Vše co jste chtěli vědět o číslech a báli jste se zeptat

Jakub Šotola
Matematické pátky
13. 11. 2009

Historie počítání

- Stačí, nestačí
- Ovce a kameny
- Jedna, dvě, moc
  - Trés – velmi; trois – tři
  - Duál
- Trojné a čtverné číslo
- Arandové – tara-ma-ninta
- Dvojkové, čtyřkové, osmičkové soustavy

Historie počítání

- Novus × novem, Neu × neun
- Dlaň – čtyři nebo pět?
  - Digitus – prst/číslice
- Deset, dvanáct, dvacet, šedesát
  - Tucty, kopy, mandele
  - Eleven – one left, twelwe – two left
  - Quatre-vingts, quatre-vingts-dix
- Řadové číslovky a zlomky

Další jazykové perličky

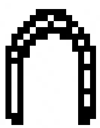
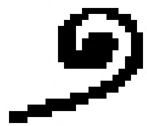
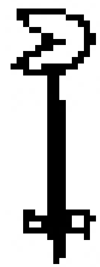
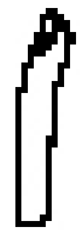
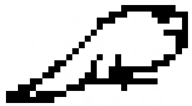
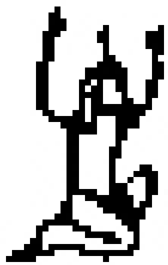
- Kanadští Cimjšanové – různé věci, různé číslovky

Číslo	Počítání jen tak	Ploché předměty	Kulaté předměty	Dlouhé předměty	Lidé	Kánoe	Míry
1	Gyak	Gak	G‘erel	K‘awutskan	K‘al	K‘amaet	K‘al
2	T‘epqat	T‘epqat	Goupel	Gaopskan	T‘epqadal	G‘alpeeltk	Gulbel
3	Guant	Guant	Gutle	Galtskan	Gulal	Galtskantk	Guleont
4	Tqalpq	Tqalpq	Tqalpq	Tqaapskan	Tqalpqdal	Tqalpqsk	Tqalpqalont
5	Ketone	Ketone	Ketone	K‘etoentskan	Keenecal	Tetoonsk	Ketonsilont
6	K‘alt	K‘alt	K‘alt	K‘aoltskan	K‘aldal	K‘altk	K‘aldelont
7	T‘epqalt	T‘epqalt	T‘epqalt	T‘epqaltskan	T‘epqaldal	T‘epqaltk	T‘epqaldelont
8	Guandalt	Yuktalt	Yuktalt	Ek‘tlaedskan	Yuktiedal	Yuktalk	Yuktaldelont
9	Ketemac	Ketemac	Ketemac	Ketemaetskan	Ketemacal	Ketemack	Ketemasilont
10	Gy‘ap	Gy‘ap	Kpeel	Kpeetskan	Kpal	Gy‘apsk	Kpeont

Číselné soustavy

- Písmo – číslice
  - Slovo – číslo, písmeno – číslice
- Dělení
  - Podle (domnělé) země původu
  - Poziční a nepoziční
  - Podle základu

