y^2 - 2y + e^{-x^2}$ na čtverci M, který je určen body $A = [-1,0]$, $B = [1,0]$, $C = [1,2]$, $D = [-1,2]$.

Řešení. Množinu M tvoří čtverec mající vrcholy v bodech $A = [-1,0]$, $B = [1,0]$, $C = [1,2]$, $D = [-1,2]$ a všechny body, které v něm leží, obrázek 15. Existence maxima a minima opět plyne z věty 10.2. Nejprve hledáme



Obrázek 15: Množina M

lokální extrémy funkce f uvnitř množiny M. Spočteme parciální derivace a položíme rovny nule,

$$f_x(x,y) = -2xe^{-x^2} = 0 \quad \Rightarrow x = 0, \quad f_y(x,y) = 2y - 2 = 0 \quad \Rightarrow y = 1.$$

Dostali jsme stacionární bod $x_1^* = [0,1]$. Tento bod leží uvnitř množiny M. Má tedy smysl v tomto bodě pokračovat v hledání lokálního extrému. Sestavíme matici druhých parciálních derivací a dosadíme bod x_1^*:

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}\Bigg|_{[0,1]} = \begin{pmatrix} -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\Bigg|_{[0,1]} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matice. Platí $D_1(x_1^*) = -2 < 0$, $D_2(x_1^*) = -4 < 0$. Podle kritéria nenastává v bodě $x_1^* = [0,0]$ lokální extrém.
Dále hledáme body extrému funkce f na hranicích množiny M. Hranice

množiny M je tvořena čtyřmii úsečkami. Úloha hledání vázaných extrémů funkce f se tedy rozpadá na čtyři případy, tj. na jednotlivé úsečky zadaného čtverce.

a) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x, y) = y = 0$ pro všechna $x \in (-1, 1)$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření $y = 0$ z rovnice vazby převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na ekvivalentní úlohu nalezení lokálního extrému funkce $F(x) = e^{-x^2}$. Funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule

$$F'(x) = -2xe^{-x^2} = 0 \ \Rightarrow x = 0 \in (-1, 1).$$

Zkoumáme dále existenci vázaného extrému funkce f. Spočteme druhou derivaci a určíme její hodnotu v bodě $x = 0$

$$F''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}, \ F''(0) = -2 < 0 \Rightarrow \text{ostré lokální maximum.}$$

Funkce f má v bodě $x_2^* = [0, 0]$ vázané lokální maximum.

b) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x, y) = x - 1 = 0$ pro $y \in (0, 2)$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření proměnné x z rovnice vazby, tj. $x = 1$, převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na úlohu nalezení lokálního extrému funkce $F(y) = y^2 - 2y + e^{-1}$. Funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule

$$F'(y) = 2y - 2 = 0 \ \Rightarrow y = 1 \in (0, 2).$$

Zkoumáme dále existenci vázaného extrému funkce f. Spočteme druhou derivaci a určíme její hodnotu v bodě $y = 1$

$$F''(y) = 2, \ F''(1) = 2 > 0 \ \Rightarrow \text{ostré lokální minimum.}$$

Funkce f má v bodě $x_3^* = [1, 1]$ vázané lokální minimum.

c) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x, y) = y - 2 = 0$ pro všechna $x \in (-1, 1)$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření $y = 2$ z rovnice vazby převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na ekvivalentní úlohu nalezení lokálního extrému funkce $F(x) = e^{-x^2}$. Funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule

$$F'(x) = -2xe^{-x^2} = 0 \ \Rightarrow x = 0 \in (-1, 1).$$

Zkoumáme dále existenci vázaného extrému funkce f. Spočteme druhou derivaci a určíme její hodnotu v bodě $x = 0$

$$F''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}, \;\; F''(0) = -2 < 0 \Rightarrow \text{ ostré lokální maximum.}$$

Funkce f má v bodě $x_4^* = [2, 0]$ vázané lokální maximum.

d) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x, y) = x + 1 = 0$ pro $y \in (0, 2)$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření proměnné x z rovnice vazby, tj. $x = -1$, převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na úlohu nalezení lokálního extrému funkce $F(y) = y^2 - 2y + e^{-1}$. Funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule

$$F'(y) = 2y - 2 = 0 \;\; \Rightarrow y = 1 \in (0, 2).$$

Zkoumáme dále existenci vázaného extrému funkce f. Spočteme druhou derivaci a určíme její hodnotu v bodě $y = 1$

$$F''(y) = 2, \;\; F''(1) = 2 > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \text{ostré lokální minimum.}$$

Funkce f má v bodě $x_5^* = [-1, 1]$ vázané lokální minimum.

