MA I - cvičení
Příklady pro vás, 1. díl

20. září 2010

1. Jsou-li A, B, C množiny, pak platí:
$$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Longrightarrow A \subseteq C.$$

2. Buďte A, B, C množiny. Dokažte:
   (a) $A = A$;
   (b) $(A = B) \Longrightarrow (B = A)$;
   (c) $(A = B) \wedge (B = C) \Longrightarrow (A = C)$.

3. Nechť A, B, C jsou množiny. Dokažte:
   (a) $A \cap B \subseteq A$ a také $A \cap B \subseteq B$. Je-li navíc X taková množina, že $(X \subseteq A) \wedge (X \subseteq B)$, pak $X \subseteq A \cap B$.
   (b) $A \subseteq A \cup B$ a také $B \subseteq A \cup B$. Je-li navíc Y taková množina, že $(A \subseteq Y) \wedge (B \subseteq Y)$, pak $A \cup B \subseteq Y$.
   (c) $A \cup B = B \cup A$ a také $A \cap B = B \cap A$.
   (d) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; podobně $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
   (e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; podobně $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   (f) $A \cup \emptyset = A$ a $A \cap \emptyset = \emptyset$.
   (g) $A \cup A = A$; a $A \cap A = A$.
   (h) $A \cup (A \cap B) = A$; podobně $A \cap (A \cup B) = A$.
   (i) Jestliže $A \subseteq B$, pak $A \cup C \subseteq B \cup C$ a také $A \cap C \subseteq B \cap C$.

4. Buďte A, B, C množiny. Potom platí:
   (a) $A \setminus B \subseteq A$;
   (b) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$;
   (c) $A \setminus B = \emptyset \Longleftrightarrow A \subseteq B$;
   (d) $B \setminus (B \setminus A) = A \Longleftrightarrow A \subseteq B$;
   (e) $A \subseteq B \Longrightarrow A \setminus C = A \cap (B \setminus C)$;
   (f) $A \subseteq B \Longrightarrow C \setminus A \supseteq C \setminus B$;
   (g) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$; podobně $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

5. Jsou-li A, B, C množiny, pak platí:

   (a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$; podobně $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$.

   (b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$; podobně $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$.

Řešení. Pro začátek uvedeme pouze řešení příkladu 4e (neboli příkladu, který se objevil na písemce): podle příkladu 3a víme, že $A \cap B \subseteq A$. Snadno si sami dokážete, že pokud navíc $A \subseteq B$, platí v 3a dokonce rovnost, tj. $A \cap B = A$. Předpokládejme tedy, že $A \subseteq B$. Abychom ukázali, že platí požadovaná rovnost, musíme jako vždycky dokázat obě množinové inkluze. Dokažme nejprve, že $A \setminus C \subseteq A \cap (B \setminus C)$. Zvolíme libovolný prvek $x \in A \setminus C$. To ale vzhledem k tomu, že $A \cap B = A$ (vše stále za předpokladu, že $A \subseteq B$) znamená $x \in (A \cap B) \setminus C$. To zase díky definici rozdílu znamená, že $(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C \iff x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C)$, což neznamená nic jiného než $x \in A \cap (B \setminus C)$, jak nám bylo ukázati. Opačná inkluze: nechť $x \in A \cap (B \setminus C)$. Pak ale $x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \iff (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C \iff x \in (A \cap B) \wedge x \notin C$. Ale protože $A \cap B = A$, máme $x \in A \wedge x \notin C$, což podle definice znamená $x \in A \setminus C$. Tím je důkaz hotov. řřřžžžž