Egyptské číslice

						
1	10	100	1000	10000	100000	10^6

||||∩∩ = 24

- Chaoticky, do oválu
- Princip spousty primitivních soustav

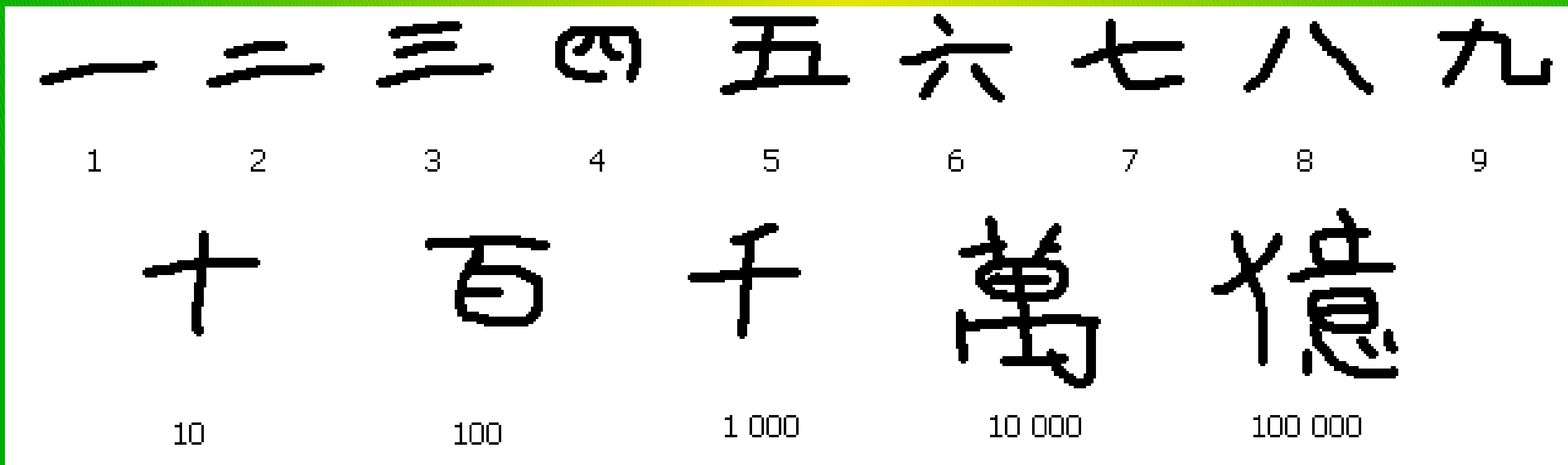
Římské číslice

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

MDCCCCLXXXXVIIII = MCMXCIX = 1999

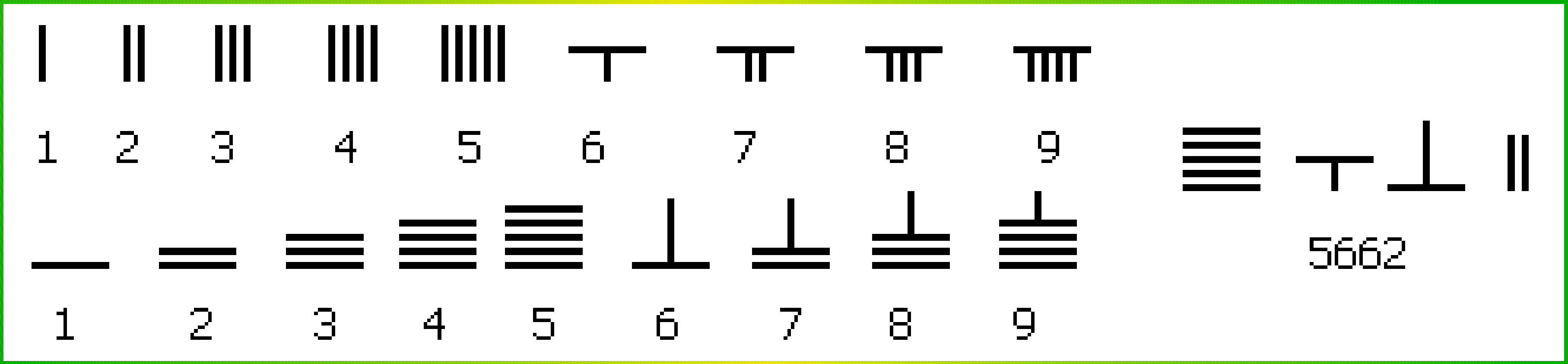
- Odčítací princip
  - Až ve středověku
  - Nejednoznačný
  - Nebo složitá pravidla
- Unikátní, ale nejhorší