Zbývá vyšetřit vrcholy čtverce $ABCD$, které jsou průniky různých vazeb. Spočteme jednotlivé funkční hodnoty v nalezených bodech a porovnáme je

$$f(x_2^*) = f(x_4^*) = 1, \;\; f(x_3^*) = f(x_5^*) = -1 + e^{-1},$$

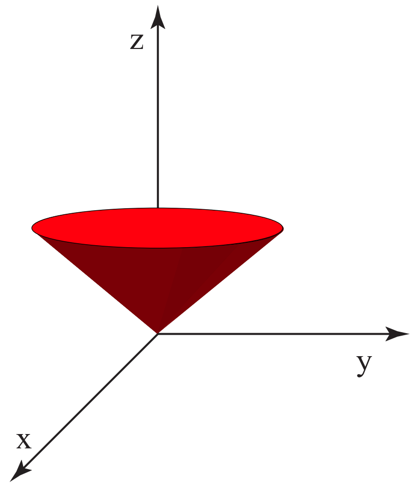
$$f(A) = f(B) = f(C) = f(D) = e^{-1},$$

$$f(x_3^*) < f(A) < f(x_2^*).$$

Funkce f má v bodech x_2^*, x_4^* globální maxima a v bodech x_3^*, x_5^* globální minima.

Příklad 10.6. Určete globální extrémy funkce $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 + 2z^2$ na množině M dané nerovnostmi $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z$, $z \leq 3$.

Řešení. Množina M je kompaktní a funkce f je spojitá, pak dle věty 10.2 na množině M existuje maximum a minimum funkce f. Množina M viz obrázek 16.



Obrázek 16: Množina M

Nejprve hledáme lokální extrémy funkce f uvnitř množiny M. Spočteme parciální derivace a položíme rovny nule,

$$f_x(x,y,z) = -2x = 0, \quad f_y(x,y,z) = -2y = 0, \quad f_z(x,y,z) = 4z = 0.$$

Dostali jsme stacionární bod $x_1^* = [0,0,0]$. Tento bod neleží uvnitř množiny M. Nemá tedy smysl v tomto bodě pokračovat v hledání lokálního extrému. Dále hledáme stacionární body funkce f na hranicích množiny M. Hranice množiny M je tvořena rovinou $z = 3$ a kuželem o rovnici $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Úloha hledání vázaných extrémů funkce f se tedy rozpadá na dva případy.

a) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x,y,z) = z - 3$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření proměnné z z rovnice vazby, tj $z = 3$, převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na ekvivalentní úlohu nalezení lokálního extrému funkce

$$F(x,y) = -x^2 - y^2 + 18.$$

Spočteme parciální derivace a položíme rovny nule,

$$F_x(x,y) = -2x = 0, \quad F_y(x,y) = -2y = 0.$$

Dostali jsme stacionární bod $a_1^* = [0,0]$. Zkoumáme dále existenci vázaného extrému funkce f. Sestavíme matici druhých parciálních derivací a dosadíme bod a_1^*:

$$\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{pmatrix}\Bigg|_{[0,0]} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matice. Platí $D_1(a_1^*) = -2 < 0$, $D_2(a_1^*) = 4 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $a_1^* = [0,0]$ lokální maximum. Dopočteme $z = 3$. Funkce f má v bodě $x_2^* = [0,0,3]$ vázané lokální maximum.

b) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2}$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření proměnné z z rovnice vazby, tj. $z = \sqrt{x^2+y^2}$, převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na ekvivalentní úlohu nalezení lokálního extrému funkce

$$F(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x^2 + 2y^2 = x^2 + y^2.$$

