Kapitola 3

Křivkový integrál

3.1 Výpočet křivkového integrálu

Příklad 3.1.1: Vypočtěte křivkové integrály 1. druhu po dané křivce γ:

1. $\int_\gamma \frac{1}{x-y}\, ds$, kde γ je úsečka AB, $A = [0,-2]$, $B = [4,0]$
2. $\int_\gamma x\, ds$, kde γ je oblouk paraboly $y = x^2$, $A = [2,4]$, $B = [1,1]$
3. $\int_\gamma (x+y)\, ds$, kde γ je obvod trojúhelníku s vrcholy $A = [1,-1]$, $B = [2,-1]$, $C = [1,0]$
4. $\int_\gamma x^2 y\, ds$, kde γ je oblouk kružnice $\vec{r}(t) = (a\cos t,\ a\sin t)$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, $a > 0$, $a > 0$ konstanta
5. $\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\, ds$, kde γ je kružnice $x^2+y^2-ax = 0$, $a > 0$
6. $\int_\gamma x^2\, ds$, kde γ je oblouk AB křivky $y = lnx$, $A = [2, \ln 2]$, $B = [1,0]$
7. $\int_\gamma (x^2+y^2+z^2)\, ds$, kde γ je oblouk šroubovice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = at$; $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $a > 0$
8. $\int_\gamma xy\, ds$, kde γ je obvod obdélníku určený křivkami $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 2$
9. $\int_\gamma (x^{4/3}+y^{4/3})\, ds$, kde γ je asteroida $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$
10. $\int_\gamma \sqrt{2y}\, ds$, kde γ je část cykloidy $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $a > 0$
11. $\int_\gamma (x^2+y^2)\, ds$, kde γ je křivka $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $a > 0$
12. $\int_\gamma z\, ds$, kde γ je křivka $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $t \in \langle 0, \sqrt{2}\rangle$.

13. $\int_\gamma \frac{z^2}{x^2+y^2}\,ds$, kde γ je oblouk šroubovice $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = at,$ $t \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ a > 0$

14. $\int_\gamma \sqrt{16x^2+y^2}\,ds$, kde γ je elipsa $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$

15. $\int_\gamma (2z - \sqrt{x^2+y^2})\,ds$, kde γ je první závit šroubovice $x = t\cos t,\ y = t\sin t,$ $z = t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$

16. $\int_\gamma (x-y)\,ds$, kde γ je kružnice $x^2 + y^2 - ax = 0,\ a > 0$

17. $\int_\gamma xy\,ds$, kde γ je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pro $x \geq 0,\ y \geq 0,\ a, b > 0$

18. $\int_\gamma 2(z-y^2)xy\,ds$, kde γ je proniková křivka ploch $x^2 + y^2 = 1,\ z = x^2$ pro $y \geq 0,\ y \geq -x$

19. $\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, kde γ je kružnice $x^2 + y^2 - 4x = 0$

20. $\int_\gamma |x(y-1)|\,ds$, kde γ je proniková křivka ploch $x^2 + y^2 - 2y = 0,\ z = x^2 + y^2$ pro $y \geq 1$

21. $\int_\gamma y\,ds$, kde γ je proniková křivka ploch $x^2 + y^2 = z^2,\ x^2 + y^2 = ax,\ a > 0$ v 1. oktantě

Výsledky:

1. $\left[\sqrt{5}\ln 2\right]$
2. $\left[\frac{1}{12}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)\right]$
3. $\left[1 + \sqrt{2}\right]$
4. $\left[\frac{a^4}{3}\right]$
5. $[2a^2]$
6. $\left[\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right)\right]$
7. $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3(4\pi^2 + 3)\right]$
8. $[24]$
9. $\left[4a^{\frac{7}{3}}\right]$
10. $\left[4\pi\sqrt{a^3}\right]$
11. $[2\pi^2 a^3(1 + 2\pi^2)]$
12. $\left[\frac{8-2\sqrt{2}}{3}\right]$
13. $\left[\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi^3 a\right]$
14. $[10\pi]$
15. $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{(2\pi^2+1)^3} - 1\right)\right]$
16. $\left[\frac{\pi a^2}{2}\right]$
17. $\left[\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}\right]$
18. $\left[\frac{1}{6}(\sqrt{8} - 1)\right]$
19. $[32]$
20. $\left[\frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 1)\right]$