Čínské číslice



- Základní a řádové číslice
- Řády sestupně
- „Pseudopoziční“ soustava

Čínské číslice podruhé



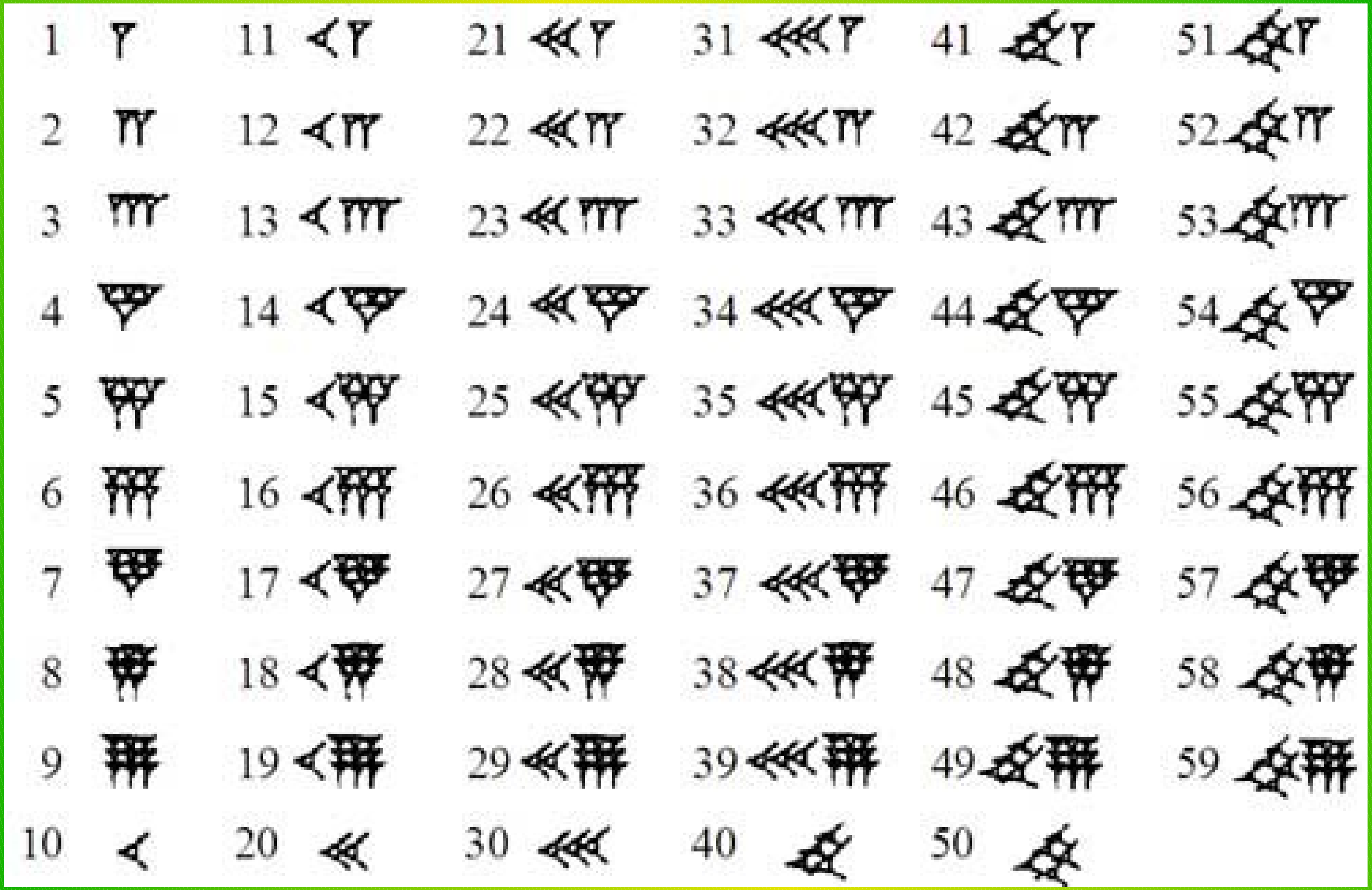
- Dvě sady číslic
- Na střídačku
- Poziční, bez nuly
- Tyčové počítadlo
- Vědecké účely

