

Limita funkce

V celém textu jsou na pravé straně v závorkách uvedeny správné výsledky.

Cvičení 1. Spočítejte dané limity.

Jak na to: Pokuste se dosadit do daného výrazu číslo, ke kterému se x blíží. Pokud je výraz po dosazení definovaný, limitu jste jednoduše spočítali. Problém ovšem nastane tehdy, když vyjde nedefinovaný výraz, tj. např. výraz typu $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ nebo $0 \cdot \infty$ (někteří z Vás možná už ze střední školy ví, že lze v tomto případě použít l'Hospitalovo pravidlo, v tuto chvíli na něj ale zapomeňte a zatím ho nepoužívejte...). Potom je potřeba "odstranit příčinu" daného problému. Často Vám pomůže si uvědomit, že platí následující vzorce a dosadit:

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \\a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2), \\a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2), \\a^4 - b^4 &= (a^2 + b^2)(a + b)(a - b).\end{aligned}$$

Dále Vám také často pomůže dělení polynomu polynomem, v případě limit složených funkcí, kde se vyskytují goniometrické funkce, také vzorce pro goniometrické funkce (základní byste si měli pamatovat ze střední školy, další pak najdete v tabulkách, určitě i na internetu...). V případech limit funkcí např. tvaru $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + \sin bx}{cx + \sin dx}$ a podobně, využijte vzorec

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

1. $\lim_{x \rightarrow 16} (\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x} - 5)$ [3],
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)(x^2+2)}{(x-1)x^4}$ [6],
3. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$ [6],
4. $\lim_{x \rightarrow 2} (x-1) \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ [1],
5. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ $\left[-\frac{2}{5}\right]$,

6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 + 4x^2 - 3x - 18}$ [0],
7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^5 - 3x + 2}$ [0],
8. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ [-1],
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x}$ [$\frac{\sqrt{2}}{4}$],
10. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 4x - 5}$ [$\frac{1}{24}$],
11. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x^3} - 8}$ [$\frac{1}{12}$],
12. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{\sqrt{x+3} - 3}$ [6],
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[4]{1+4x} - x - 1}$ [- $\frac{2}{3}$],
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{2+x} - \sqrt[3]{2-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$ [$\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$],
15. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2+7} - \sqrt{7-3x}}{\sqrt{|x+3|} - \sqrt{|x^2-9|}}$ [0],
16. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x}$ [$\frac{\sqrt{2}}{2}$],
17. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x - \sin 2x + 1}{\cos x - \sin x}$ [$\sqrt{2}$],
18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$ [$\frac{3}{2}$],
19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan \frac{x}{2}}$ [4],
20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin x}{2 \sin x + 3x}$ [$\frac{2}{5}$],
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \tan 2x + \sin 2x}{3x + \sin \frac{x}{2} + \tan x^2}$ [$\frac{1}{2}$],
22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$ [8],
23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{\sin 3x + 9}}{\tan 2x}$ [- $\frac{1}{4}$],
24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - \sin^2 x}{x^2 + \tan^2 2x}$ [$\frac{2}{5}$],
25. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|4-x|}{x-4}$ [neexistuje],

26. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1+|x-1|}{x-1}$ [neexistuje],
27. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2-5x+2}{|4x^2-7x-2|}$ $[\frac{1}{3}]$,
28. $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^3+5x^2+7x+3}{|2x^2+5x-3|}$ $[-\frac{4}{7}]$,
29. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|3x^4+13x^3+14x^2-4x-8|}{2x^2+x-1}$ $[\frac{5}{3}]$,
30. $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x^5+2x^4-x-2|}{x^2-4}$ $[\frac{15}{4}]$.

