1 Reálná čísla.

Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ definujeme axiomaticky:

1. Je to množina vybavena uspořádáním $\leq$, které je
   - (R1) úplné, tj. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ nebo $y \leq x$,
   - (R2) spojité, tj. pro všechny neprázdné podmnožiny $X, Y \subset \mathbb{R}$ takové, že $\forall x \in X \forall y \in Y : x \leq y$, existuje $z \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall x \in X \forall y \in Y : x \leq z \leq y$.
2. Nese strukturu pole, tj.
   - (R3) je vybavena binární operací $+$ (nazýváme ji sčítání), vzhledem k ní je uzavřená (tzn. součet dvou prvků z $\mathbb{R}$ je opět prvek z $\mathbb{R}$), obsahuje vybraný prvek 0, který nazýváme neutrálním prvkem vzhledem ke sčítání, a ke každému prvku $x \in \mathbb{R}$ existuje opačný prvek $(-x) \in \mathbb{R}$, přičemž musí být $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ splněno:
     1. $x + y = y + x$ (komutativnost)
     2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativnost)
     3. $x + 0 = x$ (0 je neutrální prvek vzhledem k $+$)
     4. $x + (-x) = 0$,
   - (R4) je vybavena binární operací $\cdot$ (nazýváme ji násobení), vzhledem k této operaci je opět uzavřená (tzn. součin dvou prvků z $\mathbb{R}$ je opět prvek z $\mathbb{R}$), obsahuje vybraný prvek $1 \neq 0$, který nazýváme neutrálním prvkem vzhledem k násobení, a ke každému prvku $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existuje inverzní prvek $x^{-1} \in \mathbb{R}$, přičemž pro všechna x, y, z musí platit
     1. $x \cdot y = y \cdot x$ (komutativnost)
     2. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (asociativnost)
     3. $x \cdot 1 = x$ (1 je neutrální prvek vzhledem k $\cdot$)
     4. $x \neq 0$, potom $x \cdot x^{-1} = 1$
   - (R5) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ musí platit tzv. distributivní zákon

     $$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$
3. uspořádání je slučitelné se strukturou pole, tj.

(R6) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ platí: jestliže $x \leq y$, potom $x + z \leq y + z$

(R7) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí: jestliže $0 \leq x$ a $0 \leq y$, potom $0 \leq x \cdot y$.

Poznámka 1.1. Na $\mathbb{R}$ ještě zavádíme také znaménko $<$, kde $x < y :\Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$.

V následujícím cvičení budeme k důkazům využívat pouze tyto axiomy, žádné další poznatky, které jsme získali na středních školách a které považujeme za "běžné", používat nebudeme.

Cvičení 1.1. Využitím axiomů z definice reálných čísel dokažte, že platí:

1. $x \leq y \Longleftrightarrow x - y \leq 0$;
2. $x \leq y \wedge a \leq b \Longrightarrow x + a \leq y + b$;
3. $a \leq 0 \wedge x \leq y \Longrightarrow ax \leq ay$;
4. $(x \geq 0 \Longrightarrow -x \leq 0)$;
5. $(x \leq 0 \Longrightarrow -x \geq 0)$;
6. $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \Longrightarrow xy \geq 0$;
7. $x \geq 0 \wedge y \leq 0 \Longrightarrow xy \leq 0$;
8. $(a \leq 0 \wedge x \geq y) \Longrightarrow ax \leq ay$;
9. (malinko těžší) $x^2 > 0$, kdykoliv $x \neq 0$. Speciálně $1 > 0$;
   (v tomto příkladě budete muset využít toho, že $(-a) \cdot (-b) = ab$, což je fakt, který vyplývá z našich axiomů, jeho ověření ale necháme až na přednášku či cvičení z algebry)

Cvičení 1.2. Určete (pokud existují) horní závory, dolní závory, supremum, infimum, maximum a minimum množiny $M \subset \mathbb{R}$:

1. $M = (-\infty, 1]$,
2. $M = [-2, 3)$,
3. $M = (-2, 3)$,
4. $M = (1, \infty)$,

5. $M = [1, \infty)$,
6. $M = [-10, 10]$,
7. $M = \{1, 2, 3, \dots\}$,
8. $M = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

2 Matematická indukce

Při důkazu matematickou indukcí využíváme toho, že množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ je nejmenší induktivní podmnožina reálných čísel. Máme-li ukázat, že nějaký výrok platí pro všechna přirozená čísla, stačí nám ukázat, že platí pro nějakou induktivní podmnožinu $X \subset \mathbb{N}$. Z toho, že přirozená čísla jsou nejmenší induktivní podmnožinou reálných čísel (tedy X nemůže být menší než $\mathbb{N}$), máme $X = \mathbb{N}$, tedy dokazovaný výrok platí pro všechna přirozená čísla.
Schéma důkazu: Chceme ukázat, že výrok $V(n)$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Důkaz provádíme ve dvou krocích:
1) ukážeme, že výrok $V(n)$ platí pro $n = 1$, tedy že platí $V(1)$,
2) (tzv. indukční krok) z předpokladu platnosti výroku $V(n)$ pro $n = k$ ukážeme, že $V(n)$ platí pro $n = k + 1$.
Poznámka. Upozorňuji, že pod výrokem V je v příkladech schován nejčastěji nějaký vzorec, o kterém máme ukázat, že platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Ověření či předpoklad, že V platí pro $n = 1$, $n = k$, je potom jednoduché dosazení jedničky a čísla k do onoho vzorce.

Cvičení 2.1. 1. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Dokažte: $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Dokažte, že pro libovolně zvolenou hodnotu parametru $q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ vzorec:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

4. Řekneme, že posloupnost (a_n) reálných čísel je aritmetická, jestliže se každé dva její těsně po sobě jdoucí prvky rovnají až na konstantu d (číslo d se někdy nazývá <u>d</u>iference aritmetické posloupnosti): $(\exists d \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) : a_{n+1} - a_n = d$. Dokažte, že pro výpočet $n-$tého členu aritmetické posloupnosti s prvním členem a_1 a diferencí d platí vzorec

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

5. Dokažte, že součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d je dán vztahem

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

6. Řekneme, že posloupnost (a_n) reálných čísel je geometrická, jestliže se každé dva její těsně po sobě jdoucí prvky rovnají až na faktor q (číslo q se někdy nazývá <u>kv</u>ocient geometrické posloupnosti): $(\exists q \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Dokažte, že pro výpočet $n-$tého členu geometrické posloupnosti s prvním členem a_1 a kvocientem q platí vzorec

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

7. Dokažte, že součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q je dán vztahem

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

8. Dokažte, že pro všechny hodnoty parametru $x \in \mathbb{R}$ takové, že $x > -1$ a pro všechna přirozená čísla n platí tzv. *Bernoulliho nerovnost:*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

9. Dokažte tzv. *binomickou větu*: pro každá tři čísla $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ platí identita
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

10. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí:
$$6 | (n^3 - n).$$

11. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí:
$$\text{jestliže } 5|n^2, \text{ potom } 5|n.$$