Poziční × nepoziční

	Nepoziční	Čínský pseudopoziční	Poziční
Písemné počty	neumožňuje	umožňuje	umožňuje
Desetinná čísla	spíše neumožňuje	nepřímo umožňuje	umožňuje
Zápis libovolně velkých čísel	neumožňuje	neumožňuje	umožňuje
Délka (celého) čísla vs. délka zápisu	různá	„přímá úměra“	„přímá úměra“
Potřeba nuly	vůbec	vůbec	poměrně nutná

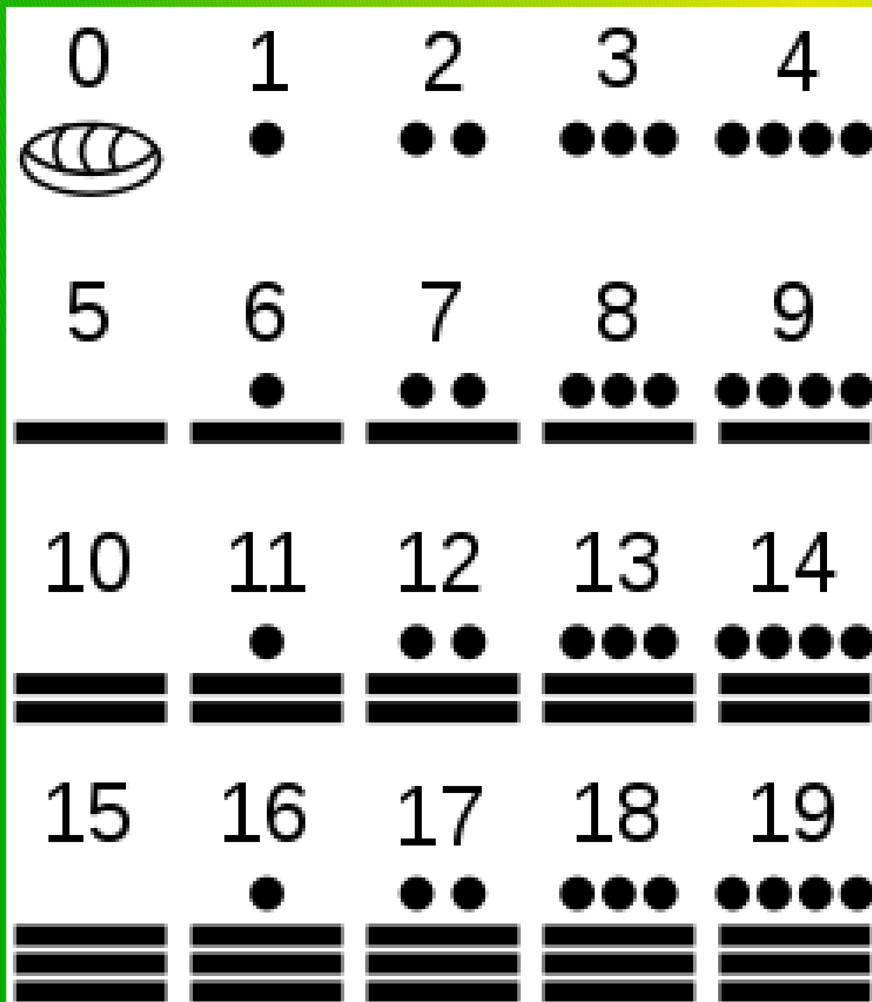
- Egyptské číslice umožňují písemné sčítání

Sumerské číslice



- První poziční

Mayské číslice



- Mají nulu!