Spočteme parciální derivace a položíme rovny nule,

$$F_x(x,y) = 2x = 0, \quad F_y(x,y) = 2y = 0.$$

Dostali jsme stacionární bod $a_2^* = [0,0]$. Zkoumáme dále existenci vázaného extrému funkce f. Sestavíme matici druhých parciálních derivací a dosadíme bod a_2^*:

$$\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{pmatrix}\Bigg|_{[0,0]} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matice. Platí $D_1(a_2^*) = 2 > 0$, $D_2(a_2^*) = 4 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $a_2^* = [0,0]$ lokální minimum. Dopočteme $z = 0$. Funkce f má v bodě $x_3^* = [0,0,0]$ vázané lokální minimum.

Zbývá vyšetřit body $A = [3,0,3]$, $B = [-3,0,3]$, $C = [0,3,3]$, $D = [0,-3,3]$, které jsou průniky daných vazeb. Spočteme jednotlivé funkční hodnoty v nalezených bodech a porovnáme je

$$f(x_2^*) = 18, \;\; f(x_3^*) = 0,$$
$$f(A) = f(B) = f(C) = f(D) = 9,$$
$$f(x_3^*) < f(A) < f(x_2^*).$$

Funkce f má v bodě x_2^* globální maximum a v bodě x_3^* globální minimum.

10.3 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 10.1. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = 2xy + x^2$ na čtverci M s vrcholy $A = [-1,-1]$, $B = [1,-1]$, $C = [1,1]$, $D = [-1,1]$

Cvičení 10.2. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + 2y^2 - y - 3x$ na trojúhelníku s vrcholy $A = [-2,0]$, $B = [1,0]$, $C = [0,1]$.

Cvičení 10.3. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2y$ na kruhu o rovnici $x^2 + y^2 \le 1$.

Cvičení 10.4. Najděte globální extrémy funkce $f(x,y) = xy$ na množině M určené nerovností $9x^2 + y^2 \le 4$.

Cvičení 10.5. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2$ na obdélníku M určeném body $A = [0,0]$, $B = [2,0]$, $C = [2,1]$, $D = [0,1]$.

Cvičení 10.6. Na množině M určené nerovnostmi $x^2 \le y$, $x \ge 0$, $y \le 9$ najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x,y) = xy - x + y - 1$.

Cvičení 10.7. Najděte globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y$ na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \ge |y| \wedge x^2 + y^2 \le 20\}$.

Cvičení 10.8. Na množině M určené vztahem $x^2 + y^2 \le z \le 1$ najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x,y,z) = x + y + z$.

Cvičení 10.9. Na množině M určené nerovností $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ najděte globální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2x$.

Cvičení 10.10. Najděte globální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$$

na množině M určené nerovností $x^2 + y^2 + z^2 \ge 16$.

Řešení ke cvičením

Cvičení 1.1. $\mathbb{R}^2$ □

Cvičení 1.2. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 - 3y^2 \leq 1\}$ □

Cvičení 1.3. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| \geq |y|, x \neq y\}$ □

Cvičení 1.4. $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0\}$ □

Cvičení 1.5. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq 4, x \neq 0\}$, všechny body ležící na a vně kružnice o poloměru 2 se středem v počátku □

Cvičení 1.6. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; xy - 3 > 0\}$, všechny body, které leží v prvním kvadrantu nad a ve třetím kvadrantu pod větví hyperboly $xy = 3$ □

Cvičení 1.7. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x + y \leq 1\}$, všechny body, které leží na a mezi rovnoběžnými přímkami $y = -x - 1$ a $y = -x + 1$ □

Cvičení 1.8. $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$, všechny body ležící uvnitř a na povrchu koule o poloměru 3 se středem v počátku □

Cvičení 1.9. kružnice se středem v počátku □

Cvičení 1.10. elipsy se středem v počátku, jejichž hlavní poloosa je třikrát delší než vedlejší a leží v ose y □

