PŘÍKLADY A CVIČENÍ

1. Přirozená topologie $\mathbb{R}^n$

Příklady

1. *Dokažte, že čtverec* $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n;\ |x| + |y| \le 1\}$ *je kompaktní množina.*

Řešení: Stačí ukázat, že množina M je uzavřená a ohraničená. Uzavřenost lze dokázat přímo z definice uzavřené množiny; můžeme ale využít spojitosti zobrazení $f(x, y) = |x| + |y|$. Platí $M = f^{-1}(M) = (-\infty, 1]$, jedná se tedy o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení.
Jelikož pro každé $(x, y) \in M$ platí $\sqrt{x^2 + y^2} \le |x| + |y| \le 1$, je množina M ohraničená.

2. *Dokažte, že kanonická projekce* $\pi^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\pi^i(x) = x^i$, *je spojitá.*

Řešení: Nechť $U \subset \mathbb{R}$ je otevřená množina. Dokážeme, že $(\pi^i)^{-1}(U) = V$, kde

$$V = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{i-1 \text{ činitelů}} \times U \times \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n-i \text{ činitelů}}.$$

Nechť $x \in V$. Platí $\pi^i(x) = x^i \in U$, a tedy $x \in (\pi^i)^{-1}(U)$. Opačně, je-li $x \in (\pi^i)^{-1}(U)$, pak $\pi^i(x) \in U$. Jelikož $\pi^i(x) = x^i$, je $x^i \in U$, a tedy $x \in V$.

3. *Dokažte, že zobrazení* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *je spojité právě tehdy, když je spojitá každá jeho složka.*

Řešení: „$\Rightarrow$“ Pro složky f^1, f^2 zobrazení f platí $f^1 = \pi^1 \circ f$, $f^2 = \pi^2 \circ f$ (π^1, π^2 jsou kanonické projekce). Je-li tedy spojité zobrazení f, jsou spojité i jeho složky (jakožto kompozice spojitých zobrazení).
„$\Leftarrow$“ Nechť I^1, I^2 jsou otevřené intervaly. Pro důkaz spojitosti zobrazení f stačí dokázat, že množina $f^{-1}(I^1 \times I^2)$ je otevřená (zdůvodněte!). Označme $V^1 = (f^1)^{-1}(I^1)$, $V^2 = (f^2)^{-1}(I^2)$ a $V = V^1 \cap V^2$. Jsou-li zobrazení f^1 a f^2 spojitá, je množina V (jako průnik dvou otevřených množin) otevřená. Je-li $y \in f(V)$, existuje $x \in V$ takové, že $f(x) = y$. Tedy $f^1(x) \in I^1$, $f^2(x) \in I^2$ a $y = (f^1(x), f^2(x)) \in I^1 \times I^2$.

4. *Má funkce* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ *definovaná* $f(x, y) = (x^4 - y^4)/(x^2 + y^2)$ *pro* $(x, y) \neq (0, 0)$ *limitu v bodě* $(0, 0)$*?*

Řešení: Máme

$$f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = x^2 - y^2.$$

Funkce f je tedy definována na libovolném okolí bodu $(0, 0)$ mínus tento bod. Navíc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 - y^2) = 0.$$

5. *Vypočtěte*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{tg}(x - y)}{x - y}.$$

Řešení: Nechť

$$g(x, y) = x - y$$
$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t = 0; \\ \mathrm{tg}(t)/t & \text{jinde.} \end{cases}$$

Jelikož

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{tg}(t)}{t} = 1,$$

je funkce h spojitá. Navíc $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x - y) = 0$ a pro $(x, y) \neq (0, 0)$ platí

$$h \circ g(x, y) = \frac{\mathrm{tg}(x - y)}{x - y}.$$

Je tedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{tg}(x - y)}{x - y} = h(0) = 1.$$

6. *Rozhodněte, je-li funkce* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *spojitá v bodě* $(0, 0)$*, jestliže*

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 - y^2)/(x^2 + 2y^2) & \textit{pro } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \textit{pro } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Řešení: Tato funkce je samozřejmě spojitá ve všech bodech (x, y) takových, že $x^2+2y^2 \neq 0$, to jest, všude mimo bod $(0, 0)$. Abychom vyřešili otázku v bodě $(0, 0)$, odhadneme odpověď a poté se pokusíme náš odhad ověřit. V tomto případě odhadněme, že se jedná o nespojitost. Pokusíme se tedy najít takovou cestu, po níž, když se budeme přibližovat k $(0, 0)$, limita z $f(x, y)$ bude různá od $f(0, 0)$.
Předpokládejme, že $(x, y) \to (0, 0)$ po přímce $y = x$. Potom $(x, y) = (t, t)$ a na uvažované přímce platí

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 - t^2}{t^2 + 2t^2} = 0 = f(0, 0).$$

Náš první odhad cesty tedy nevyšel, protože jsme se po ní přiblížili k hodnotě $f(0, 0)$.
Pokusíme se přiblížit k bodu $(0, 0)$ po přímce $y = 2x$, to jest, $(x, y) = (t, 2t)$. Na této přímce tedy platí

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 - 4t^2}{t^2 + 8t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{-3t^2}{9t^2} = \lim_{t\to 0} -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \neq 0 = f(0, 0).$$

Tedy $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ neexistuje a funkce f není spojitá v bodě $(0, 0)$.

7. *Rozhodněte, je-li funkce* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *spojitá v bodě* $(0, 0)$*, jestliže*

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^3y - xy^3)/(x^2 + 2y^2) & \textit{pro } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \textit{pro } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Řešení: V tomto případě budeme očekávat v bodě $(0,0)$ spojitost. Abychom to ověřili, musíme ukázat, že $f(x,y) \to 0$ pro $(x,y) \to (0,0)$. Nejlépe toho dosáhneme tak, že najdeme výraz, jehož absolutní hodnota je větší než $|f(x,y)|$ a který zřejmě konverguje k 0, když $z = (x,y) \to (0,0)$. Všimněme si, že $|x| \le \|z\|$ a $|y| \le \|z\|$. Pak

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= \frac{\left|xy(x^2-y^2)\right|}{x^2+y^2} = \frac{|x||y||x+y||x-y|}{x^2+y^2} \le \frac{|x||y|(|x|+|y|)(|x|+|y|)}{x^2+y^2} \\ &\le \frac{\|z\|\|z\|(\|z\|+\|z\|)(\|z\|+\|z\|)}{\|z\|^2} = 4\|z\|^2 = 4(x^2+y^2). \end{aligned}$$

Jelikož pro $(x,y) \to (0,0)$ máme $4(x^2+y^2) \to 0$, dostáváme, že $|f(x,y)| \to 0$.

8. *Najděte*

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

Řešení: Přejdeme k polárním souřadnicím. Tedy $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$ a

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2} &= \lim_{\varphi\in[0,\pi/2]} \frac{\varrho\sin\varphi + \varrho\cos\varphi}{\varrho^2\sin^2\varphi + \varrho^2\cos^2\varphi} \\ &= \lim_{\varphi\in[0,\pi/2]} \frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{\varrho} = 0. \end{aligned}$$

Cvičení

1. Najděte vnitřek, vnějšek, hranici a uzávěr množiny A pokud
   a) $A = \{(1/n, 1/n);\ n \in \mathbb{N}\}$; b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y = \sin(x)\}$.

2. Rozhodněte, zda množina $M \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, uzavřená, ohraničená kompaktní a souvislá, kde
   a) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy < 1, y \ge 0, x \ge 0\}$;
   b) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 < y < x^3, 1 < x < 2\}$;
   c) $M = \{((-1)^5, 2/k^2) \in \mathbb{R}^2;\ k \in \mathbb{N}\}$;
   d) $M = \{(1, -k/(1-k)) \in \mathbb{R}^2;\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$;
   e) $M = \{(k/(3k+2), (k^2+1)/(2-k)) \in \mathbb{R}^2;\ k \in \mathbb{N} \setminus \{2\}\}$;
   f) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le y \le \sqrt{2x-x^2}, 0 \le x \le 2\}$.

3. Uveďte příklad množin $A, B \subset \mathbb{R}^2$ takových, že $A = \mathrm{cl}A$ a $\mathrm{cl}B = \mathrm{fr}B$. Existuje množina $C \subset \mathbb{R}^2$ taková, že $\mathrm{fr}C = \mathrm{int}C$?

4. Uveďte příklad otevřené množiny $A \subset \mathbb{R}^2$ a spojitého zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takových, že $f(A)$ bude uzavřená.

5. Dokažte, že pro každé dvě množiny $A, B \subset \mathbb{R}^2$ platí $\mathrm{int}(A \setminus B) \subset \mathrm{int}A \setminus \mathrm{int}B$, a uveďte příklad, ve kterém neplatí opačná inkluze.

6. Ukažte, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (2xy)/(x^2+y^2)$ je ohraničená.

7. Dokažte, že každé konstantní zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je spojité.

8. Dokažte, že každá konvergentní posloupnost $\{x_i \in \mathbb{R}^n\}_{i=1}^{\infty}$ je ohraničená.

9. Dokažte, že topologie na $\mathbb{R}^2$ generovaná systémem všech otevřených čtverců $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} < a,\ x_0, y_0 \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+\}$ je ekvivalentní s topologií generovanou systémem $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x - x_0| + |y - y_0| < a,\ x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+\}$.

10. Buďte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojitá funkce a $A \subset \mathbb{R}^2$ takové, že $\mathrm{cl} A = \mathbb{R}^2$ a $f|_A = 1$. Ukažte, že potom $f = 1$.

11. Rozhodněte, zda množina $M = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x^1 > x^2 > \ldots > x^n\}$ je otevřená.

12. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x, y) > 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x, y) = 0\}$ a $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x, y) < 0\}$. Je některá z množin A, B, C otevřená? Jak tomu bude s kompaktností?

13. Nechť $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Ukažte, že potom množina $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x, y) = 1 + g(x, y)\}$ je uzavřená.

14. Rozhodněte, zda pro funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin(x)$ a pro libovolnou množinu $A \in \mathbb{R}^2$ platí $f(\mathrm{int} A) = \mathrm{int} f(A)$.

15. Dokažte nebo vyvraťte: Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení. Pak pro každou množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ platí $f(\mathrm{cl} A) = \mathrm{cl} f(A)$.

16. Považujme prvky množiny $\mathbb{R}^9$ za čtvercové matice typu 3×3. Dokažte, že množina $M \subset \mathbb{R}^9$ tvořená regulárními maticemi je otevřená.

17. Najděte obraz definičního oboru a načrtněte graf funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Najděte množinu všech bodů, ve kterých je uvedená funkce spojitá.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\sin x, \cos x)$; b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\mathrm{sgn} x, x)$;
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\chi(x), \sin x)$; d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \mathrm{sgn}(xy)$.

18. Rozhodněte, které z následujících posloupností $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergují a v takovém případě najděte jejich limity.

a) $x_k = \left(\dfrac{-1}{k}, 1\right)$; b) $x_k = \left(\dfrac{\sin 2k}{1 + k + k^2)}, \mathrm{e}^{-k^2+1}\right)$;

c) $x_k = \left(\ln \dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k}, 0, k^2\right)$; d) $x_k = \left(\dfrac{\sin k}{k}, \dfrac{k}{\sin(1/k)}\right)$.

19. V případě, že následující limity existují, najděte je. Pokud neexistují, pokuste se zdůvodnit proč.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\ln xy}{x^2 + y^2}$; b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x}$;

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \ln \frac{x^2 - y^2}{x - y}$; d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x}$;

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{(x - 1)^3 + (y - 1)^3}$; f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,k)} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$;

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{y - 3}{x + y - 5}$; h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x + y}$;

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^3 - y^3}{x^4 - y^4}$; j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^3 y - x y^3 + 1}{(x - y)^3}$;

k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;

l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{(x-1)^2+(y-1)^2}$;

m) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$;

n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{xy+2x-y}$;

o) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3+5x^3}{x^2+y^2}$;

p) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y^2z^2}{x^6+y^6+z^6}$;

q) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$;

r) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\arctan(x/y)}$;

s) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2}$.

20. Najděte všechny body, ve kterých jsou následující funkce $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojité:

a) $f(x,y) = \begin{cases} xy/(x^2+y^2) & \text{pro } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2y+xy^2)/(x^2+y^2) & \text{pro } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \ln\sqrt{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2y+3x^2)/(x^2+y^2) & \text{pro } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} 1/(1-x^2-y^2) & \text{pro } x^2 \neq 1-y^2; \\ 0 & \text{pro } x^2 = 1-y^2; \end{cases}$

f) $f(x,y) = \begin{cases} x^2/(x^2+y^2) & \text{pro } (x,y) \neq (0,0); \\ \frac{1}{2} & \text{pro } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

g) $f(x,y,z) = \begin{cases} xyz/(x^2+y^2+z^2) & \text{pro } (x,y,z) \neq (0,0,0); \\ 0 & \text{pro } (x,y,z) = (0,0,0); \end{cases}$

h) $f(x,y) = \begin{cases} x^2y/(x^4+y^2) & \text{pro } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

21. Ukažte, že jestliže $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá v (x_0, y_0), pak f_{x_0}, definovaná $f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$, je spojitá v bodě $y = y_0$ a f_{y_0}, definovaná $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$, je spojitá v bodě $x = x_0$.

22. Spojitost f_{x_0} v $y = y_0$ a f_{y_0} v $x = x_0$ (viz. předchozí cvičení), ale nezaručuje spojitost f v bodě (x_0, y_0). Ověřte toto tvrzení na první funkci ze cvičení 20.

23. Nechť pro (x, y) taková, že $x^2 + y^2 \neq 0$,

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

Jak musí být definováno $f(0,0)$, aby byla funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojitá v bodě $(0,0)$?

24. Nechť $f : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right).$$

Lze tuto funkci rozšířit na body $(0, y)$, aby byla stále spojitá pro která y a jakou hodnotu $f(0, y)$ musí mít.

25. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = y\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{-1/|x-y|}.$$

Lze tuto funkci spojitě rozšířit i na přímku $y = x$? Jak?

26. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x} & \text{pro } x \neq 0; \\ y & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Má tato funkce nějaké body nespojitosti?

2. Derivace prvního řádu

Příklady

1. *Rozhodněte, je-li funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (\cos x, \sin x, x)$, *diferencovatelná v bodě* $\pi/2$.

Řešení: Všechny složky funkce f jsou spojité a diferencovatelné v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. Tedy f je spojitá a diferencovatelná v $\pi/2$. Máme

$$f'(x) = (-\sin x, \cos x, 1),$$

tedy

$$f'(\pi/2) = (-1, 0, 1).$$

2. *Najděte parciální derivace zobrazení* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 \cos x_1$ *v bodě* $(\pi/2, 1)$.

Řešení: Platí $\mathrm{D}_1 f(\pi/2, 1) = g'(\pi/2)$, kde $g(x_1) = f(x_1, 1) = x_1^2 + \cos x_1$. Tedy $\mathrm{D}_1 f(\pi/2, 1) = \pi - 1$. Podobně $\mathrm{D}_2 f(\pi/2, 1) = h'(1)$, kde $h(x_2) = f(\pi/2, x_2) = \pi/2$. Tedy $\mathrm{D}_2 f(\pi/2, 1) = 0$.

3. *Dokažte, že funkce* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n$ *je diferencovatelná v bodě* $x_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, 1/n\right)$ *a najděte* $\mathrm{D} f(x_0)$.