21. $\left[\frac{a^3}{3}(2\sqrt{2}-1)\right]$

Příklad 3.1.2: Vypočtěte křivkové integrály 2. druhu po dané křivce γ (uvažujme pravotočivý souřadnicový systém):

1. $\int_\gamma y\,dx\ +\ x\,dy$, kde γ je orientovan a čtvrtkružnice $\vec{r}(t) = (a\cos t,\ a\sin t)$, $0 \le t \le \pi/2$ a $A = [a, 0]$ je počáteční bod, $a > 0$

2. $\int_\gamma x\,dx\ +\ y\,dy\ +\ (x+y-1)\,dz$, kde γ je orientovaná úsečka AB, $A[1,1,1]$, $B = [2,3,4]$

3. $\int_\gamma (x^2+y^2)\,dx\ +\ (x^2-y^2)\,dy$, kde γ je orientovaná křivka $y = 1 - |1-x|$ pro $0 \le x \le 2$, počáteční bod $A = [2,0]$

4. $\int_\gamma yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, kde γ je oblouk AB šroubovice $\vec{r}(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ bt/2\pi)$ (orientovaný) od bodu $A = [a,0,0]$ do $B = [a,0,b]$, $a, b > 0$ konstanty

5. $\int_\gamma (2a-y)\,dx\ +\ x\,dy$, kde γ je oblouk cykloidy orientovaný souhlasně s daným parametrickým vyjádřením pro $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $a > 0$

6. $\int_\gamma y^2\,dx\ -\ x^2\,dy$ po čtvrtkružnici (orientované) od bodu $A = [1,0]$ do bodu $B = [0,1]$

7. $\int_\gamma \frac{1}{|x|+|y|}\,dx\ +\ \frac{1}{|x|+|y|}\,dy$, kde γ je orientovaný obvod čtverce $ABCD$, $A = [1,0]$, $B = [0,1]$, $C = [-1,0]$, $D = [0,-1]$

8. $\int_\gamma (x^2-2xy)\,dx\ +\ (y^2-2xy)\,dy$, kde γ je orientovaný oblouk AB paraboly $y = x^2$ od bodu $A = [-1,1]$ do bodu $B = [1,1]$

9. $\int_\gamma (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, kde γ je orientovaný oblouk ABC elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $A = [0,b]$, $B = [x_B > 0, y_B > 0]$, $C = [a,0]$, $a, b > 0$

10. $\int_\gamma 2(x^2+y^2)\,dx + (2y-8)\,dy$, kde γ je orientovaná část kružnice $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t)$, $0 < t < \pi$, $A = [a,0]$ je počáteční bod, $a > 0$

11. $\int_\gamma (x^2+y^2)\,dx\ +\ (x^2-y^2)\,dy$, kde γ je obvod trojúhelníku s vrcholy $A = [0,0]$, $B = [1,0]$, $C = [0,1]$ orientovaný kladně

12. $\int_\gamma xy\,dx\ +\ y^2\,dy$, kde γ je oblouk AB křivky $y = \arctan x$ od bodu $A = [1, ?]$ do bodu $B = [0, ?]$

13. $\int_\gamma y\,dx + x\,dy$, kde γ je oblouk ABC křivky $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ od bodu $A = [0, y_A < 0]$ do bodu $C = [1, y_C > 0]$, je-li $B = [\sqrt{2}, 0]$

14. $\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz$, kde γ je oblouk ABC na pronikové křivce ploch $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$ od bodu $A = [1, ?, ?]$ do bodu $C = [-1, ?, ?]$, je-li $B = [?, 1, ?]$

15. $\int_\gamma x\,dx - 12y\,dy + 18\,dz$, kde γ je oblouk AB na pronikové křivce ploch $x+y-1 = 0$, $9x^2 + 4y^2 - 36z = 0$ od bodu $A = [1, ?, ?]$ do bodu $B = [?, 1, ?]$