Cvičení 2.1. $\sqrt{3}$ □

Cvičení 2.2. 0 □

Cvičení 2.3. 0 □

Cvičení 2.4. neexistuje □

Cvičení 2.5. neexistuje □

Cvičení 2.6. 0 □

Cvičení 2.7. e □

Cvičení 2.8. 0 □

Cvičení 2.9. ano □

Cvičení 2.10. ano □

Cvičení 2.11. $c = 1$ □

Cvičení 2.12. limita neexistuje □

Cvičení 3.1. $f_x(1,0) = 1, f_y(1,0) = 2$ $\square$

Cvičení 3.2. $f_x(\pi/6, \pi/3) = f_y(\pi/6, \pi/3) = 0$ $\square$

Cvičení 3.3. $f_x = e^x(\tan(x-y) + 1/\cos^2(x-y)), f_y = -e^x/\cos^2(x-y)$ $\square$

Cvičení 3.4. $f_x = \frac{2}{\sqrt{x}(3y^2+1)}, f_y = \frac{-24\sqrt{x}y}{(3y^2+1)^2}$ $\square$

Cvičení 3.5. $f_x = \frac{7y}{(x+2y)^2}, f_y = -\frac{7x}{(x+2y)^2}$ $\square$

Cvičení 3.6. $f_x = \frac{y}{\sqrt{x}}, f_y = 2\sqrt{x} - \frac{y}{z}e^{y/z} - e^{y/z}, f_z = \frac{y^2}{z^2}e^{y/z}$ $\square$

Cvičení 3.7. $f_w = 2wu^2 - x^3 - xuz^2\sin(wz^2), f_x = -3wx^2 + u\cos(wz^2),$
$f_y = 128y^7z^4, f_z = -2wxuz\sin(wz^2) + 64y^8z^3$ $\square$

Cvičení 3.8. $f_{xy} = f_{yx} = 3e^{-3x}\sin y$ $\square$

Cvičení 3.9. $f_{xy} = f_{yx} = -1/(x+y)^2$ $\square$

Cvičení 3.10. ano $\square$

Cvičení 4.1. Ano, funkce je diferencovatelná. $\square$

Cvičení 4.2. $\mathrm{d}f(\frac{\pi}{8}, 1, 2)(h_1, h_2, h_3) = 16h_1 + (4-\pi)h_2 + 4h_3$ $\square$

Cvičení 4.3. $\mathrm{d}f(-1,1)(h_1,h_2) = \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}h_2$ $\square$

Cvičení 4.4. $\mathrm{d}^2f(4,1)(h_1,h_2) = 2\pi\, h_1h_2 - h_2^2$ $\square$

Cvičení 4.5. $\mathrm{d}^2f(-4, \frac{\pi}{3}, 2)(h_1,h_2,h_3) = \frac{1}{2}h_1^2 - \frac{1}{2}h_2^2 + 9h_3^2 - \sqrt{3}h_1h_2 +$
$+ 4h_1h_3 - 4\sqrt{3}h_2h_3$ $\square$

Cvičení 4.6. $\mathrm{d}^3f(x,y)(h_1,h_2) = \frac{1}{x^2}h_1^3 - 3\frac{1}{y^2}\,h_1h_2^2 + 2\frac{x}{y^3}h_2^3$ $\square$

Cvičení 4.7. $f(x,y) = -\frac{1}{2}y^2\cos 2x - 4y + c$ $\square$

Cvičení 4.8. tečná rovina: $z = 3x - 2y - 4 + \ln 8$, normála: $x = 2 - 3t$, $y = 1 + 2t$, $z = \ln 8 + t$, $t \in \mathbb{R}$ $\square$

Cvičení 4.9. $T_2(x,y) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}x + y + 1$, $T_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{49}{32}$ $\square$

Cvičení 4.10. $T_3(x,y) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(y-\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{16}(x-1)^2 +$
$+ \frac{1}{8}(x-1)(y-\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{16}(y-\sqrt{3})^2 - \frac{1}{8}(x-1)^2(y-\sqrt{3}) + \frac{1}{24}(y-\sqrt{3})^3$ $\square$

Cvičení 4.11. $T_2(x,y,z) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{4}(y-2) + \frac{1}{16}(z-4) -$
$- \frac{1}{64}(z-4)^2 - \frac{1}{16}(x-1)(z-4) + \frac{1}{16}(y-2)(z-4)$ $\square$