Řešení: Pro $k = 1, \ldots, n$ platí $\mathrm{D}_k f(x_0) = k$. Dále, máme

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - (h_1 + 2h_2 + \ldots + nh^n)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{\|h\|} = 0.$$

Funkce f je tedy diferencovatelná v bodě x_0 a platí $\mathrm{D} f(x_0)(h) = h_1 + 2h_2 + \ldots + nh_n$.

Druhá možnost: Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ a $k = 1, \ldots, n$ platí $\mathrm{D}_k f(x_0) = k$. Funkce f tedy má spojité parciální derivace. To znamená, že je diferencovatelná a platí $\mathrm{D} f(x_0)(h) = h_1 + 2h_2 + \ldots + nh_n$.

Třetí možnost: Funkce f je lineární. Je tedy diferencovatelná v každém bodě a platí $\mathrm{D} f = f$.

4. *Dokažte, že funkce* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 \cos x_1$ *je diferencovatelná v bodě* $(\pi/2, 1)$.

Řešení: Z příkladu 2 plyne, že existuje-li derivace funkce f v bodě $(\pi/2, 1)$, platí

$$\mathrm{D} f(\pi/2, 1)(h_1, h_2) = (\pi - 1, 0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (\pi - 1)h_1.$$

Stačí tedy provést následující výpočet:

$$0 \le \lim_{h\to 0} \frac{\left|(\pi/2 + h_1)^2 + (1 + h_2)\cos(\pi/2 + h_1) - (\pi/2)^2 - \cos(\pi/2) - (\pi - 1)h_1\right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{|h_1^2 - (1+h_2)\sin h_1 + h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
&\le \lim_{h\to 0} \frac{h_1^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} + \lim_{h\to 0} \frac{|\sin h_1 + h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} + \lim_{h\to 0} \frac{|h_2 \sin h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
&\le \lim_{h_1\to 0} \frac{h_1^2}{|h_1|} + \lim_{h_1\to 0} \left|\frac{\sin h_1 + h_1}{h_1}\right| + \lim_{h_2\to 0} |h_2| \cdot \lim_{h_1\to 0} \frac{|\sin h_1|}{|h_1|} = 0 + 0 + 0\cdot 1 = 0.
\end{aligned}
$$

Druhá možnost: Jelikož funkce $D_1 f(x_1,x_2) = 2x_1 - x_2 \sin x_1$ a $D_2 f(x_1,x_2) = \cos x_1$ jsou spojité, je funkce f spojitě diferencovatelná, a tedy i diferencovatelná.

5. *Rozhodněte, zda funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *daná předpisem*

$$
f(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1 \text{ jestliže } |x_1| \le |x_2|, \\ x_2 \text{ jestliže } |x_1| > |x_2|, \end{cases}
$$

je diferencovatelná v bodě $(0,0)$.

Řešení: Platí $f(x_1,0) = f(0,x_2) = 0$, máme tedy $D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0$. V případě, že je funkce f diferencovatelná, tedy musí být $D f(0,0) = 0$. Jelikož však

$$
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x_1,x_2)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}
$$

neexistuje (stačí položit $x_1 = x_2$), není funkce f v bodě $(0,0)$ diferencovatelná.

6. *Najděte parciální derivace funkce* $g \circ f$ *v bodě* $(1,1,1)$*, jestliže*

$$
f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2x_3 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \end{pmatrix}, \quad g(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_1/x_2 \end{pmatrix}.
$$

Řešení: Platí

$$
(g \circ f)(x_1,x_2,x_3) = g(2x_1x_2x_3, x_1^2+x_2^2-x_3^2) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2x_3(x_1^2+x_2^2-x_3^2) \\ 2x_1x_2x_3/(x_1^2+x_2^2-x_3^2) \end{pmatrix}
$$

Lze tedy postupovat přímým výpočtem. My ale využijeme větu o derivaci složené funkce:

$$
\begin{array}{lll}
D_1 f^1(x_1,x_2,x_3) = 2x_2x_3 & D_2 f^1(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_3 & D_3 f^1(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_2 \\
D_1 f^2(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 & D_2 f^2(x_1,x_2,x_3) = 2x_2 & D_3 f^2(x_1,x_2,x_3) = -2x_3 \\
D_1 g^1(x_1,x_2) = x_2 & D_2 g^1(x_1,x_2) = x_1 & \\
D_1 g^2(x_1,x_2) = 1/x_2 & D_2 g^2(x_1,x_2) = -x_1/x_2^2 &
\end{array}
$$

máme tedy

$$
f'(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad g'(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.
$$

Jelikož parciální derivace funkcí f a g jsou spojité, jsou tyto funkce diferencovatelné a

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)'(1,1,1) &= g'(f(1,1,1)) \cdot f'(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Je tedy

$$\begin{array}{lll} D_1(g\circ f)^1(1,1,1)=6, & D_2(g\circ f)^1(1,1,1)=6, & D_3(g\circ f)^1(1,1,1)=-2,\\ D_1(g\circ f)^2(1,1,1)=-2, & D_2(g\circ f)^2(1,1,1)=-2, & D_3(g\circ f)^2(1,1,1)=6. \end{array}$$

7. *Vyjádřete pomocí parciálních derivací diferencovatelných zobrazení* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ *a* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *funkci* $(f\circ g)''$. *Do výsledku dosaďte zobrazení*

$$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2,\quad g(x)=\begin{pmatrix} x\sin x\\ x\cos x\end{pmatrix}.$$

Řešení: Platí

$$\begin{aligned}(f\circ g)''&=((f\circ g)')'=((D_1 f)\circ g\cdot(g^1)'+(D_2 f)\circ g\cdot(g^2)')'\\ &=((D_{11} f)\circ g\cdot(g^1)'+(D_{12} f)\circ g\cdot(g^2)')(g^1)'+(D_1 f)\circ g\cdot(g^1)''\\ &\quad+((D_{21} f)\circ g\cdot(g^1)'+(D_{22} f)\circ g\cdot(g^2)')(g^2)'+(D_2 f)\circ g\cdot(g^2)''\\ &=(D_{11} f)\circ g\cdot((g^1)')^2+2(D_{12} f)\circ g\cdot(g^1)'(g^2)'+(D_{22} f)\circ g\cdot((g^2)')^2\\ &\quad+(D_1 f)\circ g\cdot(g^1)''+(D_2 f)\circ g\cdot(g^2)''.\end{aligned}$$

Zkouška pro zadaná zobrazení: Platí $f\circ g(x)=x^2$, tedy $(f\circ g)''=2$. Dosazením vztahů:

$$\begin{array}{ll} D_1 f(x_1,x_2)=2x_1, & (D_1 f)g(x)=2x\sin x,\\ D_2 f(x_1,x_2)=2x_2, & (D_2 f)g(x)=2x\cos x,\\ D_{11} f(x_1,x_2)=D_{22} f(x_1,x_2)=2, & (D_{11} f)(g(x))=(D_{11} f)(g(x))=2,\\ D_{12} f(x_1,x_2)=D_{21} f(x_1,x_2)=0, & (D_{12} f)(g(x))=(D_{21} f)(g(x))=0,\\ (g^1)'(x)=\sin x+x\cos x, & (g^1)''(x)=2\cos x-x\sin x,\\ (g^2)'(x)=\cos x-x\sin x, & (g^2)''(x)=-2\sin x-x\cos x. \end{array}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}&(D_{11} f)(g(x)))\cdot((g^1)')^2(x)+2(D_{12} f)(g(x))\cdot(g^1)'(x)(g^2)'(x)\\ &\quad+(D_{22} f)(g(x))\cdot((g^2)')^2(x)+(D_1 f)(g(x))\cdot(g^1)''(x)+(D_2 f)(g(x))\cdot(g^2)''(x)\\ &=2(\sin x+x\cos x)^2+2\cdot 0+2(\cos x-\sin x)^2+2x\sin x(2\cos x-x\sin x)\\ &\quad+2x\cos x(-2\sin x-x\cos x)\\ &=2(\sin^2 x+2x\sin x\cos x+x^2\cos^2 x+\cos^2 x-2x\sin x\cos x+x^2\sin^2 x\\ &\quad+2x\sin x\cos x-x^2\sin^2 x-2x\sin x\cos x-x^2\cos^2 x)=2.\end{aligned}$$

Cvičení

1. Najděte parciální derivace funkce $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ v bodě $x_0=(1,2)$.

2. Pomocí definice derivace dokažte diferencovatelnost funkce $f(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1+x_2^2$ v bodě $(1,0)$ a určete $Df(1,0)$.

3. Uveďte příklad funkce $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, která má obě parciální derivace v bodě $(0,0)$ rovny 0 a přitom zde není diferencovatelná.

4. Najděte parciální derivace funkce f, jestliže
   a) $f(x_1,x_2)=e^{x_1}\sin x_2$, b) $f(x_1,x_2,x_3)=e^{x_1x_2}\sin(x_2x_3)+x_2^2\ln(x_1x_2x_3)$,
   c) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$, d) $f(x_1,x_2)=\operatorname{arctg}\dfrac{x_1}{x_2}$,

e) $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}$, f) $f(x_1, x_2) = \ln\left(x_1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)$,
g) $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 x_1^{1/x_2}$, h) $f(x_1, x_2) = (3x_1^2 + x_2^2)^{4x_1 + x_2}$,
i) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^{x_2^{x_3}}$, j) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 x_3)^{x_1 x_2}$.

5. Najděte $D_2 f(1, x_2)$, jestliže

$$f(x_1, x_2) = x_1^{x_1^{x_1^{x_1^{x_2}}}} + (\ln x_1)(\operatorname{arctg}(\operatorname{arctg}(\operatorname{arctg}(\sin(\cos(x_1 x_2)) - \ln(x_1 x_2))))).$$

6. Nechť $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Najděte parciální derivace funkcí
a) $f(x_1, x_2) = \int_{x_2}^{x_1} g(t)\,\mathrm{d}t$, b) $f(x_1, x_2) = \int_0^{x_1 x_2} g(t)\,\mathrm{d}t$.

7. Je dána funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x$. Vypočtěte $\mathrm{D} f(2) \cdot (x)$, $\mathrm{D} f(x) \cdot (2)$.

8. Uveďte příklad funkcí $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takových, že neexistují $\mathrm{D} f(0, 0)$ a $\mathrm{D} g(0, 0)$, ale existuje $\mathrm{D}(f + g)(0, 0)$.

9. Uveďte příklad fuknce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takové, že
a) $\mathrm{D} f(x, y)$ neexistuje pro žádné $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
b) $\mathrm{D} f(x, y)$ existuje pouze pro $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ takové, že $x = 0$.

10. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce splňující podmínku $0 \leq f(x, y) \leq x^2 + y^2$. Ukažte, že potom existuje $\mathrm{D} f(0, 0)$. (Návod: Odhadněte $\mathrm{D} f(0, 0)$ a poté odhad ověřte z definice diferenciálu.)

11. Je funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = |x^5|$ spojitě diferencovatelná? (Návod: Užijte stejného postupu jako v předchozím cvičení)

12. Rozhodněte, které z funkcí

a) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & x_1^2 + x_2^2 \neq 0, \\ 0 & x_1^2 + x_2^2 = 0, \end{cases}$

b) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & x_1^2 + x_2^2 \neq 0, \\ 0 & x_1^2 + x_2^2 = 0, \end{cases}$

c) $f(x_1, x_2) = \max^2(|x_1|, |x_2|)$,
jsou direfencovatelné v bodě $(0, 0)$.

13. Je dáno spojitě diferencovatelné zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dokažte, že množina všech $x \in \mathbb{R}^n$ takových, že $\mathrm{D} f(x)$ je surjektivní, je otevřená.

14. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení. Dokažte, že $\mathrm{D} f(x) = f$. Na základě toho dokažte, že pro libovolná diferencovatelná zobrazení $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a bod $x \in \mathbb{R}^n$ platí:
a) $\mathrm{D}(g + h)(x) = \mathrm{D} g(x) + \mathrm{D} h(x)$,
b) $\mathrm{D}(g)(x) = (\mathrm{D} g^1(x), \ldots, \mathrm{D} g^m(x))$,
c) $\mathrm{D}(g - \mathrm{D} g(x))(x) = 0$.

15. Pro diferencovatelné zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ platí

$$f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda je funkce $g \circ f$, kde $g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, diferencovatelná. V kladném případě určete $\mathrm{D}(g \circ f)(0,0)$.

16. Nechť $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos^2(y) \\ \sin(x+y) \\ \sin(x+z) \end{pmatrix},$$

dále $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ a $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $h(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \\ x^{\mathrm{e}} \end{pmatrix}$. Vypočtěte $\mathrm{D}_1(h \circ g \circ f)^1(0, \pi/2, 0)$.

17. Nechť $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz \\ x^2 + y^2 - z^2 \end{pmatrix}.$$

Buď $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferencovatelná a její diferenciál je v $(1,1)$ je $\mathrm{D}g(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Spočtěte, existuje-li, $\mathrm{D}(g \circ f)(1,1,1)$.

18. Vypočtěte parciální derivace funkce

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} f(x^y, y^z, z^x) \\ g((xy)^z, (yz)^x, (zx)^y) \end{pmatrix},$$

kde $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jsou diferencovatelné funkce.

19. Najděte parciální derivace funkcí
   a) $F(x_1, x_2) = f(g(x_1)h(x_2), g(x_1) + h(x_2))$,
   b) $F(x_1, x_2) = f(x_1, g(x_1), h(x_1, x_2))$,
   c) $F(x_1, x_2) = f(g(x_1, x_2), g(x_2, x_1))$,
   d) $F(x_1, x_2, x_3) = f(g(x_1 + x_2), h(x_1 + x_3))$,
   e) $F(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, x_1)$,
   f) $F(x_1, x_2, x_3) = f(x_1^{x_2}, x_2^{x_3}, x_3^{x_1})$,
kde g, h jsou diferencovatené funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ případně $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ případně $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

20. Buď $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ -x \end{pmatrix}$. Vypočítejte $\mathrm{D}f(1,-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

21. Určete parciální derivace prvního řádu složené funkce $F = f \circ g$, kde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 - x_2^2 x_1$$

$$g(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 \cos y_2 \\ y_2 \sin y_1 \end{pmatrix}.$$

22. Najděte diferenciál složené funkce $F = f \circ g$, kde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \mathrm{e}^{2x_1}(x_2 - x_3),$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} x \\ 2\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

23. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce taková, že $f(-2, 1) = -2$ a $\mathrm{D}f(2, -1) = (-2, 2)$. Dále $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} xy^2 + 2 \\ x^2y - 1 \end{pmatrix}.$$

Najděte tečnou rovinu ke grafu funkce $f \circ g$ v bodě $(0, 0, f \circ g(0, 0))$.

24. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce taková, že $f(1, 2) = -2$ a $\mathrm{D}f(1, 2) = (-1, 2)$. Dále $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + 1 \\ x^2 - y^2 + 2 \end{pmatrix}.$$

Najděte tečnou rovinu ke grafu funkce $f \circ g$ v bodě $(0, 0)$.

25. Ukažte, že pro funkci $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 \neq ay^2\} \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_2^2 - a^2x_1^2}, \quad a > 0$$

platí že $\mathrm{D}_1(\mathrm{D}_1 f) = a^2\mathrm{D}_2(\mathrm{D}_2 f)$.

