1 Relace.

S pojmem relace jste se již určitě setkali na přednášce z algebry. Přesto si pro jistotu připomeneme, že relace mezi množinami A a B je libovolná podmnožina kartézského součinu $A \times B$. Nás budou zajímat především relace na množině, tj. relace mezi množinou A a A, které splňují určité vlastnosti. Nadefinujme si několik pojmů: Buď A množina a ρ relace na ní. Potom řekneme, že ρ je

1. *reflexivní*, jestliže $\forall x \in A : x\rho x$,
2. *symetrická*, jestliže kdykoliv $x\rho y$, potom také $y\rho x$,
3. *tranzitivní*, jestliže kdykoliv $x\rho y$ a zároveň $y\rho z$, potom $x\rho z$,
4. *antisymetrická*, jestliže kdykoliv $x\rho y$ a zároveň $y\rho x$, potom $x = y$.

Relaci na A, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní, nazýváme relací *ekvivalence.* Relaci, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní, nazýváme *uspořádáním.* Právě uspořádání nás zajímá. Pojem uspořádání totiž tvoří odrazový můstek k definování množiny reálných čísel a množiny přirozených čísel.
Na následujícím cvičení si procvičíte vše, co se týče relací.

Cvičení 1.1. Mějme zadanou množinu $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Vytvořte relaci na A, která je

1. reflexivní
2. symetrická
3. tranzitivní
4. relace ekvivalence
5. uspořádání
6. úplné uspořádání.

Cvičení 1.2. Buď A množina z předchozího příkladu. Jsou následující relace uspořádání? Pokud ne, upravte tak, aby to uspořádání bylo.

1. $\rho_1 = \{(a, b), (b, b), (c, d)\}$

2. $\rho_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(e,f)\}$

3. $\rho_3 = \{(a,b),(c,c),(c,d),(c,f),(d,c)\}$

4. $\rho_4 = \{(f,f),(b,c),(c,d)\}$

5. $\rho_5 = \{(f,f),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,c),(c,d),(a,d)\}$.

Cvičení 1.3. Mějme uspořádané množinyh (A, ρ_i) (které jste vytvořili tím, že jste dané relace doplnili na uspořádání). Rozhodněte, jak vypadají maximální, minimální, největší, nejmenší prvky těchto množin.

Cvičení 1.4. Buď $M = \{\bullet, \circ, \diamond, *, \star\}$, buď $\leq_i$ uspořádání na M:

1. $\leq_1 = \{(\bullet,\bullet),(\circ,\circ),(\diamond,\diamond),(*,*),(\star,\star),(\bullet,\diamond),(*,\star),(\diamond,\star),(\bullet,\star)\}$

2. $\leq_2 = \{(\bullet,\bullet),(\circ,\circ),(\diamond,\diamond),(*,*),(\star,\star),(\bullet,\diamond),(*,\star),(\diamond,\star),(\bullet,\star),(\circ,*)\}$

3. $\leq_3 = \{(\bullet,\bullet),(\circ,\circ),(\diamond,\diamond),(*,*),(\star,\star),(\diamond,\star),(\diamond,*),(\star,\circ),(\diamond,\circ)\}$

4. $\leq_4 = \{(\bullet,\bullet),(\circ,\circ),(\diamond,\diamond),(*,*),(\star,\star),(\diamond,\star),(\diamond,*),(\star,\circ),(\diamond,\circ),(\circ,\bullet),(\diamond,\bullet)\}$

5. $\leq_5$ je úplné uspořádání na M - sami si libovolně vytvořte.

Určete maximální, minimální, největší a nejmenší prvky následujících podmnožin A_i množiny M
(prvky množiny $(A_i, \leq_j)$ jsou uspořádány stejně jako v $(M, \leq_j)$):

a) $A_1 = \{\circ, \bullet\}$

b) $A_2 = \{\circ, \bullet, \diamond\}$

c) $A_3 = \{\star, \bullet, *\}$

d) $A_4 = \{\circ, \bullet, *\}$

e) $A_5 = \{\circ, \bullet, *, \diamond\}$

f) $A_6 = \{\bullet\}$.

Určete množiny horních závor, dolních závor, supremum a infimum množin A_i v množině $(M, \leq_j)$.

Cvičení 1.5. Mějme $(\mathbb{R}, \leq)$ množinu reálných čísel s uspořádáním, které známe už od základní školy (definici reálných čísel se dozvíme zanedlouho). Rozšiřme množinu $\mathbb{R}$ o dva prvky, a to ∞ a $-\infty$ a rozšiřme uspořádání na $\mathbb{R}$ na tuto rozšířenou množinu následujícím způsobem: $\forall x \in \mathbb{R} : x < \infty$ a $\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x$. Určete maximální, minimální, největší a nejmenší prvky následujících podmnožin B_i množiny reálných čísel a určete množiny horních závor a dolních závor, suprema a infima množin B_i v uspořádané množině $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$:

1. $B_1 = (1, 2)$
2. $B_2 = (1, 2) \cup [5, \infty)$
3. $B_3 = \{1, 2, 3\}$
4. $B_4 = (-\infty, 2) \cup [5, \infty)$
5. $B_5 = [1, 2) \cup [5, 8)$
6. $B_6 = [-1, 24]$
7. $B_7 = [-1, 28)$
8. $B_8 = \{-10\}$.

2 Zobrazení

Cvičení 2.1. Buďte $A = \{a, b, c, d\}$ a $B = \{1, 2, 3, 4\}$ množiny. Rozhodněte, zda je následující relace mezi A a B zobrazením. Pokud ano, určete, jestli je surjektivní, injektivní, bijektivní.

1. $f_1 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 3)\}$,
2. $f_2 = \{(a, 2), (b, 1), (a, 3), (c, 2), (d, 1)\}$,
3. $f_3 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$,
4. $f_4 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 4), (d, 3)\}$,
5. $f_5 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 1)\}$.

Cvičení 2.2. Buďte $A = \{a, b, c, d\}$ a $B = \{1, 2, 3\}$ množiny. Rozhodněte, zda je následující relace mezi A a B zobrazením. Pokud ano, určete, jestli je surjektivní, injektivní, bijektivní.

1. $f_1 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 3)\}$,
2. $f_2 = \{(a, 1), (b, 3), (b, 2), (c, 3)\}$.

Cvičení 2.3. Buďte $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{1, 2, 3, 4\}$ množiny. Rozhodněte, zda je následující relace mezi A a B zobrazením. Pokud ano, určete, jestli je surjektivní, injektivní, bijektivní.

1. $f_1 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$,
2. $f_2 = \{(a, 1), (b, 3), (c, 3)\}$.

Cvičení 2.4. Ověřte, zda jsou následující funkce na svém definičním oboru injektivní, surjektivní, bijektivní:

1. $f(x) = 5x + 1$,
2. $f(x) = x^2$,
3. $f(x) = x^3 - 1$,
4. $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$,
5. $f(x) = x^2 + 2x - 3$,
6. $f(x) = x^2 - 2x + 1$,
7. $f(x) = x - 1$.

Cvičení 2.5. Rozhodněte, zda k funkcím z předchozího příkladu existuje funkce inverzní. V kladném případě ji najděte a ověřte, že se opravdu jedná o inverzní funkci.