Arabské číslice

- Původně bez nuly
- Mohendžo-Daro
- Naprosto dominantní
- Několik verzí
- Abstraktní

Jiné soustavy

1	2	3	4	5
. – – – –	. . – – –	. . . – –	. . . . –	. . . . .
6	7	8	9	0
–	– – . . .	– – – . .	– – – – .	– – – – –

- Morseovka
- „Kupecké“
  - Tucet a veletucet
  - Kopa a velekopa
  - Mandel
- Ploty
- Stupně, minuty, vteřiny
- Další jednotky

Jiné znaky

- Zlomková čára – v Egyptě znak úst
- et -> +, m -> –
- 1557 Robert Record – „=“
  - Do té doby „α“ nebo „æ“ jako aequolis
- Záporná čísla
  - Čína – červeně
  - Indie – do kruhu
  - Arábie – tečka nad číslem

Základy soustav

- Zejména u pozičních
- Počet číslic
- Řád číslic
- Arabské a čínské – desítková

$$5\,662 = 5\cdot 1\,000 + 6\cdot 100 + 6\cdot 10 + 2 = \ldots$$
$$\ldots = 5\cdot 10^3 + 6\cdot 10^2 + 6\cdot 10^1 + 2\cdot 10^0$$

Základy soustav

- Mayové – dvacítková

$$5 \cdot 20^3 + 6 \cdot 20^2 + 6 \cdot 20 + 2 = \dots$$

$$\dots = 5 \cdot 8\,000 + 6 \cdot 400 + 120 + 2 = 42\,522$$

- Sumerové – šedesátková

$$5 \cdot 60^3 + 6 \cdot 60^2 + 6 \cdot 60 + 2 = \dots$$

$$\dots = 5 \cdot 216\,000 + 6 \cdot 3\,600 + 362 = 1\,101\,962$$

- Osmičková

$$5 \cdot 8^3 + 6 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8 + 2 = \dots$$

$$\dots = 5 \cdot 512 + 6 \cdot 64 + 50 = 2\,994$$

Základy soustav

- Z desítkové do dvojkové
- Dělení se zbytkem
- $(5662)_{10} = (1011000011110)_2$

$$5662 : 2 = 2831 (0)$$
$$2831 : 2 = 1415 (1)$$
$$1415 : 2 = 707 (1)$$
$$707 : 2 = 353 (1)$$
$$353 : 2 = 176 (1)$$
$$176 : 2 = 88 (0)$$
$$88 : 2 = 44 (0)$$
$$44 : 2 = 22 (0)$$
$$22 : 2 = 11 (0)$$
$$11 : 2 = 5 (1)$$
$$5 : 2 = 2 (1)$$
$$2 : 2 = 1 (0)$$
$$1 : 2 = 0 (1)$$

Jak ten převod funguje?

$$(8^4+3\cdot8^3+3\cdot8+6):8=8^3+3\cdot8^2+3(6)$$
$$(8^3+3\cdot8^2+3):8=8^2+3\cdot8(3)$$
$$(8^2+3\cdot8):8=8+3(0)$$
$$(8+3):8=1(3)$$
$$1:8=0(1)$$

- A = 10, B = 11, …, F = 15
- $(5662)_{10}=(161E)_{16}$

Kouzlo

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Základy nepozičních soustav

- Nemá takový význam
- Římské – dva základy – 10 a 5
- Egyptské – deset
- Ploty – pět

Využití různých soustav

- Dvojková – počítače
  - Bity a bajty
- Dvanáctková – dělitelnost
- Šestnáctková – barvy
- Římské číslice – stylové

- Jsou 10 druhy lidí ve vesmíru – ti, kteří znají dvojkovou soustavu, a ti, kteří ne.

Číselné třídy

- Základní $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C, I \subset C$
- Doplňkové $\bar{Q}, \bar{Q} \cap R, J \supset (R \setminus \bar{Q}), C \setminus \bar{Q}, P$
- Zbytkové třídy modulo *m* Z_m

Přirozená čísla

- S nulou nebo bez?