26. Nechť $f(x_1, x_2) = x_1 - \mathrm{e}^{x_1x_2^2}$, vypočtěte směrovou derivaci $\mathrm{D}_{\vec{u}} f(0, 0)$, $\mathrm{D}_{\vec{u}} f(2, 1)$, $\mathrm{D}_{\vec{u}} f(1, 2)$, kde

a) $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)$,
b) $\vec{u} = (-1, 0)$,
c) $\vec{u} = (-a, 0) \quad a > 0$,
d) $\vec{u} = (a, a) \quad a > 0$,
e) $\vec{u} = (a, -a) \quad a > 0$.

27. Nechť $f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 \sin(x_1x_2x_3)$, vypočtěte směrovou derivaci podle vektoru $\vec{u} = (\pi, \pi, 1)$ v bodě $(1, 1, \pi)$.

3. Věta o implicitní a inverzní funkci

Příklady

1. *Nechť*
$$f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$
Dokažte, že každý bod $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *má okolí* V *takové, že pro každé* $(x', y') \in f(V)$ *má rovnice*
$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
právě jedno řešení $(x, y) \in V$.

Řešení: Máme dokázat, že existuje okolí V bodu (x_0, y_0), na němž je zobrazení f prosté. Toto zobrazení je spojitě diferencovatelné, stačí tedy podle věty o inverzním zobrazení ověřit, že $\det f'(x_0, y_0) \neq 0$. A ono
$$\det f'(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} e^{x_0} \cos y_0 & -e^{x_0} \sin y_0 \\ e^{x_0} \sin y_0 & e^{x_0} \cos y_0 \end{vmatrix} = e^{2x_0} \neq 0.$$

2. *Uvažujme rovnici*
$$x^2 + 4y^2 - 3z^2 = 6$$
a bod $a_0 = (3, 0, 1)$.

a) *Definuje implicitně tato rovnice proměnnou* y *jako funkci* x *a* z *na nějakém okolí bodu* $(x_0, z_0) = (3, 1)$*? Pokud ano, najděte její parciální derivace podle* x *a* z.

b) *Definuje implicitně tato rovnice proměnnou* z *jako funkci* x *a* y *na nějakém okolí bodu* $(x_0, y_0) = (3, 0)$*? Pokud ano, najděte její parciální derivace podle* x *a* y.

Řešení: a) Jelikož $D_2F(3, 0, 1) = 0$, věta o implicitní funkci nám neříká nic o tom, jestli je y definováno jako funkce x a z. Přesto můžeme usoudit, že tomu tak není. Všimněme si, že jinak by takové y muselo splňovat
$$y(x, z) = \sqrt{6 + 3z^2 - x^2}.$$
V bodě (x_0, z_0) platí $6 + 3z_0^2 = x_0^2$. Jestliže se x malinko zvětší, výraz pod odmocninou bude záporný a daná rovnice tedy nemůže definovat y na žádném okolí bodu x_0, z_0.

b) Jelikož $D_3F(3, 0, 1) \neq 0$, můžeme aplikovat větu o implicitní funkci a zjistíme, že daná rovnice definuje z jako funkci x a y na nějakém okolí U bodu $(3, 0)$. Navíc, na tomto okolí máme
$$D_1 f(x, y) = -\frac{D_1F(x, y, z)}{D_3F(x, y, z)} = -\frac{2x}{-6z} = \frac{x}{3z},$$
$$D_2 f(x, y) = -\frac{D_2F(x, y, z)}{D_3F(x, y, z)} = -\frac{8y}{-6z} = \frac{4y}{3z},$$
kde $F = x^2 + 4y^2 - 3z^2 - 6$.

3. *Rozhodněte, zda pro* $F(x, y, z) = 2^{x/z} + 2^{y/z} - 8$ *na nějakém okolí bodu* $(2, 2, 1)$ *rovnice* $F(x, y, z) = 0$ *implicitně definuje nějakou funkci. Pokud ano, najděte její parciální derivace v bodě* $(2, 2)$.

Řešení: Funkce F je na okolí bodu $(2, 2, 1)$ spojitě diferencovatelná, pro existenci implicitní funkce tedy stačí, aby $D_3F(2, 2, 1) \neq 0$.

$$D_3F(2, 2, 1) = -2^{x/z}\frac{x}{z^2}\ln 2 - 2^{y/z}\frac{y}{z^2}\ln 2,$$

tedy

$$D_3F(2, 2, 1) = -16\ln 2 \neq 0.$$

Označme implicitní funkci f. Platí $f(2, 2) = 1$ a pro každé (x, y) z nějakého okolí bodu $(2, 2)$

$$2^{x/f(x,y)} + 2^{y/f(x,y)} = 8.$$

Z těchto vztahů již snadno parciální derivace zobrazení f v bodě $(2, 2)$ vypočítáme.

4. *Nechť*

$$F(x, y, z, u) = \begin{pmatrix} x^2y + xy^2 + z^2 - u^2 \\ e^{x+y} - u \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že $F(0, 0, 1, 1) = (0, 0)$ *a že* $F(x, y, z, u) = (0, 0)$ *definuje* (z, u) *jako diferencovatelné zobrazení* (f^1, f^2) *proměnných* x *a* y *na nějakém okolí bodu* $(0, 0)$. *Najděte jeho parciální derivace funkce* f^1 *podle* x *a* y *v bodě* $(0, 0)$.

Řešení: Platnost $F(0, 0, 1, 1) = (0, 0)$ je evidentní. Dále

$$\begin{pmatrix} D_3F^1(x, y, z, u) & D_4F^1(x, y, z, u) \\ D_3F^2(x, y, z, u) & D_4F^2(x, y, z, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z & -2u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a v bodě $(z_0, u_0) = (1, 1)$ tedy

$$\begin{pmatrix} 2z_0 & -2u_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jelikož

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0,$$

uvedená rovnice definuje (z, u) jako diferencovatelné zobrazení f proměnných x a y na nějakém okolí bodu $(0, 0)$. Zavedeme-li si nyní zobrazení $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $G(x, y) = (x, y, f(x, y))$, vidíme, že

$$(0, 0) = F(x, y, f(x, y)) = F \circ G(x, y)$$

a tedy

$$0 = F'(x, y, f(x, y)) = F'(G(x, y)) \cdot G'(x, y).$$

Po několika úpravách a využití toho, že $A^{-1} = (\det A)^{-1} \operatorname{adj} A$, kde A je invertibilní matice, nakonec zjistíme, že

$$D_1 f^1 = -\frac{\det\begin{pmatrix} D_1F^1(0, 0, 1, 1) & D_4F^1(0, 0, 1, 1) \\ D_1F^2(0, 0, 1, 1) & D_4F^2(0, 0, 1, 1) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} D_3F^1(0, 0, 1, 1) & D_4F^1(0, 0, 1, 1) \\ D_3F^2(0, 0, 1, 1) & D_4F^2(0, 0, 1, 1) \end{pmatrix}} = -\tfrac{2}{-2} = 1,$$

$$\mathrm{D}_2 f^1 = -\frac{\det\begin{pmatrix}\mathrm{D}_2F^1(0,0,1,1) & \mathrm{D}_4F^1(0,0,1,1)\\ \mathrm{D}_2F^2(0,0,1,1) & \mathrm{D}_4F^2(0,0,1,1)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}\mathrm{D}_3F^1(0,0,1,1) & \mathrm{D}_4F^1(0,0,1,1)\\ \mathrm{D}_3F^2(0,0,1,1) & \mathrm{D}_4F^2(0,0,1,1)\end{pmatrix}} = -\frac{2}{-2} = 1.$$

Cvičení

1. Rozhodněte, zda existuje okolí $U \subset \mathbb{R}$ čísla 1, na němž je funkce $f(x) = x^x$ prostá.

2. Rozhodněte, zda existují otevřené množiny $U, V \subset \mathbb{R}^2$ takové, že $(2, \pi) \in U$ a zobrazení $F : U \to V$,

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x\cos y \\ x \sin y \end{pmatrix},$$

je bijekce. Pokud ano, najděte tato okolí a vypočtěte $F^{-1} : V \to U$.

3. Rozhodněte, zda existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^2$ bodu $(1,\ \mathrm{e})$, na němž je funkce $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^y \\ y^x \end{pmatrix},$$

prosté.

4. Nechť $U, V \subset \mathbb{R}^2$, $(0, 1) \in V$, jsou otevřené množiny a $f : U \to V$ zobrazení takové, že pro každé $(x, y) \in V$ platí

$$f^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{xy} + x \\ \mathrm{e}^{xy} + y \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte $\mathrm{D}_2 f^1(1, 2)$.

5. Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x/2 + x^2 \sin(x/2) & \text{pro } x \neq 0; \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že $f'(0) \neq 0$, ale na žádném okolí bodu 0 neexistuje funkce inverzní.

6. Uveďte příklad zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které má inverzi $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takovou, že $\mathrm{D} f^{-1}(0, 0) = 0$.

7. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce. Dokažte, že neexistuje funkce f^{-1}.

8. Rozhodněte, zda existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^2$ bodu $(0, 0)$ takové, že pro každé $(x, y) \in U$ má rovnice

$$\cos(xz) - \sin(yz) = z$$

řešení.

9. Zjistěte, zda existuje číslo ε takové, že pro každé $x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ má řešení soustava

$$\begin{aligned} xy^z &= 1 \\ yz^x &= 1. \end{aligned}$$

10. Rozhodněte, zda existuje okolí U bodu $x_0 = 0$ takové, že pro každé $x \in U$ má soustava

$$\begin{aligned} x + y + z &= \mathrm{e}^{z} \\ x + y + z &= \mathrm{e}^{2yz} \end{aligned}$$

řešení. Poznamenejme, že bod $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ je řešením této soustavy.

11. Najděte taková x, y, z, u, v, w, ke kterým existuje okolí, na němž je možno z rovnic

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 &= 1 \\ \frac{u^2}{x^2} + \frac{v^2}{y^2} + \frac{w^2}{z^2} &= 1 \end{aligned}$$

vyjádřit $u = f(x, y, z, w)$ a $v = g(x, y, z, w)$?

12. Rozhodněte, zda existuje okolí U bodu $(0, 0)$ takové, že pro každé $(x, y) \in U$ má rovnice

$$\cos(xz) - \sin(yz) = z$$

řešení.

13. Ukažte, že rovnice

$$z^3 + z(x^2 + y^2) + 1 = 0$$

má jednoznačné řešení $z = f(x, y)$, pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ a najděte parciální derivace funkce f.

14. Rozhodněte, zda existuje funkce f definovaná na nějakém okolí bodu -1, která na tomto okolí splňuje

$$x^2 - 2xf(x) + 2(f(x))^2 + 2x + 1 = 0$$

a která má v bodě -1 lokální extrém.

15. Nechť $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = 8(x^2 - y^2) + (y^2 + x^2)^2$. Rozhodněte, zda rovnice $F(x, y) = 0$ na okolí bodu $(1, \sqrt{3})$ definuje

a) x jako funkci proměnné y;

b) y jako funkci promenné x.

16. Rozhodněte, zda existuje okolí bodu 0, na kterém rovnice

$$\tan\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x}{y} = 0$$

implicitně definuje x jako funkci y.

17. Nechť $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = x + y + z - \sin(xyz)$. Rozhodněte, zda rovnice $F(x, y, z) = 0$ na okolí bodu $(0, 0, 0)$ definuje z jako diferencovatelnou funkci proměnných x, y a najděte její parciální derivace (pokud existují).

18. Existuje inverzní funkce k funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} xy\cos y \\ xy\sin x \end{pmatrix}$$

na okolí bodu $(0, \pi^2/4)$? Pokud ano, najděte její diferenciál.

19. Existuje inverzní funkce k funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} xy\,\mathrm{e}^{x+y} \\ xy\,\mathrm{e}^{xy} \end{pmatrix}$$

na okolí bodu $(1, 1)$? Pokud ano, najděte její diferenciál.

20. Napište rovnici tečny a normály k ploše

$$x \ln y + y \ln z + z \ln x = 0$$

v bodě $(1, 1, 1)$.

21. Spojitě diferencovatelná funkce $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ splňuje $F(0, 0) = 0$, $\mathrm{D}_2 F(0, 0) \neq 0$ a pro každé $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ platí $F(x, y) = F(y, x)$. Napište rovnici tečny k množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ F(x, y) = 0\}$$

v bodě $(0, 0)$.

22. Nechť funkce $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $(0, 0)$ a nechť $g(0, 0) = 0$, $\mathrm{D}_1 g(0, 0) = 2$, $\mathrm{D}_2 g(0, 0) = 2$. Označme $g_x(y) = g(x, y)$ a předpokládejme, že pro každé x existuje inverzní funkce g_x^{-1}. Položme $h(x, y) = g_x^{-1}(y)$. Vypočtěte parciální derivace funkce h v bodě $(0, 0)$.

23. Nechť funkce $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $(0, 0)$. Označme $f_x(y) = f(x, y)$ a předpokládejme, že pro každé x existuje inverzní funkce f_x^{-1}. Položme $g(x, y) = f_x^{-1}(y)$. Dále předpokládejme, že pro každé x existuje inverzní funkce g_x^{-1} a položme $h(x, y) = g_x^{-1}(y)$. Dokažte, že

$$\mathrm{D}_1 f(0, 0)\mathrm{D}_1 g(0, 0)\mathrm{D}_1 h(0, 0) = \mathrm{D}_2 f(0, 0)\mathrm{D}_2 g(0, 0)\mathrm{D}_2 h(0, 0) = -1.$$

24. Nechť $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (1, 4, 4, -5)$ a

$$F(x, y, z, u) = \begin{pmatrix} x + 2y - z + u \\ -2x + y + 2z + 2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda na nějakém okolí bodu $(x_0, y_0) = (1, 4)$ uvedená rovnice implicitně definuje (z, u) jako zobrazení $(f^1, f^2)(x, y)$. Pokud ano, najděte jeho parciální derivace.

25. Uveďte příklad spojitě diferencovatelné funkce $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takové, aby $\mathrm{D}_2 F(0, 0) = 0$ a množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ F(x, y) = 0\}$ byla grafem diferencovatelné funkce.

26. Nechť $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (1, 1, -1, 3, 3)$ a

$$F(x, y, z, u, v) = \begin{pmatrix} -x + 2y - 5z + 3u - 5v \\ x + 4y + 2z + 2u - 3v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda na nějakém okolí bodu $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, -1)$ uvedená rovnice implicitně definuje (u, v) jako zobrazení $(f^1, f^2)(x, y, z)$. Pokud ano, najděte parciální derivace f^1 podle x, y a z.

27. Dokažte větu o inverzním zobrazení pomocí věty o implicitním zobrazení.

28. Dokažte větu o implicitním zobrazení pomocí věty o inverzním zobrazení.

4. Extrémy funkcí více proměnných

Příklady

1. *Najděte všechny body, ve kterých funkce* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = 3x + 12y - x^3 - y^3$$

nabývá lokální extrém.