16. $\int_\gamma \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$, kde γ je orientovaná úsečka AB, $A = [1, 1, 1]$, $B = [4, 4, 4]$

17. $\int_\gamma x\,dx + y\,dy + yz\,dz$, kde γ je proniková křivka ploch $x^2 + 4y^2 = z$, $(x-2)^2 + 4y^2 = 4$ orientovaná souhlasně s obloukem $ABC \subset \gamma$, kde $A = [0, 0, 0,]$, $B = [x_B > 0, y_B > 0, z_B > 0]$, $C = [x_C > 0, 0, t_C > 0]$

18. $\int_\gamma y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, kde γ je oblouk ABC na pronikové křivce ploch $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$, $z \geq 0$, $a > 0$ od bodu $A = [a, ?, ?]$ do bodu $C = [0, ?, ?]$, je-li $B = [x_B > 0, y_B > 0, z_B > 0]$

Výsledky:

1. $[0]$
2. $[13]$
3. $[-\frac{4}{3}]$
4. $[0]$
5. $[-2\pi a^2]$
6. $[-\frac{4}{3}]$
7. $[0]$
8. $[-\frac{14}{15}]$
9. $\left[\frac{a^2+b^2}{2}\right]$
10. $[-4a^3]$
11. $[0]$
12. $[-\frac{1}{192}(\pi^3 + 48\pi - 96)]$
13. $[\sqrt{2}]$
14. $[\frac{4-3\pi}{6}]$
15. $[-9]$
16. $[3\sqrt{3}]$
17. $[64\pi]$
18. $\left[-\frac{\pi a^3}{4}\right]$

Příklad 3.1.3: Ověřte, že daný integrál nezávisí na integrační cestě v $\mathbf{E_2}[\mathbf{E_3}]$ eventuálně v $\Omega \subset \mathbf{E_2}$ $[\Omega \subset \mathbf{E_3}]$ a vypočtěte jeho hodnotu od bodu A do bodu B:

1. $\int_\gamma \frac{1-y^2}{(1+x)^2}\,dx + \frac{2y}{1+x}\,dy,\ A = [0,0],\ B = [1,1]$
2. $\int_\gamma \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2},\ A = [-2,-6],\ B = [1,0]$
3. $\int_\gamma (2y - 6xy^3)\,dx + (2x - 9x^2y^2)\,dy,\ A = [0,0],\ B = [2,2]$
4. $\int_\gamma \frac{2-y^2}{2(1+x)^2}\,dx + \frac{y}{1+x}\,dy$ v oblasti $\Omega_1 = \{[x,y] \in \mathbf{E_2};\ x < -1\}$, eventuálně $\Omega_2 = \{[x,y] \in \mathbf{E_2};\ x > -1\},\ A = [0,0],\ B = [1,1]$
5. $\int_\gamma (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y)\,dx + (\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x)\,dy$ v oblasti $\Omega = \mathbf{E_2} - \{[0,0]\},\ A = [3,4],$ $B = [5,12]$
6. $\int_\gamma \frac{x}{(x+y)^2}\,dx + \frac{2x+y}{(x+y)^2}\,dy$ v oblasti $\Omega_1 = \{[x,y] \in \mathbf{E_2};\ y > -x\}$, eventuálně $\Omega_2 = \{[x,y] \in \mathbf{E_2};\ y < -x\},\ A = [1,1],\ B = [3,2]$
7. $\int_\gamma (2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2x}{y^2})\,dx + (2x^2y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2x^2}{y^3})\,dy$ v oblasti $\Omega_i\ (i = 1,2,3,4) \subset \mathbf{E_2}$ neobsahující přímky $x = 0$ a $y = 0,\ A = [2,1],\ B = [1,2]$
8. $\int_\gamma x\,dx + y\,dy + (x + y - 1)\,dz,\ A = [2,3,4],\ B = [1,1,1]$
9. $\int_\gamma xz^2\,dx + y^3\,dy + x^2z\,dz,\ A = [-1,1,2],\ B = [-4,2,-1]$
10. $\int_\gamma \frac{x\,dx + y\,dy + 2z^3\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^4}}$ v oblasti $\Omega = \mathbf{E_3} - \{[0,0,0]\},\ A = [0,0,1],\ B = [0,2,0]$