Značení	Význam
N_0	Množina v. přir. č. včetně nuly
N	Množina v. přir. č. - někdy bez, někdy s nulou
N*	Množina v. přir. č. bez nuly

- Fermatova věta
  - 1637 – Pierre de Fermat, bez důkazu
  - 1995 – dokázal Andrew Wiles

Velká přirozená čísla

- Miliarda × billion

Milión	10^{6}
Miliarda	$10^{9}=10^{6+3}$
Bilión	$10^{12}=10^{2\cdot 6}$
Biliarda	$10^{15}=10^{2\cdot 6+3}$
Trilión	$10^{18}=10^{3\cdot 6}$
Kvadrilión	$10^{24}=10^{4\cdot 6}$
Centilión	$10^{600}=10^{100\cdot 6}$

Velká přirozená čísla

- Miliarda korun
  - 1850 km vysoká
  - 20 000 km široká
  - 3 600 tun těžká
- Quaflanova odměna
  - 36 893 488 147 419 103 231 obilných zrn
- Karty – počet kombinací (permutací)
  - $52! > 8 \cdot 10^{67}$

Magická čísla

- Dokonalá č. – součet dělitelů
  - 6, 28, šestnácté – 1 326 cifer
- Přátelská č. – dvojice
  - Deficitní a přebytkové
  - Nejmenší – 220 a 284
- 142 857 – násobit 2 až 7
- 102 564 – násobit 4
  - Pro 3: 1 034 482 758 620 689 655 172 413 793
  - perioda $n/(10n-1)$

Magická čísla

- Čtverce
- Pyramidální č.
  - Suma čtverců
  - 4 900 – čtverec i pyramida
- 16 a 18
  - Čtverec a dvojčtverec
  - Obsah = obvod
  - 17 mezi nimi!

Mystická čísla

1	Symbol jednoty
2	Ženský princip
3	Mužský princip
4	Počet živlů,
5	Pentagram
6	Hexagram
7	Úplnost, dokonalost
8	Dva kruhy
10	Desatero
11	Symbol hříchu
12	Zvěrokruh
13	Triskaidekafobie
17	Nešťastné v Itálii
108	Svaté číslo buddhismu
666	Číslo šelmy

Prvočísla

- Vzorec?
- Eratosthénovo síto
  - http://www.hbmeyer.de/eratclass.htm
- Zkouška dělitelnosti
- G. H. Hardy – 50 847 478 prvočísel < mld.
- Největší nalezené $2^{43,112,609}-1$
- Nekonečně mnoho
- 41, …, 1601

Typy prvočísel

- Dvojčata
  - 11 a 13
  - Největší nalezená $65\,516\,468\,355 \cdot 2^{333\,333} \pm 1$
  - Nekonečno?
- Mersennova p.
  - Tvaru $2^p - 1$
  - Snadné prověření
  - Největší je Mersennovo

Typy prvočísel

- Fermatova p.
  - Tvaru: $2^{2^n}+1$
  - Pět známých: 3, 5, 17, 257, 65 537
  - Konstrukce pravidelných *m*-úhelníků
- Germainové p.
  - 2*p* + 1 taky prvočíslo
  - 2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, …
  - Největší nalezené: $620\,366\,307\,356\,565 \cdot 2^{253\,824}-1$
  - Nekonečno?

Typy prvočísel

- Faktoriální p.
  - Tvaru: $n! \pm 1$
  - $n!+2, \ldots, n!+n$ jsou složená čísla
- Primoriální p.
  - Tvaru: $p\# \pm 1$
  - $p\# + 2, \ldots, p\# + q - 1$ jsou složená čísla
- Sexy p.
  - Dvojice lišící se o 6
  - 5 a 11, 7 a 13, 11 a 17, …, 191 a 197, …

Goldbachova hypotéza

- 1742 v korespodenci s Eulerem
- „Každé sudé číslo větší než dvě může být zapsáno jako součet dvou prvočísel."
- Ekviv.: „Každé přirozené číslo větší než pět může být zapsáno jako součet tří prvočísel ."
- Čeká na důkaz