Řešení: Nejdříve najdeme $f'(x, y)$. Platí

$$f'(x, y) = (3 - 3x^2,\ 12 - 3y^2).$$

Podezřelé body získáme tak, že f' položíme rovnu 0. Řešením získaných rovnic dostaneme $3 - 3x^2 = 0$, tedy $x^2 = 1$ a $|x| = 1$, $12 - 3y^2 = 0$, tedy $y^2 = 4$ a $|y| = 2$. Dostáváme tak body $(1, -2)$, $(1, 2)$, $(-1, 2)$, $(-1, -2)$. Abychom je mohli klasifikovat, potřebujeme znát druhé parciální derivace:

$$\mathrm{D}_{11} f(x, y) = -6x,\ \mathrm{D}_{12} f(x, y) = \mathrm{D}_{21} f(x, y) = 0,\ \mathrm{D}_{22} f(x, y) = -6y.$$

Potom

$$\det f''(x, y) = \det \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix} = 36xy.$$

V bodě $(1, 2)$ máme $D_{11} f(1, 2) < 0$ a $\det f''(1, 2) = 72$. To znamená, že v bodě $(1, 2)$ nabývá funkce f lokálního maxima a $f(1, 2) = 18$. Dále dostáváme $\det f''(1, 2) = \det f''(2, 1) = -72 < 0$ a body $(1, -2)$ a $(-1, 2)$ jsou tedy inflexní. V bodě $(-1, -2)$ máme $\mathrm{D}_{11} f(-1, -2) > 0$ a $\det f''(-1, -2) = 72 > 0$. To znamená, že v bodě $(-1, -2)$ nabývá funkce f lokálního minima a $f(-1, -2) = -18$.

2. *Najděte všechny body, ve kterých funkce*
a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$, *b)* $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^2$,
nabývá lokální extrém.

Řešení: a) Zde platí

$$f'(x, y) = (2x - 2y,\ -2x + 2y) = (0, 0),$$

jestliže $x = y$. Máme tedy spoustu bodů podezřelých z extrému. Dále platí

$$\mathrm{D}_{11} f(x, y) = 2, \quad \mathrm{D}_{12} f(x, y) = \mathrm{D}_{21} f(x, y) = -2, \quad \mathrm{D}_{22} f(x, y) = 2.$$

Tedy

$$\det f''(x, y) = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

To znamená, že toto kritérium nám nedává žádnou odpověď. Pokud si ale uvědomíme, že

$$f(x, y) = (x - y)^2,$$

zjistíme, že v každém podezřelém bodě nabývá funkce f absolutního minima.

b) Zde platí

$$f'(x,y) = (3x^2 - 3y^2,\ -6xy + 2y) = (0,0),$$

jestliže

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 0,$$
$$-6xy + 2y = 2y(-3x+1) = 0.$$

Z první rovnice tedy $y = \pm x$ a z druhé $y = 0$ nebo $x = \frac{1}{3}$. Podezřelými body tedy jsou $(0,0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. Dále platí

$$\mathrm{D}_{11} f(x,y) = 6x, \quad \mathrm{D}_{12} f(x,y) = \mathrm{D}_{21} f(x,y) = -6y, \quad \mathrm{D}_{22} f(x,y) = -6x + 2.$$

Tedy

$$\mathrm{D}_{11} f(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) = \mathrm{D}_{11} f(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}) = 2, \quad \mathrm{D}_{11} f(0,0) = 0, \quad \mathrm{D}_{12}(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) = -2,$$
$$\mathrm{D}_{12}(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}) = -2, \quad \mathrm{D}_{12} f(0,0) = 0, \quad \mathrm{D}_{22} f(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) = \mathrm{D}_{22} f(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}) = 0,$$
$$\mathrm{D}_{22} f(0,0) = 0$$

a

$$\det f''(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) = \det f''(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}) = -4 < 0, \quad \det f''(0,0) = 0.$$

To znamená, že body $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ jsou inflexní a v případě bodu $(0,0)$ nám toto kritérium nedává žádnou odpověď. Ovšem, na přímce $y = 0$, funkce $f|_{y=0}(x) = x^3$ nemá v bodě $x = 0$ žádný lokální extrém a bod $(0,0)$ je tedy také inflexní.

3. *Najděte lokální extrémy funkce*

$$f(x,y) = 27x^2y + 14y^3 - 69y - 54x.$$

Řešení: Platí

$$\mathrm{D}_1 f(x,y) = 54xy - 54, \quad \mathrm{D}_2 f(x,y) = 27x^2 + 42y^2 - 69.$$

Řešením soustavy rovnic

$$D_1 f(x,y) = 0$$
$$D_2 f(x,y) = 0$$

jsou body

$$(x_1, y_1) = (1,1), \quad (x_2, y_2) = (-1,-1),$$
$$(x_3, y_3) = (\sqrt{14}/2, 3/\sqrt{14}), \quad (x_4, y_4) = (-\sqrt{14}/2, -3/\sqrt{14}).$$

Dále

$$\mathrm{D}_{11} f(x,y) = 54y, \quad \mathrm{D}_{12} f(x,y) = \mathrm{D}_{21} f(x,y) = 54x, \quad \mathrm{D}_{22} f(x,y) = 84y.$$

Přímým výpočtem nebo pomocí Sylvestrova kritéria lze zjistit, že matice

$$\begin{pmatrix} 54y & 54x \\ 54x & 84y \end{pmatrix}$$

je v bodě (x_1, y_1) pozitivně definitní, v bodě (x_2, y_2) negativně definitní a v bodech (x_3, y_3) a (x_4, y_4) indefinitní. Funkce f má tedy v bodě (x_1, y_1) lokální minimum, v bodě (x_2, y_2) lokální maximum a platí $f(x_1, y_1) = -82$ a $f(x_2, y_2) = 82$.

4. *Najděte lokální extrémy funkce*

$$f(x, y) = x + y$$

na množině M dané rovností

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1.$$

Řešení: Jelikož pro každý bod $(x, y) \in M$ a funkci

$$g(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1$$

platí $Dg(x, y) \neq 0$, lze na řešení úlohy použít metodu Lagrangeových multiplikátorů. Hledáme tedy body $(x, y) \in M$ a číslo λ takové, že pro Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = x + y - \lambda \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1 \right)$$

platí

$$D_1 L(x, y, \lambda) = 1 + 2\lambda \frac{1}{x^3} = 0,$$

$$D_2 L(x, y, \lambda) = 1 + 2\lambda \frac{1}{y^3} = 0.$$

Tato soustava má následující dvě řešení:

$$(x_1, y_1, \lambda_1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}), \quad (x_2, y_2, \lambda_2) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Dále

$$\begin{pmatrix} D_{11}L(x, y, \lambda) & D_{12}L(x, y, \lambda) \\ D_{21}L(x, y, \lambda) & D_{22}L(x, y, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\dfrac{\lambda}{x^4} & 0 \\ 0 & -6\dfrac{\lambda}{y^4} \end{pmatrix}.$$

Tato matice je v bodě (x_1, y_1, λ_1) pozitivně definitní a v bodě (x_2, y_2, λ_2) negativně definitní. Funkce f má tedy na množině M v bodě (x_1, y_1) lokální minimum a v bodě (x_2, y_2) lokální maximum. Platí $f(x_1, y_1) = 2\sqrt{2}$ a $f(x_2, y_2) = -2\sqrt{2}$.

5. *Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y$$

na množině M dané rovností $x^2 + y^2 = 25$.

Řešení: Jelikož množina M je kompaktní a funkce f spojitá, existuje maximum a minimum funkce f na množině M. Jelikož pro každý bod $(x, y) \in M$ a funkci

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 25$$

platí $D_1 g(x, y), D_2 g(x, y) \neq (0, 0)$, lze na řešení úlohy použít metodu Lagrangeových multiplikátorů. Jestliže (x_0, y_0) je bod extrému funkce f na množině M, existuje číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že pro Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g = x^2 + y^2 - 2x + 4y - \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

platí

$$\begin{aligned} D_1 L(x_0, y_0, \lambda) &= 0, \\ D_2 L(x_0, y_0, \lambda) &= 0, \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)x_0 &= 1 \\ (1 - \lambda)y_0 &= -2 \\ x_0^2 + y_0^2 &= 25. \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy dostaneme $(x_0, y_0) \in \{(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}), (-\sqrt{5}, 2\sqrt{5})\}$. Jelikož $f(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}) = 25 + 6\sqrt{5}$ a $f(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) = 25 + 10\sqrt{5}$, je nejmenší hodnota funkce f na množině M rovna $25 + 6\sqrt{5}$ a největší $25 + 10\sqrt{5}$.

Druhá možnost: Množinu M parametrizujeme rovnicemi $x = 5\cos(t)$ a $y = 5\sin(t)$, kde $t \in [0, 2\pi]$. Nyní zúžíme funkci f na množinu M. Tedy

$$g(t) = f|_M = 25\cos^2(t) + 25\sin^2(t) - 2\cos(t) + 4\sin(t) = 25 - 2\cos(t) + 4\sin(t).$$

Nyní hledáme extrémy funkce g na $[0, 2\pi]$, to je ale jednoduché, protože se jedná o funkci jedné proměnné. Proto položme

$$g'(t) = 2\sin(t) + 4\cos(t) = 0,$$

což po úpravě dává

$$\frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{y}{x} = -2.$$

Odtud $y = -2x$ a dosazením do rovnice pro množinu M máme $x^2 + 4x^2 = 25$. A konečně $(x_1, y_1) = (\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$ a $(x_2, y_2) = (-\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$. Zbytek příkladu dořešíme tak, jak je uvedeno výše.

6. *Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y$$

na množině M dané nerovností $x^2 + y^2 \leq 25$.

Řešení: Množina M je kompaktní a funkce f spojitá; maximum a minimum funkce f na množině M tedy existuje. Nejprve hledáme extrém funkce f uvnitř množiny M. Nechť (x_0, y_0) je bod, v němž funkce f nabývá na množině M maxima nebo minima. Je-li $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} M$, platí

$$\begin{aligned} D_1 f(x_0, y_0) &= 0, \\ D_2 f(x_0, y_0) &= 0, \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} 2x_0 - 2 &= 0, \\ 2y_0 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

a $(x_0, y_0) = (1, -2)$. Je-li $(x_0, y_0) \in \mathrm{fr}M$, je bodem extrému funkce f na množině $\mathrm{fr}M$. Podle předchozího příkladu tedy $(x_0, y_0) \in \{(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}), (-\sqrt{5}, 2\sqrt{5})\}$.

Celkově, je-li bod (x_0, y_0) bodem extrému funkce f na množině M, platí

$$(x_0, y_0) \in \{(1, -2), (\sqrt{5}, -2\sqrt{5}), (-\sqrt{5}, 2\sqrt{5})\}.$$

Jelikož $f(1, -2) = -5$, $f(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}) = 25 + 6\sqrt{5}$ a $f(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) = 25 + 10\sqrt{5}$, je nejmenší hodnota funkce f na množině M rovna -5 a největší $25 + 10\sqrt{5}$.

7. *Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y$$

na množině M dané nerovnostmi $x^2 + y^2 \leq 25$, $y \geq 0$.

Řešení: Existence maxima a minima opět plyne z kompaktnosti množiny M a spojitosti zobrazení f. Označme (x_0, y_0) bod extrému funkce f na množině M. Nyní mohou nastat tři možnosti. Je-li $(x_0, y_0) \in \mathrm{int}M$, platí

$$\mathrm{D}_1 f(x_0, y_0) = 0,$$

$$\mathrm{D}_2 f(x_0, y_0) = 0.$$

Tyto podmínky ovšem žádný bod množiny M nesplňuje. Je-li $(x_0, y_0) \in \mathrm{fr}M$, $y_0 > 0$, je (podle řešení předchozího příkladu) $(x_0, y_0) = (-\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$. Je-li $x_0 \in [-5, 5]$, $y_0 = 0$, lze bod (x_0, y_0) opět najít pomocí Lagrangeovy funkce, jednodušší ovšem je najít podezřelé body funkce $g(x) = f|_{y=0}(x, y)$ na intervalu $[-5, 5]$: Krajní body $(-5, 0)$, $(5, 0)$ jsou podezřelé automaticky a protože $g'(x) = 2x - 2$, je stacionárním (podezřelým) bodem bod $(1, 0)$. Tedy celkově:

$$(x_0, y_0) \in \{(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}), (-5, 0), (1, 0), (5, 0)\}.$$

Jelikož $f(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) = 25 + 10\sqrt{5}$, $f(-5, 0) = 35$, $f(1, 0) = -1$, $f(5, 0) = 15$ je nejmenší hodnota funkce f na množině M rovna -1 a největší $25 + 10\sqrt{5}$.

Cvičení

1. Najděte lokální extrémy funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, jestliže
   a) $f(x, y) = 1 + 6y - y^2 - xy - x^2$;   b) $f(x, y) = x^2 - 2y^2 - 3x + 5y - 1$;
   c) $f(x, y) = (y - x - 3)^2$;   d) $f(x, y) = x^2y^3(12 - x - y)$;
   e) $f(x, y) = x + y + 4\cos(x)\cos(y)$;   f) $f(x, y) = 4x^2 - xy + y^2$;
   g) $f(x, y) = \sin^2(x) + \cos^2(y)$;   h) $f(x, y) = x^2 - xy - y^2 + 5y - 1$.

2. Najděte lokální extrémy funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (respektive $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$), jestliže
   a) $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy - 4x$;
   b) $f(x, y) = (8x^2 - 6xy + 3y^2)\,\mathrm{e}^{2x+3y}$;
   c) $f(x, y, z) = 35 - 6x + 2z + x^2 - 2xy + 2y^2 + 2yz + 3z^2$.

3. Najděte všechny lokální extrémy funkce $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z);\ x = 0 \text{ nebo } y = 0 \text{ nebo } z = 0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = xyz + \frac{12}{x} + \frac{24}{y} + \frac{72}{z}.$$

4. Najděte všechny lokální extrémy funkce $f : (-1, \infty) \times (-1, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = y\sqrt{1 + x} + x\sqrt{1 + y}.$$

5. Najděte maximum funkce $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{xy - 4y - 8x}{x^2y^2}.$$

6. Najděte lokální extrémy funkce f na množině $g(x, y) = 0$ (resp. $g(x, y, z) = 0$), jestliže

a) $f(x, y) = xy - x + y - 1$, $\quad g(x, y) = x + y - 1$;
b) $f(x, y, z) = xyz$, $\quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$;
c) $f(x, y, z) = xyz$, $\quad g(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y + z - 5 \\ xy + yz + zx - 8 \end{pmatrix}$.

7. Najděte maximum a minimum (pokud existuje) funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (respektive $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) na množině M, jestliže

a) $f(x, y) = (3x^2 + 2y^2)\, e^{-x^2-y^2}$, $\quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 4\}$;
b) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^3$, $\quad M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;
c) $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$, $\quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x, y \geq 0, y \leq -x + 3\}$;
d) $f(x, y) = y$, $\quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \leq 1, y^3 \leq x^2\}$;
e) $f(x, y) = e^{xy}$, $\quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - y^2 \leq 1\}$;
f) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$, $\quad M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$;
g) $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$, $\quad M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ xyz = 4\}$.

8. Najděte lokální i globální extrémy funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (respektive $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) na množině M, jestliže

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 12\}$;
b) $f(x, y) = xy$, $\quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x + y = 1\}$;
c) $f(x, y, z) = x + 2y - z$, $\quad M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 2, z = x^2+y^2\}$;
d) $f(x, y, z) = xy + xz$, $\quad M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1, xz = 1\}$;
e) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x + y| \leq 1, |x - y| \leq 1\}$.