Cvičení 2. Spočítejte limity složených funkcí:

Jak na to: Řekneme-li to hodně jednoduše, stačí přehodit limitu a vnější funkci. Nemůžeme to ale udělat úplně automaticky. Je potřeba ověřit (alespoň v hlavě), jestli je daná vnější funkce spojitá v limitním bodě vnitřní funkce (více teorie na přednášce ...). Pokud ano, je vše v pořádku.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \arccos \frac{2x}{1+x^2}$ $[\frac{\pi}{2}]$,
2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} \ln^2 \sin^3 2x$ $[-\ln 8]$,
3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}^-} \arccos \frac{|\sqrt{2}x-1|}{2x^2-1}$ $[\frac{2\pi}{3}]$,
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arccotg} \frac{1-2x}{x}$ $[\frac{-\pi}{4}]$,
5. $\lim_{x \rightarrow e} \arctan \ln x$ $[\frac{\pi}{4}]$,
6. $\lim_{x \rightarrow -1} \cos \frac{x^3+1}{x+1} \pi$ $[-1]$,
7. $\lim_{x \rightarrow -2} \sin \frac{x^4-16}{x^2+2x} \pi$ $[0]$,
8. $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \tan^2 \frac{x^4-4}{x+\sqrt{2}} \pi$ $[\tan^2(8\sqrt{2}\pi)]$,
9. $\lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{2x^2-3x+1}{5x^2-6x+1} \pi$ $[1]$,
10. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x}$ $[-\frac{\pi}{2}]$,
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$ $[2]$,
12. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$ $[\frac{1}{4}]$.

Cvičení 3. Spočítejte následující limity:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{(x-1)^2}$ $[-\infty]$,
2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2}{(x+2)^2}$ $[\infty]$,
3. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} \frac{x^2+1}{x^2-2}$ $[\infty]$,
4. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1}{9-x^2}$ $[-\infty]$,
5. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{\sin x}$ $[-\infty]$,
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos x}{x \cdot \arctan x}$ $[\infty]$,
7. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1-x}{x^4}}$ $[\infty]$,
8. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln \frac{4x}{x(x-3)}$ $[\infty]$,
9. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \arctan \frac{1}{1+x}$ $[\frac{-\pi}{2}]$,
10. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(x+2)}{x}$ $[-\infty]$,
11. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos x}$ [neexistuje],
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x}$ [neexistuje],
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos x}{\arcsin x}$ [neexistuje],
14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-5x+2}{\ln x}$ [neexistuje],
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x^2}{x}$ [neexistuje].

Cvičení 4. Spočítejte následující limity v nevlastním bodě (obdobně jako u posloupností):

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x+4}{2x^4-3x^3+1}$ $[0]$,
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4-3x^2+7x-1}{2x^4+2x}$ $[\frac{5}{2}]$,
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7+3x^2-x}{x^3+x^2-x-9}$ $[\infty]$,
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^6+2x^4-x}{4x^3-x}$ $[-\infty]$,

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^7 - x + 1}{6x^5 + x^2 - x + 3}$ $[\infty]$,
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 3x}{7x^3 - 1}$ $[\frac{5}{7}]$,
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 5x - 4x^3}{3x^3 + x^2 - 5}$ $[-\frac{4}{3}]$,
8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x}{x^2 - 1}$ $[0]$,
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x - 2} + \sqrt{x}$ $[\infty]$,
10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3}}{x - 1}$ $[-2]$,
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 - 1}}{1 - x}$ $[-1]$,
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x - 1}$ $[\frac{1}{2}]$,
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{3x^2 + \sqrt{x^3} + 2}$ $[\frac{1}{3}]$,
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{3x + 4\sqrt{5x}}}}{\sqrt{2x + 1}}$ $[\frac{1}{\sqrt{2}}]$,
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^5} + \sqrt[5]{x^3} + \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^4 + 2}}$ $[1]$,
16. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg} \frac{x^3 + 1}{(x - 1)^2}$ $[\pi]$,
17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccotg} \frac{x^4 - 1}{x^2 + 2}$ $[0]$,
18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{x^2 + 4}$ $[\infty]$,
19. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{x \cdot e^x}$ $[\infty]$,
20. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x^2 + 9}{x + 3}}$ $[0]$.

Cvičení 5. Spočítejte následující limity typu " $\infty - \infty$ " (upravte tento výraz a dále pokračujte způsobem, který jste používali v prvním cvičení):

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x - 3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right)$ $[\frac{1}{5}]$,
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$ $[-1]$,
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x - 2)^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)$ $[\infty]$,

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right) \quad [0].$$

Cvičení 6. Spočítejte následující limity (obdobným způsobem jako pro posloupnosti):

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x \quad [e^3],$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x \quad [e^{-1}].$$