Cvičení 5.1. $(5\cos 5x\cos 3x + 3\sin 5x\sin 3x)/(\sin^2 5x + \cos^2 3x)$ $\square$

Cvičení 5.2. $(x+y^2)^{-1}(1/2\sqrt{1+t}+y/\sqrt{t})$ ☐

Cvičení 5.3. $(-2t+1)e^{-t^2-t}$ ☐

Cvičení 5.4. $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial t} = 2/(s+t)$ ☐

Cvičení 5.5. $\frac{\partial w}{\partial s} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial t} = 5e^t$ ☐

Cvičení 5.6. $\frac{\partial w}{\partial r} = 3r^2s^3t - 1/(r^2st^3)$, $\frac{\partial w}{\partial s} = 3r^3s^2t - 1/(rs^2t^3)$,
$\frac{\partial w}{\partial t} = r^3s^3 - 3/(rst^4)$ ☐

Cvičení 5.7. $\frac{\partial w}{\partial r} = 2r[(s^2-t^2)/(r^2+s^2)]^2 w$, $\frac{\partial w}{\partial s} = 2s[(r^2+t^2)/(r^2+s^2)]^2 w$,
$\frac{\partial w}{\partial t} = 2t[(s^2-r^2-2t^2)/(r^2+s^2)]w$ ☐

Cvičení 5.8. $\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\phi + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\phi$, $\frac{\partial z}{\partial \phi} = -\frac{\partial z}{\partial x} r\sin\phi + \frac{\partial z}{\partial y} r\cos\phi$ ☐

Cvičení 5.9. ano ☐

Cvičení 5.10. Návod: položte $u = x+at, v = x-at$ ☐

Cvičení 6.1. $\frac{7}{52}$ ☐

Cvičení 6.2. $e(\frac{\sqrt{2}-1}{2})$ ☐

Cvičení 6.3. $7\sqrt{3}-16$ ☐

Cvičení 6.4. 0 ☐

Cvičení 6.5. -1 ☐

Cvičení 6.6. $(2/5, 1/5)$ ☐

Cvičení 6.7. $(2, -3/2, -2)$ ☐

Cvičení 6.8. $-8\sqrt{\pi/3}, (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ ☐

Cvičení 6.9. $2\sqrt{6}, (-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -4/\sqrt{6})$ ☐

Cvičení 6.10. $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), 50\sqrt{2}^{\circ}C/\mathrm{cm}$ ☐

Cvičení 7.1. $y' = -\frac{y[(x+y)\ln(x+y)+x]}{x[(x+y)\ln(x+y)+y]}$ ☐

Cvičení 7.2. $y'(0) = 0$ ☐

Cvičení 7.3. $y'(1) = \pi$, $y''(1) = 2\pi$ ☐

Cvičení 7.4. $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$, $y''(\frac{\pi}{2} = -3$ ☐

Cvičení 7.5. tečna $x+2y-3=0$, normála $2x-y-1=0$ ☐

Cvičení 7.6. $P[0,1]$ lokální minimum, $Q[0,-1]$ lokální maximum ☐

Cvičení 7.7. $z_x = 1$, $z_y = \frac{z-x}{y}$ $\square$

Cvičení 7.8. $z_x = -\frac{1+z^2}{1+x^2}$, $z_y = -\frac{1+z^2}{1+y^2}$ $\square$

Cvičení 7.9. $z_x(1,2) = 1$, $z_y(1,2) = -\frac{1}{2\ln 2}$, $z_{xx}(1,2) = 0$,
$z_{xy}(1,2) = -\frac{1}{2\ln 2}$, $z_{yy}(1,2) = \frac{2+\ln 2}{4\ln^2 2}$ $\square$

Cvičení 7.10. $5x + y - z - 3 = 0$ $\square$

Cvičení 8.1. $[3, -1, -5]$ $\square$

Cvičení 8.2. $[-2, 0, -7]$, $[-2, 1, -9]$ $\square$

Cvičení 8.3. $[0, 0]$ lokální minimum, $[\pm\sqrt{2}, -1]$ sedlové body $\square$