9. Buď $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \cos(x)\cos(y)\cos(x + y)$. Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce f na čtverci s vrcholy $(0, 0)$, $(0, \pi)$, (π, π), $(\pi, 0)$.

10. Najděte maximum funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = 900z - 700x - 400y$$

na množině dané rovností $z = x/3 + y/3 - 1/x - 1/y + 5$.

11. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = e^{xy},$$

a $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \leq 1\}$. Vypočtěte $f(M)$.

12. Najděte supremum a infimum (pokud existuje) funkce $f(x, y, z) = x + y$ na množině

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + z^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 2\}.$$

13. Dokažte, že pro každé $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x, y, z \geq 0$, platí

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}.$$

(Návod: Hledejte maximum funkce $f(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz}$ na množině $\frac{1}{3}(x + y + z) = k$.)

14. Nalezněte vzdálenost elipsy $x^2 + 2y^2 + 2(x + 1)y = 1$ od bodu $(0, 0)$.

15. Buď $M \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní množina a x bod neležící v M. Dokažte, že existuje bod $y \in M$, který má ze všech bodů množiny M od bodu x nejkratší vzdálenost.

16. Buď $M \subset \mathbb{R}^n$ uzavřená množina a x bod neležící v M. Dokažte, že existuje bod $y \in M$, který má ze všech bodů množiny M od bodu x nejkratší vzdálenost.

17. Nechť množina M z předchozího příkladu je dána rovnicí $f(x) = 0$, kde f je spojitě diferencovatelná funkce splňující $\mathrm{D}f(x) \neq 0$ pro každé $x \in M$. Dokažte, že přímka určená body x a y je v bodě y na množinu M kolmá.

5. Integrální počet na $\mathbb{R}^n$

Příklady

1. *Vypočtěte*

$$\int_A (2x + 3y - 2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $A = [-2, 3] \times [1, 4]$.

Řešení: Funkce $(2x + 3y - 2)$ je spojitá na množině A, což je měřitelná množina, a f je tedy na A integrovatelná. Množinu A si můžeme vyjádřit nerovnostmi

$$\begin{aligned} -2 \le x &\le 3, \\ 1 \le y &\le 4. \end{aligned}$$

Podle Fubiniovy věty můžeme daný integrál počítat dvěma způsoby. Vybereme si jeden z nich.

$$\int_A (2x + 3y - 2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{3} \left(\int_1^4 (2x + 3y - 2)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-2}^{3} \left[2xy + \frac{3y^2}{2} - 2y \right]_1^4 \mathrm{d}x = \int_{-2}^{3} (6x + 16{,}5)\,\mathrm{d}x = 97{,}5.$$

2. *Vypočtěte*

$$\int_A xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde A je množina všech bodů z $\mathbb{R}^2$ ohraničená parabolou $y = 2x - x^2$ a přímkou $y = -x$.

Řešení: Bylo by vhodné namalovat si obrázek. Souřadnice průsečíků P_1, P_2 uvedené paraboly a uvedené přímky najdeme řešením systému rovnic

$$\begin{aligned} y &= 2x - x^2, \\ y &= -x. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme $P_1 = (0, 0)$ a $P_2 = (3, -3)$. Množina A je tedy dána nerovnostmi

$$\begin{aligned} 0 \le x &\le 3, \\ -x \le y &\le -x^2 + 2x. \end{aligned}$$

Jelikož je funkce F spojitá na měřitelné množině A, platí

$$\int_A xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \left(\int_{-x}^{-x^2+2x} xy\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^3 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{-x}^{-x^2+2x} \mathrm{d}x =$$
$$= \tfrac{1}{2} \int_0^3 (x^5 - 4x^4 + 3x^3)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{243}{40}.$$

3. *Vypočtěte*

$$\int_A y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ z \geq 0,\ \ 2x + 2y + z - 6 \leq 0\}$.

Řešení: Opět by bylo vhodné namalovat si obrázek. Z podmínek $z \geq 0,\ \ 2x+2y+z-6 \leq 0$ pro z vyplývá $0 \leq z \leq 6 - 2x - 2y$. Množina A jsou tedy takové body z $\mathbb{R}^3$, pro které platí

$$\begin{aligned} 0 \leq x &\leq 3, \\ 0 \leq y &\leq 3 - x, \\ 0 \leq z &\leq 6 - 2x - 2y. \end{aligned}$$

Funkce $f(x, y, z) = y$ je spojitá na měřitelné množině A a je na ní tedy integrovatelná. Platí

$$\int_A y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_0^3 \int_0^{3-x} \int_0^{6-2x-2y} y \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \tfrac{27}{3}.$$

4. *Vypočtěte*

$$\int_A \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

přičemž množina A je daná nerovnostmi $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ \ y \geq 0$.

Řešení: Použijeme transformaci do polárních souřadnic. Množina A je při této transformaci obrazem množiny B dané nerovnostmi $1 \leq r \leq 3,\ \ 0 \leq \varphi \leq \pi$, jak se můžeme přesvědčit použitím transformačních vztahů v uvedených nerovnostech. Toto zobrazení je na množině určené nerovnostmi $r > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$ prosté a spojitě diferencovatelné. Funkce $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ je spojitá a tedy integrovatelná na množině A. Proto podle Fubiniovy věty platí

$$\int_A \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_B \mathrm{e}^{-r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi} |r| \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}^9} \right).$$

5. *Vypočtěte*

$$\int_A \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

když A je dána nerovností

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Řešení: Při výpočtu použijeme zobrazení dané rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= ar \cos \vartheta \cos \varphi, \\ y &= br \cos \vartheta \sin \varphi, \\ z &= cz \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Jakobián tohoto zobrazení je $abcr^2 \cos \vartheta$. Toto zobrazení je prosté a spojitě diferencovatelné na množině dané nerovnostmi $r > 0,\ \ 0 < \varphi < 2\pi,\ \ -\pi/2 < \vartheta < \pi/2$. Množina A je při uvedené transformaci obrazem množiny B dané nerovnostmi $0 \leq r \leq 1$,

$0 \le \varphi \le 2\varphi,\ \ -\pi/2 \le \vartheta \le \pi/2$. Funkce

$$f(x,y,z) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$$

je spojitá a tedy integrovatelná na množině A. Proto platí

$$\begin{aligned}
&\int_A \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\
&\quad = \int_B \sqrt{1 - r^2\cos^2\varphi\cos^2\vartheta - r^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta - r^2\sin^2\vartheta}\,|abcr^2\cos\vartheta|\times \\
&\qquad \times \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = \\
&\quad = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-r^2}abcr^2\cos^2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{\pi^2}{4}abc.
\end{aligned}$$

6. *Najděte pomocí dvojného integrálu obsah části* A *roviny ohraničené křivkami* $y = \sqrt{x},\ \ y = 2\sqrt{x}$ *a* $x = 4$.

Řešení: Část A roviny ohraničená danými křivkami je množina určená nerovnostmi

$$\begin{gathered}
0 \le x \le 4, \\
\sqrt{x} \le y \le 2\sqrt{x}
\end{gathered}$$

a proto dostáváme

$$S = \int_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^4\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \tfrac{16}{3}.$$

7. *Najděte objem množiny* A *ohraničené plochami*

$$z = x^2 + y^2, \quad y = x^2, \quad y = 1, \quad z = 0.$$

Řešení: Daná množina A je zdola ohraničená rovinou xy (neboli $z = 0$), zhora rotačním paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a z boků „parabolickým válcem“ $y = x^2$ a rovinou $y = 0$. Množina A je tedy válcovité těleso, pro které platí $0 \le z \le x^2 + y^2$ pro každé $(x, y) \in B$, kde B je dána nerovnostmi

$$\begin{gathered}
-1 \le x \le 1, \\
x^2 \le y \le 1.
\end{gathered}$$

Proto platí

$$V = \int_B \left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1\int_{x^2}^1 \left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \tfrac{88}{105}.$$

8. *Najděte objem množiny* A *ohraničené plochami*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

přičemž $z \ge 0$ *a* $0 \le a \le b$.

Řešení: Daná množina A je těleso ohraničené dvěma koncentrickými kulovými plochami se středem v počátku a „polovinou“ kuželové plochy $x^2 + y^2 = z^2$ s vrcholem ve středu obou kulových ploch. Objem tohoto tělesa výhodně najdeme ve sférickém souřadnicovém systému. Množina A je obrazem kvádru

$$\begin{aligned} a \leq\ & r \ \leq b, \\ 0 \leq\ & \varphi \ \leq 2\pi, \\ \frac{\pi}{4} \leq\ & \vartheta \ \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

při zobrazení daném rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= r \cos\vartheta \cos\varphi, \\ y &= r \cos\vartheta \sin\varphi, \\ z &= z \sin\vartheta. \end{aligned}$$

Toto zobrazení je prosté a spojitě diferencovatelné na množině určené nerovnostmi

$$r > 0, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

a jeho Jakobián je roven $r^2 \cos\vartheta$. Proto platí

$$V = \int_A \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} r^2 \cos\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{3} \left(2 - \sqrt{2}\right) \left(b^3 - a^3\right).$$

9. *Najděte objemový element na kružnici S se středem v bodě $(0, 0)$ a poloměrem R.*

Řešení: Rovnice kružnice s požadovanými parametry je $x^2 + y^2 = R^2$. Všímavý student jistě snadno pozná, že normálový vektor v bodě (x, y) ležící na kružnici je například $u = (x, y)$ (stejně tak i $v = (2x, 2y)$), jednotkový normálový vektor v bodě (x, y) je tedy roven $n = (x/R, y/R)$ (tento krok bude jasnější uvědomíme-li si, že $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2} = R$). Nyní, máme-li normálový vektor v libovolném bodě kružnice (někdy se také říká jednotkové normálové pole na kružnici), získáme objemový element na kružnici kontrakcí objemového elementu na $\mathbb{R}^2$ tímto zmíněným vektorovým polem. Objemový element na $\mathbb{R}^2$ je $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ (někdy zkráceně jen $\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$). Vzorec pro kontrakci vnějšího součinu 1-forem následuje

$$i_\xi(\omega \wedge \eta) = i_\xi(\omega)\eta - i_\xi(\eta)\omega.$$

Dosadíme-li, dostáváme

$$\mathrm{d}S = i_n(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) = i_n(\mathrm{d}x)\, \mathrm{d}y - i_n(\mathrm{d}y)\, \mathrm{d}x = \frac{x}{R}\, \mathrm{d}y - \frac{y}{R}\, \mathrm{d}x.$$

10. *Ověřte správnost vzorce pro obvod kružnice ($O = 2\pi R$) pomocí integrace objemového elementu.*

Řešení: Z předchozího příkladu víme, že objemový element na kružnici S o poloměru R je $\mathrm{d}S = x/R\, \mathrm{d}y - y/R\, \mathrm{d}x$. Obvod spočítáme pokud zintegrujeme tento objemový element přes tuto kružnici. Tedy

$$O = \int_S \mathrm{d}S = \int_S \frac{x}{R}\, \mathrm{d}y - \frac{y}{R}\, \mathrm{d}x.$$

Parametrizujme kružnici S tak, že položíme $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ a $t \in [0, 2\pi]$. Nyní dosadíme do našeho integrálu

$$O = \int_0^{2\pi} \frac{R\cos t}{R}\,\mathrm{d}(R\sin t) - \frac{R\sin t}{R}\,\mathrm{d}(R\cos t) = \int_0^{2\pi} R(\cos^2 t + \sin^2 t)\,\mathrm{d}t$$
$$= R[t]_0^{2\pi} = 2\pi R.$$

11. *Vypočítejte integrál*

$$\int_C \sqrt{1+\varphi^2}\,\mathrm{d}C,$$

kde C je spirála daná parametrizací $x = \varphi\cos\varphi$, $y = \varphi\sin\varphi$ *pro* $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Řešení: Nejprve je nutno najít objemový element na spirále. Spočítáme-li si tečný vektor k C, dostaneme $u = (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi, \sin\varphi + \varphi\cos\varphi)$ a normálový $v = (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi, -\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)$ dále

$$\|v\| = \sqrt{\sin^2\varphi + 2\varphi\sin\varphi\cos\varphi + \varphi^2\cos^2\varphi + \cos^2\varphi - 2\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \varphi^2\sin^2\varphi}$$
$$= \sqrt{1+\varphi^2}.$$

Odtud jednotkový normálový vektor

$$n = \left(\frac{(\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)}{\sqrt{1+\varphi^2}}, \frac{(-\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)}{\sqrt{\varphi + t^2}}\right).$$

Se zkušenostmi z minulého příkladu si jistě sami odvodíte, že po kontrakci jednotkovým normálovým polem dostaneme objemový element na spirále

$$\mathrm{d}C = \frac{\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}\,\mathrm{d}y - \frac{-\cos\varphi + \varphi\sin\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Nyní již můžeme dosadit do našeho interálu

$$\int_C \sqrt{1+\varphi^2}\,\mathrm{d}C = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\left(\frac{\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}\,\mathrm{d}y - \frac{-\cos\varphi + \varphi\sin\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \int_0^{2\pi} (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)\,\mathrm{d}(\varphi\sin\varphi) + (-\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)\,\mathrm{d}(\varphi\cos\varphi)$$
$$= \int_0^{2\pi} 2\varphi\sin(2\varphi) - \cos(2\varphi) + \varphi^2\cos(2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

12. *Najděte objemový element na kuželové ploše A dané rovnicí*

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Řešení: Označme si $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Nejprve si spočítáme směrové vektory ke grafu funkce f. Ty jsou $u = (1, 0, \partial f x)$ a $v = (0, 1, \partial f y)$. Pomocí těchto vektorů najdeme normálový vektor (jednoduše vektorovým součinem), který je tedy $w = (-\partial f x, -\partial f y, 1)$ po vypočítání parciálních derivací dostaneme

$$w = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$$

Norma tohoto vektoru je $\|\omega\| = \sqrt{2}$, proto jednotkový normálový vektor ke grafu funkce f v bodě $(x, y, f(x, y))$ je

$$n = \left(\frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Objemový element na A dostaneme kontrakcí objemového elementu na $\mathbb{R}^3$ ($\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, někdy zkráceně píšeme pouze $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$) jendotkovým normálovým polem k A. Použijeme následujícího vzorce pro kontrakci součinu 1-forem

$$i_\xi(\omega \wedge \eta \wedge \kappa) = i_\xi(\omega)\eta \wedge \kappa - \omega \wedge i_\xi(\eta)\kappa + \omega \wedge \eta \cdot i_\xi(\kappa).$$

V našem případě to znamená, že objemový element na A lze vypočítat takto:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= i_n(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z) = i_n(\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - i_n(\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + i_n(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

13. *Vypočítejte integrál* $\int_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, *kde* S *je hranice krychle* $[0,1]^3$.

Řešení: Je možno plochu S rozdělit na šest částí (jednotlivé stěny krychle) a počítat integrál přes tyto části. My ale využijeme Stokesovu větu, tedy

$$\begin{aligned} \int_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{[0,1]^3} \mathrm{d}(x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) \\ &= \int_{[0,1]^3} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 3\int_{[0,1]^3} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3[x]_0^1[y]_0^1[z]_0^1 = 3. \end{aligned}$$

Cvičení

1. Znázorněte množiny dané systémem nerovností
   a) $y \le x,\ y \ge x^2$; b) $x^2 + y^2 - 1 \ge 0,\ 4 - x^2 - y^2 \le 0,\ |y| \ge |x|$,
   c) $1 \le |x| \le 2,\ 1 \le |y| \le 2$; d) $0 \le x \le 2a,\ \sqrt{2ax - x^2} \le y \le 2ax,\ a > 0$.