Výsledky:

1. $\left[1, V(x,y) = \frac{y^2-1}{x+1} + c\right]$
2. $[-\frac{1}{2}\ln 40]$
3. $[-88]$
4. $\left[\frac{3}{4},\ V(x,y) = \frac{y^2-2}{2(x+1)} + c\right]$
5. $[56]$
6. $[\ln\frac{5}{2} - \frac{1}{10}]$
7. $[-\frac{15}{4}]$
8. $[-13]$
9. $\left[\frac{39}{4},\ V(x,y,z) = \frac{x^2z^2}{2} + \frac{y^4}{4} + c\right]$
10. $\left[1,\ V(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^4} + c\right]$

Příklad 3.1.4: Ověřte, že jsou splněny podmínky pro užití Greenovy věty a užijte ji k výpočtu následujících integrálů:

1. $\int_\gamma (x+y)^2\,dx - (x+y)^2\,dy$, kde γ je trojúhelník s vrcholy $O=[0,0]$, $A=[1,0]$, $B=[0,1]$ orientovaný kladně
2. $\int_\gamma (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$, kde γ je uzavřená záporně orientovaná křivka tvořená sinusoidou $y=\sin x$ a úsečkou na ose x pro $0\le x\le\pi$
3. $\int_\gamma (x^2-y^2)\,dx + (x^2+y^2)\,dy$, kde γ je uzavřená záporně orientovaná křivka tvořená půlkružnicí $y=\sqrt{r^2-x^2}$ a úsečkou na ose x
4. $\int_\gamma (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$, kde γ je elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ orientovaná kladně
5. $\int_\gamma \frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}\,dx + \frac{2}{y}\arctan\frac{x}{y}\,dy$, kde γ je hranice oblasti $\Omega=\{[x,y]\in\mathbf{E_2};$ $1\le x^2+y^2\le 4,\ x\le y\le x\sqrt{3}\}$ orientovaná kladně
6. $6\int_\gamma (3x^2\cos y - y^3)\,dx + (x^3-2x^3\sin y)\,dy$, kde γ je kladně orientovaná kružnice $x^2+y^2=1$
7. $\int_\gamma (xy+x^2)\,dx + x^2y\,dy$, kde γ je kladně orientovaná hranice oblasti $\Omega=\{(x,y)\in\mathbf{E_2}; 0\le x\le y\le 1\}$
8. $\int_\gamma \frac{1}{y}\,dx - \frac{1}{x}\,dy$, kde γ je trojúhelník s vrcholy $A=[1,1]$, $B=[2,1]$, $C=[2,2]$ orientovaný kladně
9. $\int_\gamma (xy+x+y)\,dx + (xy+x-y)\,dy$, kde γ je kladně orientovaná kružnice $x^2+y^2=ax,\ a>0$
10. Vypočtěte rozdíl integrálů I_1-I_2, je-li $I_1=\int_{\gamma_1}(x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$, kde γ_1 je orientovaná úsečka AB, $I_2=\int_{\gamma_2}(x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$, kde γ_2 je orientovaný oblouk AB paraboly $y=x^2$, $A=[0,0]$, $B=[1,1]$

Výsledky:

1. $\left[-\frac{4}{3}\right]$
2. $[4\pi]$
3. $\left[-\frac{4}{3}r^3\right]$
4. $[-2\pi ab]$
5. $\left[\frac{\ln 2}{12}\pi\right]$
6. $\left[\frac{3\pi}{2}\right]$
7. $\left[\frac{1}{12}\right]$
8. $\left[\frac{1}{2}\right]$
9. $\left[-\frac{\pi a^3}{8}\right]$
10. $\left[\frac{1}{3}\right]$