Cvičení 8.4. funkce nemá stacionární body $\square$

Cvičení 8.5. $[0, k\pi]$ k je celé číslo - sedlové body $\square$

Cvičení 8.6. $[4/3, 4/3]$ lokální maximum, $[0, 0]$, $[4, 0]$, $[0, 4]$ sedlové body $\square$

Cvičení 8.7. $x = y = z = 17$ $\square$

Cvičení 8.8. $[2/7, 4/7, 6/7]$ $\square$

Cvičení 8.9. $[2, 2, 2]$, $[2, -2, -2]$, $[-2, 2, -2]$, $[-2, -2, 2]$, vzdálenost všech těchto bodů je $2\sqrt{3}$ $\square$

Cvičení 8.10. dno, víko 2x2, výška 5 $\square$

Cvičení 9.1. $[\frac{9}{16}, \frac{1}{8}]$ - vázané lokální minimum $\square$

Cvičení 9.2.
$[-\frac{12}{5}, -\frac{12}{5}]$ vázané lokální maximum,
$[\frac{12}{5}, \frac{12}{5}]$ vázané lokální minimum $\square$

Cvičení 9.3.
$[1, 1]$ vázané lokální minimum,
$[-1, -1]$ vázané lokální minimum $\square$

Cvičení 9.4.
$[1, 0]$, $\left[-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$, $\left[-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ vázaná lokální minima,
$[-1, 0]$, $\left[\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$, $\left[\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ vázaná lokální maxima $\square$

Cvičení 9.5. $[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} - 1]$, $[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi, \frac{\pi}{4} - 1]$ vázaná lokální maxima $\square$

Cvičení 9.6. $[16, 16]$ lokální vázané minimum $\square$

Cvičení 9.7. $[2,2,1]$ lokální vázané minimum □

Cvičení 9.8. $\left[\sqrt{\frac{8}{3}},\sqrt{\frac{8}{3}},\sqrt{\frac{8}{3}}\right]$ lokální vázané maximum,
$\left[-\sqrt{\frac{8}{3}},-\sqrt{\frac{8}{3}},-\sqrt{\frac{8}{3}}\right]$ lokální vázané minimum □

Cvičení 9.9. $[\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}]$ lokální vázaná minima,
$[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}]$ lokální vázaná maxima □

Cvičení 9.10. $[\frac{44}{31},\frac{1}{31},-\frac{27}{31}]$ lokální vázané minimum □

Cvičení 10.1. $[1,1]$, $[-1,-1]$ globální maxima,
$[1,-1]$, $[-1,1]$ globální minima □

Cvičení 10.2. $[\frac{-2-\sqrt{22}}{3},\frac{5+\sqrt{22}}{3}]$ globální maximum,
$[1,0]$ a $[-2,0]$ globální minima □

Cvičení 10.3. $\left[\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$, $\left[-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$ globální maxima,
$\left[\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$, $\left[-\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$ globální minima □

Cvičení 10.4. $[\frac{\sqrt{2}}{3},\sqrt{2}]$, $[-\frac{\sqrt{2}}{3},-\sqrt{2}]$ globální maxima,
$[-\frac{\sqrt{2}}{3},\sqrt{2}]$, $[\frac{\sqrt{2}}{3},-\sqrt{2}]$ globální minima □

Cvičení 10.5. $[0,0]$, $[2,0]$, $[2,1]$, $[0,1]$ globální maxima,
$[1,\frac{1}{2}]$ globální minimum □

Cvičení 10.6. $[3,9]$ globální maximum,
$[\frac{1}{3},\frac{1}{9}]$ globální minimum □

Cvičení 10.7. $[\sqrt{10},-\sqrt{10}]$ globální maximum,
$[2,1]$ globální minimum □

Cvičení 10.8. $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$ globální maximum,
$[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ globální minimum □

Cvičení 10.9. $[1,\sqrt{3},0]$, $[1,-\sqrt{3},0]$ globální maxima,
$[-1,0,0]$ globální minimum □

Cvičení 10.10. množina M není kompaktní □