2. Vypočtěte
   a) $\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$; b) $\int_0^{\pi/2} \int_{\cos y}^1 x^4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

3. Vypočtěte
   a) $\int_A \left(x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $A = [0,2] \times [0,2]$;
   b) $\int_A x^2 y \cos\left(xy^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $A = [0, \pi/2] \times [0,2]$;
   c) $\int_A xy^2\sqrt{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $A = [-2,1] \times [1,3] \times [2,4]$.

4. Zaměňte pořadí integrování
   a) $\int_1^2 \int_3^4 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; b) $\int_0^2 \int_{2x}^{6-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$;
   c) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; d) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

5. Napište Fubiniovu větu pro dvojný integrál $\int_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, pokud
   a) A je lichoběžník s vrcholy $(1, 1)$, $(3, 1)$ $(2, 2)$, $(1, 2)$;
   b) A je množina ohraničená hyperbolou $y^2 - x^2 = 1$ a kružnicí $x^2 + y^2 = 9$, přičemž obsahuje bod $(0, 0)$.

6. Vypočtěte
   a) $\int_A \left(5x^2 - 2xy\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, když A je trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$;
   b) $\int_A (x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, když A je množina ohraničená přímkami $y = 0,\ y = x,\ x + y = 2$;
   c) $\int_A \sqrt{xy - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, když A je dána nerovnostmi $0 \le y \le b,\ y \le x \le 10y$;
   d) $\int_A (|x| + |y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, když A je dána nerovnostmi $|x| + |y| \le 4$;
   e) $\int_A (12 - 3x - 4y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, když A je dána nerovnostmi $x^2 + 4y^2 \le 4$;
   f) $\int_A x/3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, když A je ohraničena křivkou $x = 2 + \sin y$ a přímkami $x = 0$, $y = 0,\ y = 2\pi$;
   g) $\int_A \operatorname{sgn}\left(x^2 - y^2 + 2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, když A je kruh $x^2 + y^2 \le 2$.

7. Vypočtěte
   a) $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (x + y + z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$; b) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x^3y^2z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$;
   c) $\int_0^{\mathrm{e}-1} \int_0^{\mathrm{e}-x-1} \int_0^{x+y+\mathrm{e}} \ln(x - y - z)/(z - \mathrm{e})(z + y - \mathrm{e})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

8. Vypočtěte uvedený integrál, kde množina A je dána uvedenými nerovnostmi
   a) $\int_A z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ A:\ \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{2 - x^2 - y^2},\ 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}$, $0 \le x \le 1$;
   b) $\int_A z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ A:\ x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \le 1,\ z \ge 0$, kde $a, b, c > 0$;
   c) $\int_A \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ A:\ y^2 + z^2 \le x^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ x \ge 0$.

9. Vypočtěte integrál

$$\int_A \sqrt{\frac{1 - x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $A \subset \mathbb{R}^2$ je oblast ohraničená křivkami $x = 0$, $y = 0$ a $x^2 + y^2 = 1$.

10. Vypočtěte uvedený integrál, kde A je množina ohraničena uvedenými plochami
   a) $\int_A (2x + 3y - z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ A:\ z = 0,\ z = a,\ x = 0,\ y = 0,\ x + y = b,\ a, b > 0$;
   b) $\int_A xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ A:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x, y, z > 0$;
   c) $\int_A y\cos(z + x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ A:\ y = \sqrt{x},\ y = 0,\ z = 0,\ x + z = \pi/2$.

11. Vypočtěte
   a) $\int_A \left(x^2 + y^2 + z^2 + u^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u$, kde $A = [0, 1]^4$;
   b) $\int_A u^4\,\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u$, kde A je množina dána nerovnostmmi $0 \le z \le u,\ 0 \le u \le 1,\ 0 \le y \le zu,\ 0 \le x \le yzu$;
   c) $\int_A \mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2 \ldots \mathrm{d}x^n$, kde A je množina dána nerovnostmi $x^1 \ge 0,\ x^2 \ge 0, \ldots, x^n \ge 0,\ x^1 + x^2 + \ldots + x^n \le 1$.

12. Vypočtěte dvojné integrály na množině A transformací do polárních souřadnic
   a) $\int_A (1 - 2x - 3y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde A je kruh $x^2 + y^2 \le 2$;
   b) $\int_A \ln\left(x^2 + y^2\right) / \left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde A je mezikruží $1 \le x^2 + y^2 \le \mathrm{e}$;
   c) $\int_A \sin\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde A je mezikruží $\pi^2 \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2$.

13. Vypočítejte pomocí transformace do *zobecnělých polárních souřadnic* $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$ dvojný integrál

$$\int_A \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad \text{kde } A \text{ je vnitřek elipsy } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1.$$

14. Vypočtěte trojné integrály na množině A transformací do válcových souřadnic
   a) $\int_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $A:\ x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ 0 \le z \le 6$;
   b) $\int_A z\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde A je množina ohraničená rovinami $y = 0,\ z = 0, z = a > 0$ a válcovou plochou $x^2 + y^2 = 2x$;
   c) $\int_A \left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde A je množina ohraničená paraboloidem $2z = x^2 + y^2$ a rovinou $z = 2$.

15. Vypočtěte trojné integrály na množině A transformací do sférických souřadnic
   a) $\int_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde A je část koule $x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$;
   b) $\int_A \left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $A:\ z \ge 0,\ 4 \ge x^2 + y^2 + z^2 \ge 9$;
   c) $\int_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde A je koule $x^2 + y^2 + z^2 \le z$.

16. Vypočtěte obsah oblasti ohraničené přímkami

$$2x - y = 0, \quad 2x - y = 7, \quad x - 4y + 7 = 0, \quad x - 4y + 14 = 0.$$

17. Vypočtěte obsah oblastí ohraničených elipsou $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ a přímkou $x/a + y/b = 1$.

18. Vypočtěte obsah oblasti ohraničené danými křivkami
   a) $y = (x - a)^2/a,\ a > 0,\ x^2 + y^2 = a^2$;
   b) $y = -2,\ y = x + 2,\ y = 2,\ y^2 = x$.

19. Transformací do polárních souřadnic najděte obsah části roviny ohraničené danými křivkami
   a) $(x - a)^2 + y^2 = a^2,\ x^2 + (y - a)^2 = a^2$;
   b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \quad x + y = a > 0$;
   c) $x^3 + y^3 = axy$.

20. Pomocí zobecnělých polárních souřadnic

$$x = ar\cos^p\varphi,$$
$$y = br\sin^p\varphi,$$

kde a, b, p jsou vhodně zvolené konstanty, vypočtěte obsah části roviny ohraničené danými křivkami
   a) $\left(x^2/a^2 + y^2/b^2\right)^2 = xy/c$; b) $(x/a + y/b)^2 = x/a - y/b, \quad y > 0$;
   c) $x^4/a^4 + y^4/b^4 = x^2/h^2 + y^2/k^2$.

21. Trasformací do zobecnělých sférických souřadnic $x = ar\cos\vartheta\cos\varphi$, $y = br\cos\vartheta\sin\varphi$, $z = cz\sin\vartheta$ vypočtete integrál

$$\int_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je elipsoid se středem v bodě $(0, 0, 0)$ a poloosami $a, b, c > 0$.

22. Vypočtete integrál

$$\int_S x^2y^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = a, z \le 0\}$ a $a > 0$.

23. Najděte objemy těles ohraničených danými plochami
    a) rovinami: $x - y + z = 6,\ x + y = 2,\ x = y,\ y = 0,\ z = 0$;
    b) válcovými plochami: $z = 4 - y^2,\ y = x^2$ a rovinou $z = 0$;
    c) paraboloidy: $z = 4 - x^2 - y^2,\ 2z = 2 + x^2 + y^2$;
    d) válcovými plochami: $x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 2y,\ z = 2y + x$ a $z = 0$;
    e) plochami: $z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2},\ z = 0,\ 1 = x^2 + y^2$.

24. Vypočítejte integrál
    a) $\int_C (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y$, kde C je trojúhelník s vrcholy $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ orientovaný ve směru daném pořadím ve výčtu vrcholů;
    b) $\int_C (x + y\,\mathrm{d}x - x - y\,\mathrm{d}y)/(x^2 + y^2)$, kde C je kružnice se středem v počátku a poloměrem 1;
    c) $\int_C xy\,\mathrm{d}x + (x + y)\,\mathrm{d}y$, kde $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = y \in [0, 1]\}$;
    d) $\int_C xy\,\mathrm{d}x + (x + y)\,\mathrm{d}y$, kde $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = t^2, y = t^2, t \in [0, 1]\}$;
    e) $\int_C xy\,\mathrm{d}x + (x + y)\,\mathrm{d}y$, kde $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = t, y = t^2, t \in [0, 1]\}$;
    f) $\int_C (\,\mathrm{d}x - \,\mathrm{d}y)/(x + y)$, kde C je hranice čtverce s vrcholy $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ a $(0, -1)$ orientovaná ve směru daném pořadím ve výčtu vrcholů.

25. Vypočítejte integrál
    a) $\int_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je hranice krychle $[0, 1]^3$;
    b) $\int_S x^2y^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \le 0\}$;
    c) $\int_C 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$, kde C je libovolná křivka vycházející z bodu $(0, 0)$ a končící v bodě $(2, 1)$;
    d) $\int_C yf(xy)\,\mathrm{d}x + xf(xy)\,\mathrm{d}y$, kde f je spojitá funkce a C je křivka z bodu $(1, 1)$ do bodu $(2, 3)$;
    e) $\int_C (x^4 + 4x + y^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\,\mathrm{d}y$, kde C je křivka z bodu $(-2, -1)$ do bodu $(3, 0)$;
    f) $\int_C (1/y)\,\mathrm{d}x - (x/y^2)\,\mathrm{d}y$, kde C je úsečka z bodu $(1, 1)$ do bodu $(2, 3)$.

26. Vypočítejte integrál
    a) $\int_S x\,\mathrm{d}S$, kde S je část kulové plochy v prvním kvadrantu se středem v počátku a poloměrem R;
    b) $\int_S x^2y^2\,\mathrm{d}S$, kde S je horní půlka kulové plochy se středem v počátku a poloměrem R;
    c) $\int_S x + y\,\mathrm{d}S$, kde S je čtvrtina kružnice $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x = y$ ležící v prvním oktantu;
    d) $\int_S \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}S$, kde S je část kuželové plochy $x^2/a^2 + y^2 - z^2/c^2 = 0$, $0 \le z \le b$.

27. Najděte objemové elementy na následujících křivkách respektive plochách.
    a) Kulová plocha v $\mathbb{R}^3$ se středem v počátku a poloměrem R;
    b) Rovina v $\mathbb{R}^3$ dána rovnicí $z = ax + by + c$;
    c) Rotační paraboloid v R^3 s rovnicí $z = x^2 + y^2$;

d) Šroubovice v $\mathbb{R}^3$ dána parametrizací $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t$.

28. Následující křivkové integrály se pokuste vypočítat Stokesovou větou.
   a) $\int_C (xy + \sin(x/y))/x \,\mathrm{d}x - \sin(x/y)/y \,\mathrm{d}y$, kde C je hranice trojúhelníku s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(0,2)$ orientovaná pořadím ve výčtu vrcholů;
   b) $\int_C \mathrm{e}^y \,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}y$, kde C je hranice obdélníku $[0,3] \times [1,2]$,
   c) Obvod jednotkového kruhu, tedy $\int_S x \,\mathrm{d}y - y \,\mathrm{d}x$, S je jednotkový kruh.

Výsledky

2. a) $\frac{1}{40}$, **3. a)** $\frac{32}{3}$, **b)** $-\pi/16$, **c)** $5\left(4-\sqrt{2}\right)$. **4. a)** $\int_3^4 \int_1^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, **b)** $\int_0^4 \int_0^{y/2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_4^6 \int_0^{6-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, **c)** $\int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. **5. a)** Např. $\int_1^2 \int_1^{-y+4} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, **b)** např. $\int_{-3}^{-2} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_2^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. **6. a)** 3, **b)** 1, **c)** $6b^3$, **d)** $\frac{64}{3}$, **e)** 24π, **f)** $\frac{3}{2}\pi$, **g)** 2π. **7. a)** 18, **b)** $\frac{1}{110}$, **8. a)** $\pi(\sqrt{8}-1)/15$, **b)** $\pi abc^2/4$, **c)** $2\pi R^5/5$. **9.)** $\pi(\pi-2)/8$. **10. a)** $5ab^3/6-(a^2b^2)/4$, **b)** $\frac{1}{84}$, **c)** $\pi^2/16-\frac{1}{2}$. **11. a)** $\frac{4}{3}$, **b)** $(2\mathrm{e}-5)/32$, **c)** $1/n!$. **12. a)** 2π, **b)** $\pi/2$, **c)** $-6\pi^2$. **13.)** $2\pi ab/3$ **14. a)** 3π, **b)** $b^3a^2\pi/6$, **c)** $\frac{16}{3}\pi$. **15. a)** $\pi/8$, **b)** $\frac{844}{15}\pi$, **c)** $\pi/10$. **16.)** $\frac{49}{2}$. **17.)** $S_1 = ab(\pi-2a)/4$, $S_2 = \pi ab(\frac{3}{4}+2a/\pi)$. **18. a)** $a^2(\pi/4-\frac{1}{3})$, **b)** $\frac{40}{3}$. **19. a)** $\pi a^2/2$. **23. a)** $\frac{16}{3}$, **b)** $128\sqrt{2}/21$, **c)** 3π, **e)** $\pi(1-\mathrm{e}^{-R^2})$. **24. a)** 0, **b)** -2π, **c)** $\frac{4}{3}$; **d)** $\frac{4}{3}$; **e)** $\frac{17}{12}$, **f)** -4. **25. a)** 3, **c)** 4, **d)** $F(5)-F(1)$, F-primitivní funkce k f, **e)** 62, **f)** $-\frac{1}{3}$. **26. a)** $\pi R^3/4$, **b)** $2\pi R^6/15$, **c)** $\frac{1}{2}R^2$, **d)** $\frac{2}{3}\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}$. **27. a)** $\mathrm{d}S = x/R\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - y/R\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z/R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, **b)** $\mathrm{d}S = (-a\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + b\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)/\sqrt{a^2+b^2+1}$, **c)** $\mathrm{d}S = (-2x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + 2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)/\sqrt{4z+1}$ **d)** $(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}z)/\sqrt{2}$. **28. a)** -1, **b)** $2\mathrm{e} - \mathrm{e}^2/2 - \frac{3}{2}$, **c)** 2π.

6. Funkce komplexní proměnné

Příklady

1. *Z definice derivace dokažte že pro* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$, *platí* $f'(z) = 2z$.

Řešení: Hodnota $f'(z_0)$ je dána vztahem

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Dosaďme do tohoto vztahu naši funkci. Dostáváme
$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0}((z_0 + \Delta z)^2 - (z_0)^2)/\Delta z = \lim_{\Delta z \to 0}(z_0^2 + 2z_0 \Delta z + \Delta z^2 - z_0^2)/\Delta z = \lim_{\Delta z \to 0}(2z_0 \Delta z + \Delta z^2)/\Delta z = \lim_{\Delta z \to 0} 2z_0 \Delta z/\Delta z + \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z^2/\Delta z = 2z_0 + 0$.

2. *Vypočítejte integrál*

$$I = \int_C z^2 \, \mathrm{d}z,$$

kde C je oblouk kružnice $|z| = 1$ *ohraničený body* $z_1 = \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{i}}$ *a* $z_2 = \mathrm{e}^{\beta \mathrm{i}}$ *(*$\alpha < \beta$*).*

Řešení: Podívejme se nejprve blíže na funkci $f(z) = z^2$, pomocí reálné a imaginární části argumentu má tato funkce tvar $f(z) = z^2 = (x + \mathrm{i}y)^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)\mathrm{i} = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, kde $u(x, y) = x^2 + y^2$ a $v(x, y) = 2xy$.

Samotný integrál budeme počítat podle následujícího vzorce

$$\int_C f(z) \, \mathrm{d}z = \int_C (u \, \mathrm{d}x - v \, \mathrm{d}y) + \mathrm{i} \int_C (u \, \mathrm{d}y + v \, \mathrm{d}x)$$

V našem případe tedy dostáváme

$$\int_C z^2 \, \mathrm{d}z = \int_C (x^2 - y^2 \, \mathrm{d}x + 2xy \, \mathrm{d}y) + \mathrm{i} \int_C (x^2 - y^2 \, \mathrm{d}y + 2xy \, \mathrm{d}x)$$

Nyní parametrizujeme oblouk následovně: $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ odtud $\mathrm{d}x = -r \sin t \, \mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}y = r \cos t \, \mathrm{d}t$. Což dává

$$\begin{aligned} I &= \int_\alpha^\beta (\sin^3 t - 3\cos^2 t \sin t) \, \mathrm{d}t + \mathrm{i} \int_\alpha^\beta (\cos^3 t - 3\sin^3 t \cos t) \, \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{\cos(3t)}{3} \right]_\alpha^\beta + \mathrm{i} \left[\frac{\sin(3t)}{3} \right]_\alpha^\beta = \tfrac{1}{3}(\sin(3\beta) + \cos(3\beta) - \sin(3\alpha) - \cos(3\alpha)). \end{aligned}$$

Pokud je C celá kružnice, potom $I = 0$, což odpovídá faktu, že integrál z analytické funkce po uzavřené křivce je roven 0.

3. *Vypočítejte integrál*

$$\int_C 3z^3 \, \mathrm{d}z,$$

kde C je oblouk spirály dané parametrizací $\varphi : [0, 8\pi] \ni t \mapsto t\,\mathrm{e}^{t\mathrm{i}}$.

Řešení: Nejpřirozenější by bylo použít zadanou parametrizaci a „dosadit" ji do integrálu (přesněji řečeno provést pull-back formy). Všimeme si ale, že funkce za integrálem je analytická v celé $\mathbb{C}$ proto integrál z ní nezávisí na integrační cestě. Proto si můžeme zvolit úplně jinou (jednodušší) křivku spojující počáteční $\varphi(0) = 0$ a koncový $\varphi(8\pi) = 8$ bod. Zvolme si tedy „lepší“ parametrizaci, třeba $\psi : [0, 1] \ni t \mapsto 8t$. Dostaneme

$$\int_C 3z^3 \,\mathrm{d}z = \int_0^1 3t^3 \,\mathrm{d}(8t) = \int_0^1 24t^3 \,\mathrm{d}t = 6\left[t^4\right]_0^1 = 6.$$

4. *Vypočítejte integrál*

$$\int_C \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z,$$

kde C je čtverec daný vrcholy $1 + \mathrm{i}$, $-1 + \mathrm{i}$, $-1 - \mathrm{i}$ *a* $1 - \mathrm{i}$ *s orientací danou pořadím ve výčtu vrcholů.*

Řešení: V případě, že by se jednalo o analytickou funkci integrál by vyšel roven 0. My ale takové štěstí nemáme. Tato funkce má v bodě 0 singularitu. Integrál po jakékoli zavřené křivce obepínající singulární bod je roven 2π i-násobku residua funkce v tomto bodě. Tedy

$$I = \int_C \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \operatorname{res}_0 \frac{1}{z}.$$

Stačí tedy spočítat výše uvedené residuum. Využijeme následujícího vztahu

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(n-1)!} \left.\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\right|_a \left((z-a)^n f(z)\right),$$

kde a je pólem n-tého řádu funkce f. V našem případě $f(z) = 1/z$ je 0 pólem prvního řádu. O tom se lze přesvědčit tím, že limita $\lim_{z\to 0}(z - 0) f(z)$ existuje a je konečná. Dosaďme tedy do vzorce pro reziduum

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(n-1)!} \left.\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\right|_a \left((z-a)^n f(z)\right) = 1 \left.\frac{\mathrm{d}^{1-1}}{\mathrm{d}z^{1-1}}\right|_0 \left((z-0)\frac{1}{z}\right) = 1.$$

Proto

$$\int_C \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}.$$

5. *Vypočtěte integrál*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} \,\mathrm{d}x$$

kde $x \in \mathbb{R}$.

Řešení: Rozšíříme-li funkci, kterou máme integrovat na celé $\mathbb{C}$, tedy formálně definujeme funkci $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = 1/(z^2 + 1)$, lze náš integrál vypočítat tak, že budeme integrovat funkci g po „uzavřené“ křivce $C := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \mathbb{C}$. Uvnitř C (například v oblasti $\mathcal{I}m z > 0$) leží jediný singulární bod g a to $z = \mathrm{i}$. Tento bod je jednonásobným pólem funkce g. Můžeme tedy použít Cauchyho větu o reziduích a dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} \,\mathrm{d}x = 2\pi \mathrm{i} \operatorname{res}_{\mathrm{i}} g(z) = 2\pi \mathrm{i} \lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{z - \mathrm{i}}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})} = \pi.$$

Jistě si snadno ověříte, že stejný výsledek dostaneme pokud budeme uvažovat oblast $\mathcal{I}m z < 0$.

Pokud se rozhodneme počítat náš integrál „klasicky“ potom dostanme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} [\arctan(x)]_{-c}^{c} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi .$$

Cvičení

1. Z definice derivace dokažte následující vztahy
   a) $((a+b\mathrm{i})z)' = (a+b\mathrm{i})$; b) $(z^n)' = nz^{n-1}$, kde $n \in \mathbb{N}$;

2. Rozhodněte, zda je funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytická v $\mathbb{C}$ případně na nějaké otevřené množině, pokud
   a) $f(z) = z$; b) $f(z) = |z|$;
   c) $f(z) = z\,\mathrm{e}^z$; d) $f(z) = \overline{z}$;
   e) $f(z) = z^2 + (3+4\mathrm{i})z/(z-(1+\mathrm{i}))$.

3. Najděte rezidua následujících funkcí ve všech jejich singulárních bodech.
   a) $f(z) = 1/(z-z^3)$; b) $f(z) = z/(1+z)^3$;
   c) $f(z) = 1/(z^2+\mathrm{i})^3$; d) $f(z) = 1/(\mathrm{e}^z+1)$;
   e) $f(z) = 1/\sin(x)$.

4. Pomocí věty o derivaci (integraci) řady člen po členu najděte derivaci (primitivní funkci) k následujícím funkcím
   a) $\sin(z)$; b) $\cos(z)$; c) e^z.

5. Vypočtěte integrály:
   a) $\int_C (5z-2)/(z(z-1))\,\mathrm{d}z$, kde C je kružnice $|z| = 2$ orientovaná v kladném směru;
   b) $\int_C 1/(z^3(z+4))\,\mathrm{d}z$, kde C je kružnice $|z+2| = 3$ orientovaná v kladném směru;
   c) $\int_C 1/(z^3(z+4))\,\mathrm{d}z$, kde C je kružnice $|z| = 2$ orientovaná v kladném směru;
   d) $\int_C (3z^3+2)/((z-1)(z^2+9))\,\mathrm{d}z$, kde C je kružnice $|z-2| = 2$ orientovaná v kladném směru;
   e) $\int_C \tan z\,\mathrm{d}z$, kde C je kružnice $|z| = 2$ orientovaná v kladném směru;
   f) $\int_C (3z^3+2)/((z-1)(z^2+9))\,\mathrm{d}z$, kde C je kružnice $|z| = 4$ orientovaná v kladném směru;
   g) $\int_C 1/z(z+1)(z-2)\,\mathrm{d}z$, kde C je kružnice $|z-3| = 2$ orientovaná v kladném směru.

6. Vypočítejte integrál z funkce f po jednotkové kladně orientované kružnici C se středem v 0 jestliže
   a) $f(z) = z^{-2}e^{-z}$; b) $f(z) = z\,\mathrm{e}^{1/z}$.

7. Pomocí reziduí komplexních funkcí vypočítejte následující integrály z reálných funkcí.
   a) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2/((x^2+9)(x^2+4))\,\mathrm{d}x$; b) $\int_{-\infty}^{\infty} 1/(x^2+1)\,\mathrm{d}x$;
   c) $\int_{-\infty}^{\infty} 1/(x^2+2x+2))\,\mathrm{d}x$; d) $\int_{-\infty}^{\infty} x/((x^2+1)(x^2+2x+2))\,\mathrm{d}x$;
   e) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2/(x^2+1)^2\,\mathrm{d}x$.

Výsledky

2. a) ano na $\mathbb{C}$, **b)** ne na $\mathbb{C}$, ano na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, **c)** ano na $\mathbb{C}$, **d)** ne nikde, **e)** ne na $\mathbb{C}$, ano na $\mathbb{C} \setminus \{1+\mathrm{i}\}$. **4. a)** $\cos(z)$, **b)** $-\sin(z)$, **c)** e^z. **5. a)** $10\pi\mathrm{i}$, **b)** 0, **c)** $\pi\mathrm{i}/32$, **d)** $\pi\mathrm{i}$, **e)** -4π, **f)** $6\pi\mathrm{i}$. **6. a)** $-2\pi\mathrm{i}$, **b)** $\pi\mathrm{i}$. **7. a)** $\pi/100$, **b)** π, **c)** π, **d)** $-\pi/5$, **e)** $\pi/2$.

7. Obyčejné diferenciální rovnice

Ve většině následujících příkladů a cvičení jsou y a z funkce jedné reálné proměnné označované jako x.

Příklady

1. *Ověřte, že funkce* $y(x) = x\sqrt{1-x^2}$ *je řešením diferenciální rovnice*

$$y' = \frac{x - 2x^3}{y}$$

na intervalu $(0, 1)$.

Řešení: Nejdříve si spočítejme y', tedy $y' = \left(x\sqrt{1-x^2}\right)' = (1-2x^2)/\sqrt{1-x^2}$. Nyní dosaďme do pravé strany diferenciální rovnice funkci y:

$$\frac{x-2x^3}{y} = \frac{x-2x^3}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = y'$$

2. *V diferenciální rovnici*

$$y' = \frac{y^2}{xy - x^2}\text{È}$$

provedťe transformaci $y(x) = z(x) \cdot x$.

Řešení: Nejprve si z transformace vypočteme y'. Dostáváme $y' = z'x + z$ (nezapomeňme, že z je funkcí proměnné x). Transformaci i vypočítanou derivaci y' dosaďme do diferenciální rovnice

$$z'x + z = \frac{z^2}{z-1}.$$

3. *Metodou separace proměnných vyřešte diferenciální rovnici*

$$\frac{1}{x}y' = \frac{1}{x^2+1}.$$

Řešení: Za předpokladu $x \neq 0$ upravíme rovnici na tvar

$$y' = \frac{x}{x^2+1}.$$

Nyní již rovnice má „separované“ proměnné. Někdy se takové rovnice zapisují ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{a nebo} \quad \mathrm{d}y = \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Nyní „zintegrujeme" obě strany (přesněji řečeno aplikujeme větu o diferenciálních rovnicích se separovanými proměnnými tj. rovnicích ve tvaru $y'F(y) = G(x)$). Dostáváme

$$y = \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + C = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Všechna řešení naší rovnice lze na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ zapsat ve tvaru $y = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$, kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo.

4. *Najděte všechna řešení diferenciální rovnice*

$$y' = \frac{y^2}{xy - x^2}.$$

Řešení: Dělíme-li čitatele i jmenovatele x, dostaneme rovnici ve tvaru

$$y' = \frac{(y/x)^2}{(y/x) - 1}.$$

Tedy naše rovnice je homogenní a jeví se jako výhodné použít transformaci $y = zx$, tedy $y' = z'x + z$, což ji převádí na tvar

$$z'x + z = \frac{z^2}{z-1}.$$

Je vidět, že jde o rovnici se separovatelnými proměnnými, tedy po jejich separaci (a předpokladu $z, x \neq 0$) dostaneme

$$\frac{z-1}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Zintegrujeme-li poslední rovnici obdržíme $z - \ln|z| = \ln|x| + \ln C$, kde C je kladná konstanta. Toto lze přepsat na $\ln \mathrm{e}^z \ln|z| = \ln|x| + \ln C$. Odtud tedy $\mathrm{e}^z = C|xz| = kxy$, kde $k \in \mathbb{R}$. Nyní proveďme inverzní transformaci k té, co jsme provedli na začátku ($z = y/x$). Celkově řešením jsou všechny funkce y vyhovující podmínce

$$\mathrm{e}^{y/x} = ky.$$

5. *Určete všechna řešení diferenciální rovnice*

$$y' = \frac{3y - 7x + 7}{3x - 7y - 3}.$$

Řešení: U rovnic tohoto typu zabírá substituce $x = \xi + x_0$, $y = \eta + y_0$, kde (x_0, y_0) jsou řešení následující lineární soustavy

$$\begin{aligned} -7x + 3y + 7 &= 0, \\ 3x - 7y - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Rovnici vyřešíme Cramerovým pravidlem k tomu potřebujeme následující determinanty

$$D = \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 40, \quad D_x = \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} -7 & -7 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Odtud $x_0 = D_x/D = 1$ a $y_0 = D_y/D = 0$, naše transformace má tedy tvar $x = \xi + 1,\ y = \eta$, která převádí naši rovnici na tvar

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = \frac{3\eta - 7\xi}{3\xi - 7\eta} = \frac{3\frac{\eta}{\xi} - 7}{3 - 7\frac{\eta}{\xi}}.$$

Což už je homogenní rovnice a transformace $z = \eta/\xi$ ji převádí na

$$\xi\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi} + z = \frac{3z - 7}{3 - 7z}$$

Po úpravě dospějeme k rovnici

$$\frac{7z - 3}{7(z^2 - 1)}\,\mathrm{d}z + \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = 0$$

Po integraci této rovnice dostáváme $(z-1)^2(z+1)^5\xi^7 = C \neq 0$, po dosazení $z = y/(x-1)$ a nezbytných úpravách zjistíme, že

$$(y - x + 1)^2(y + x - 1)^5 = K, \quad K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

6. *Určete řešení Cauchyho úlohy pro lineární diferenciální rovnici*

$$y' + \frac{2}{x}y = 0,$$

vyhovující počáteční podmínce $y(1) = 2$.

Řešení: Separováním proměnných dostáváme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Integrací této lineární rovnice získáme obecné řešení $y = C/x^2$, kde $C \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nyní použijeme počáteční podmínku pro stanovení konstanty C: $y(1) = C/(1)^2 = 2$. Odtud $C = 2$. Řešením tedy je funkce $y = 2/x^2$, pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

7. *Najděte všechna řešení následující nehomogenní lineární diferenciální rovnice*

$$y' + \frac{1}{x}y = 3x.$$

Řešení: Nejprve vyřešíme odpovídající homogenizovanou rovnici

$$y' + \frac{1}{x}y = 0.$$

Metodou separace proměnných lze dospět k výsledku

$$y_H = \frac{C}{x},$$

kde $C \in \mathbb{R}$ a $x \neq 0$. Nyní k řešení homogenizované rovnice přičteme jedno řešení původní rovnice (říkáme mu partikulární řešení) a získáme tak obecné řešení naší rovnice. Toto řešení buď uhodneme (podle tvaru rovnice by to mohl být polynom a jeho stupeň nebude vyšší než dva) a nebo použijeme metodu „variace konstant“.

Použijme metodu variace konstant. Považujme nyní C za funkci x (zopakujme, že tedy máme $y = C(x)/x$). Dosazením do naší rovnice dostaneme:

$$-\frac{1}{x^2}C(x) + \frac{1}{x}C'(x) + \frac{1}{x^2}C(x) = 3x$$

odtud

$$C'(x) = 3x^2.$$

Dostáváme, že $C(x) = x^3$ (to není jediné řešení, další je například $C(x) = x^3 + 2$. Nám stačí jen jedno.). Naše partikulární řešení tedy je $y_p = (x^3)/x = x^2$.

Přičtením y_p k y_H dostaneme celkové řešení naší diferenciální rovnice

$$y = y_H + y_p = x^2 + \frac{1}{x}C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ a $x \neq 0$.

8. *Řešte lineární diferenciální soustavu*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x - 2y\\ \dot{y} &= 2x - y + 1,\end{aligned}$$

kde y, x jsou funkce proměnné t. Vyřešte tuto soustavu také s počáteční podmínkou $x(0) = 0$ a $y(0) = 1$.

Řešení: Nejprve budeme hledat řešení homogenizovaného systému, tedy soustavy

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x - 2y\\ \dot{y} &= 2x - y.\end{aligned}$$

Najděme vlastní čísla a vlastní vektory matice této soustavy

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bohužel tato matice má jednu dvojnásobnou vlastní hodnotu $\lambda = 1$, k ní příslušný vlastní vektor je

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Najděme tedy vektor v (někdy mu říkáme „zobecněný vlastní vektor“), který se operátorem $A - \lambda E$ zobrazí na vlastní vektor u. Řešíme tedy lineární soustavu$(A - \lambda E)v = u$, odtud dostaneme, že

$$v = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obecné řešení homogenizovaného systému tedy je

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_H = c_1 u\, \mathrm{e}^{\lambda t} + c_2(v + tu)\, \mathrm{e}^{\lambda t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^t + c_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + 1t \\ 1 + 1t \end{pmatrix} \mathrm{e}^t.$$

Nyní musíme určit partikulární řešení naší původní soustavy. Zamyslíme-li se nad tím, vidíme, že x a y by mohly být konstantní funkce například $x = A$ a $y = B$, potom stačí dořešit soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= 3A - 2B \\ 0 &= 2A - B + 1. \end{aligned}$$

Řešení je $A = -2$ a $B = -3$. Přičteme-li toto partikulární řešení k obecnému řešení homogenizovaného systému, dostaneme obecné řešení naší soustavy.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^t + c_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + 1t \\ 1 + 1t \end{pmatrix} \mathrm{e}^t + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Pro stanovení konstant c_1, c_2 použijeme počáteční podmínku, řešíme soustavu

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 \mathrm{e}^0 + c_2(\tfrac{3}{2} + 1 \cdot 0)\, \mathrm{e}^0 - 2 = 0 \\ y(0) &= c_1 \mathrm{e}^0 + c_2(1 + 1 \cdot 0)\, \mathrm{e}^0 - 3 = 1. \end{aligned}$$

Dostáváme $c_1 = 8$ a $c_2 = -4$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^t - 4 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + 1t \\ 1 + 1t \end{pmatrix} \mathrm{e}^t + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

9. *Vyřešte následující lineární diferenciální rovnici*

$$y'' + y = 0.$$

Řešení: Teorie nám radí provést substituci $y' = z$ a příklad dopočítávat jako soustavu rovnic prvního řádu, to my uděláme, ale přeskočíme úvodní kroky a přejdeme rovnou k charakteristickému polynomu matice tohoto systému. Tento polynom se nápadně podobá (a není to náhoda) naší původní rovnici, tedy

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Tento polynom má bohužel pouze komplexní kořeny $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}$. Řešením samozřejmě jsou lineární kombinace funkcí $f_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ a $f_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$, pokud bychom chtěli zapsat řešení pomocí reálných funkcí není nic jednoduššího, než v prostoru řešení (lineární obal funkcí f_1, f_2) zvolit jiná (reálná) nezávislá řešení třeba $\frac{1}{2}(f_2 - \mathrm{i} f_1) = \sin x$ a $\frac{1}{2}(f_2 + \mathrm{i} f_1) = \cos x$. Řešením tedy je

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x \quad \text{ekvivalentně} \quad y \in [\![\sin x, \cos x]\!].$$

Obdobně řešíme soustavy rovnic, pokud nám vycházejí komplexní vlastní čísla.

Cvičení

1. Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou řešením direfenciální rovnice

$$x(x-1)y' + 2xy = 1.$$

a) $y = \cos x$; b) $y = \mathrm{e}^x$;

c) $y = (x - \ln x)/(x-1)^2$; d) $y = x^2$.

2. Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou řešením diferenciální rovnice

$$yy''' - y'y'' = 0.$$

a) $y = \mathrm{e}^x$; b) $y = x^2$;
c) $y = x$; d) $y = \sin x$;
e) $y = \cos x$; f) $y = 0$.

3. Najděte diferenciální rovnici řádu k tak, aby řešením
a) byla funkce $y = x^2$ a $k = 1$;
b) byly všechny funkce tvaru $y = x - c/x$, kde $c \in \mathbb{R}$ a $k = 1$;
c) byly všechny funkce tvaru $y = c_1x + c_2$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a $k = 2$;
d) byly všechny funkce tvaru $y = c_1x + c_2\,\mathrm{e}^x$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a $k = 2$;
e) byly všechny funkce $y = c\,\mathrm{e}^{c/x}$, kde $c \in \mathbb{R}$ a $k = 1$.

4. V diferenciální rovnici $xy' = y$ proveďte trasnformaci
a) $z = yx^2$; b) $z = \mathrm{e}^y$;
c) $z^2 = y$; d) $z = \sqrt{y}$;
e) $z^2 = y + 1$; f) $z = xy$.

5. Najděte alespoň jedno řešení následujících diferenciálních rovnic
a) $y' + y = 0$; b) $y' + y = \sin x$.
c) $y' + y = 1$; d) $y' + y = 2x + 2$;
e) $y' + y = x\cos x$; f) $y' + y = \mathrm{e}^{3x}$;
g) $y' + y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + 1$.

6. Vyřešte následující diferenciální rovnice (vhodnou metodou se jeví metoda separace proměnných)
a) $y' = 3y$; b) $y\ln y - xy' = 0,\ \ y(1) = 1$;
c) $y\tan x + y' = 0$; d) $y'(1+x^2) = 1 + y^2,\ \ y(0) = 1$;
e) $y\cos x - y'\sin x = 0$; f) $y' = 2\sqrt{y}\ln x,\ \ y(\mathrm{e}) = 1$.

7. Vyřešte následující homogenní rovnice
a) $2x^2y' = x^2 + y^2$; b) $y'xy = x^2 + y^2$;
c) $xy' = y + \sqrt{y^2 + x^2}$; d) $y'x = y + x\,\mathrm{e}^{y/x}$;
e) $y'y(1-x^2) = x(1-y^2),\ \ y(2) = 2$; f) $y'(y-x) = x + y$;
g) $xy' = y\ln(x/y)$; h) $xy' = x + 2y$;
i) $x + yy' = 2y$; j) $(x^4 + y^4)y' = x^3y$.

8. Vyřešte diferenciální rovnice
a) $2y + 3x - 1 + (4y + 6x - 5)y' = 0$; b) $y + 2 = (2x + y - 4)y'$;
c) $xy'' + 2y' + 4xy = 0$;
d) $2yy' - y^2/x = x$ (přemýšlejte o substituci $y(x) = \sqrt{z(x)}$).

9. Najděte všechna řešení následujících lineárních diferenciálních rovnice
a) $y' + 2xy = 4x$; b) $xy' + 2y = 0$;
c) $y'(x\cos y + \sin(2y)) = 1$; d) $y' + y\sqrt{x} = 3x^2$;
e) $y' - 2xy = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$; f) $y' + y/x = 3x$;

g) $3y^2y' = \mathrm{e}^x$;
h) $y' \cos y = 1$;
i) $y' + y/\tan x = \sin x$;
j) $y' + xy = xy^3$;
k) $y' - y = 1$;
l) $y' = (y+1)\sin x$;
m) $(\cos x)y' + (\sin x)y = 1$;
n) $4y'' + 4y' + \lambda y = 0$, kde $\lambda \in (0, 1)$.

10. Řešte následující soustavy lineárních diferenciálních rovnic

a) $\dot{x} = 5x + 2y + \mathrm{e}^t$, $\dot{y} = x - 6y + \mathrm{e}^{2t}$;

b) $\dot{x} = 7x + 6y - \cos t$, $\dot{y} = 2x + 6y - \sin t$;

c) $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = -5x - y$;

d) $\dot{x} = -x + 5y$, $\dot{y} = -x + y + 8t$;

e) $\dot{x} = 5x - 10y - 20z$, $\dot{y} = 5x + 5y + 10z$, $\dot{z} = 2x + 4y + 9z$;

f) $\dot{x} = x - y + z$, $\dot{y} = x + y - z$, $\dot{z} = -y + 2z$;

g) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x + 3y - 4z$, $\dot{z} = x + 2y - z$;

h) $\dot{x} = 3x + y - z$, $\dot{y} = -x + 2y + z$, $\dot{z} = x + y + z$.

11. Řešte následující lineární diferenciální rovnice vyšších řádů

a) $y'' - 9y = 0$;
b) $y'' + 2y' + y = 0$;
c) $y''' - y' = 0$;
d) $y'''' - 5y'' + 4y = 0$;
e) $y''' - y'' = 0$;
f) $y'''' - y''' + y'' = 0$;
g) $y'' - 7y' + 10y = 0$;
h) $y'' - 7y' + 10y = 40$;
i) $y'' - 7y' + 10y = 6\,\mathrm{e}^{2x}$;
j) $3y'' - 4y' = 3\,\mathrm{e}^4$;
k) $y'' - 9y = 0$;
l) $y'' + 2y + y = 0$;
m) $y'' + y' = 0$;
n) $y''' - 13y'' + 12y' = 0$;
o) $y''' - 2y'' = 0$;
p) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

Výsledky

1. a) ne, **b)** ne, **c)** ano, **d)** ne. **2. a)** ano, **b)** ne, **c)** ano, **d)** ano, **e)** ano, **f)** ano. **3. a)** $y' = 2y/x$, **b)** $2x - y - xy' = 0$, **c)** $y'' = 0$, **d)** $y - x(y' - y'') - y'' = 0$, **e)** $y - (x/\ln y')\,\mathrm{e}^{y'} = 0$. **4. a)** $x^2(z' - 2xy) = z/x$, **b)** $z'x - z\ln z = 0$, **c)** $2xz' = z$, **d)** $2xz' = z$, **e)** $2xz' - z^2 = -1$, **f)** $z' = 2z/x$. **5. a)** $y = k\,\mathrm{e}^{-x}$, **b)** $y = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$, **c)** $y = 1 + k\,\mathrm{e}^{-x}$, **d)** $y = 2x - k\,\mathrm{e}^{-x}$, **e)** $y = \frac{1}{2}(x-1)\sin x + \frac{1}{2}x\cos x$, **f)** $y = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{3x}$, **g)** $y = \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^{-x} + 1$. **6. a)** $y = 3x + c$, **b)** $y = 1$, **c)** $y = k\cos x$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, **d)** $y = \tan(\arctan x + \pi/4)$, **e)** $y = c\sin x$, **f)** $y = (x(\ln x - 1) + 1)^2$. **7. a)** $y = x + x/(\frac{1}{2}\ln|x| + c)$; **c)** $y = x\sin(\ln|cx|)\ \ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, **d)** $y = -x\ln(c - \ln|x|)$, **e)** $y^2 = x^2$, **f)** $x^2 + 2xy - y^2 = c$, **h)** $y = cx^2 - x\ \ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, **i)** $(y/x - 1)\,\mathrm{e}^{y/x} = x$, **j)** $y\,\mathrm{e}^{6y^6/x^6} = cx^2$. **8. a)** $\frac{4}{10}(y-x) - \frac{1}{2} - \frac{3}{5}\ln|20y + 30x - 22| = c$, **b)** $y = \frac{1}{2}\sqrt{(x-3)^5} + c\sqrt{x-3} - 2$. **9. a)** $y = c\,\mathrm{e}^{-x^2} + 2$, **b)** $y = c/x$, **c)** $c\,\mathrm{e}^{\sin y} - 2(1 + \sin y) = x$, **d)** $y = c\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{x^3}/3} + 3\sqrt{x^3} - 9/2$, **e)** $y = (x^2 + c)\,\mathrm{e}^{x^2}$, **f)** $y = k/x + x^2$. **10. a)** $x = c_1 2\,\mathrm{e}^{-4t} + c_2\,\mathrm{e}^{-7t} + \frac{7}{40}\,\mathrm{e}^t + \frac{2}{27}\,\mathrm{e}^{2t}$, $y = c_1\,\mathrm{e}^{-4t} + c_2\,\mathrm{e}^{-7t} + \frac{1}{40}\,\mathrm{e}^t + \frac{7}{27}\,\mathrm{e}^{2t}$, **c)** $x = c_1 2\cos 2t + c_2\sin 2t$, $y = c_1(-\cos 2t - 2\sin 2t) + c_2(2\cos 2t - \sin 2t)$. **11. n)** $y = c_1 + c_2\,\mathrm{e}^x + c_3\,\mathrm{e}^{12x}$, **o)** $y = c_1 + c_2 x + c_3\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}x} + c_4\,\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x}$, **p)** $y = c_1\,\mathrm{e}^x + c_2 x\,\mathrm{e}^x + c_3 x^2\,\mathrm{e}^x$.

References

[1] K. Rektorys a spol.: *Přehled užité matematiky,* SNTL, Praha 1968.

[2] V. Jarník: *Diferenciální počet I,II,* ČSAV, Praha 1963.

[3] V. Jarník: *Integrální počet I,II,* ČSAV, Praha 1963.

[4] W. Rudin: *Analýza v reálném a komplexním oboru,* Academia, Praha 1997.

[5] M. Spivak: *Matematičeskij analyz na mnogoobrazijach,* Mir, Moskva 1968.

[6] J. Kurzweil: *Obyčejné diferenciální rovnice,* SNTL, Praha 1978.

[7] M. Greguš, M. Švec, V. Šeda: *Obyčajné diferenciálne rovnice,* Alfa-SNTL, Bratislava 1985.

[8] D. Krupka, *Úvod do analýzy na varietách,* SPN, Praha 1986.

[9] V. Arnold *Obyknovennyje differencialnyje uravnenija,* Nauka, Moskva 1971.

Notations