Reálná čísla

- Iracionální až od 17. stol.
  - Blaise Pascal!
- $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \varphi$
- Spojitě uspořádaná
- Racionální č. v každém intervalu
- Problém s vyčíslením
  - Počítače

Zlatý řez

- φ – na počest Feidia
- Dělení úsečky – $a/b=(a+b)/a=\varphi$
- Výpočet: $\frac{b\varphi}{b}=\frac{b\varphi+b}{b\varphi}\Rightarrow\varphi=\frac{\varphi+1}{\varphi}\Rightarrow\varphi^2-\varphi-1=0$
- Ideál krásy
- Zlatý obdélník
- Fibonacciho posloupnost
- Taky τ jako „tome“ – řez

Algebraická čísla

- Kořen rovnice $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,\ n \in N$
- Racionální čísla a odmocniny
- Zbytek – transcendentní
  - Ludolfovo číslo
  - Eulerovo číslo
  - Liouvilleova konstanta

$$\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0{,}110\,001\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,000\ldots$$

3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 88...

- Nejstarší známé transcendentní č.
- Aproximace: 22/7, 355/113
- Ludolf van Ceulen – 35 desetinných míst

Mám, ó bože, ó dobrý
pamatovat si takový cifer řad.
Velký slovutný Archimédes
pomáhej trápenému.
Dej mu moc nazpaměť nechť odříká
ty slavné, dnes ale tak protivné nám,
ach, číslice Ludolfovy!

Komplexní čísla

- Al-Chwárizmí – neřešitelné kvadrce.
- Girolamo Cardano – odmocnina ze záp. č.
- Cartesius – imaginární č.
- Euler, Cauchy, Gauss

Komplexní čísla

- Imaginární jednotka $i^2 = -1$
- Gaussova komplexní rovina

$$(a+ib)+(c+id)=a+c+i(b+d)$$

$$(a+ib)\times(c+id)=ac+ibc+ida+i^2bd=\ldots$$
$$\ldots=ac-bd+i(bc+da)$$

$$i^3=i^2\cdot i=-i$$
$$i^4=i^2\cdot i^2=1$$
$$i^{4\mathrm{n}+k}=i^4\cdot\ldots\cdot i^4\cdot i^k=i^k$$

$$|(a+ib)|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Využití komplexních čísel

- Zlatá věta algebry
  - „Každá algebraická rovnice stupně alespoň jedna s komplexními koeficienty má alespoň jeden kořen v množině komplexních čísel.“
  - Algebraická čísla na celém *C*
- Zjednodušení reálných výpočtů

Dělení nulou

- Na reálných číslech nelze

$$0 \cdot 1 = 0 \quad /:0 \qquad 0 \cdot 2 = 0 \quad /:0$$

$$1 = \frac{0}{0} \qquad 2 = \frac{0}{0} \qquad 2 = \frac{0}{0} = 1$$

$$4a = 6b$$
$$14a - 10a = 21b - 15b \quad / -14a / +15b$$
$$15b - 10a = 21b - 14a$$
$$5(3b - 2a) = 7(3b - 2a) \quad /:(3b - 2a)$$
$$5 = 7$$

Dělení nulou

- Na rozšířené R lze

$$\forall x \in R: x < \infty,\quad x > -\infty,\quad \pm\infty + x = \pm\infty,$$

$$\forall x \in R^+: \ \frac{x}{0} = \infty$$

$$\forall x \in R^-: \ \frac{x}{0} = -\infty$$

$$\forall x \in R: \ \frac{x}{\infty} = 0$$

$$\forall x \in R \setminus \{0\}: x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$$

$$\infty/\infty, 0 \cdot \infty, 0/0$$

Kardinální čísla

- V lingvistice počet
- V matice – „velikost množiny“ – mohutnost
- Přirozená?
  - A co nula?
  - A co nekonečno?!
- Rozšířit o ∞ ?
  - Více nekonečen!
  - Přiřazování

Kardinální čísla

- N je stejně mohutné jako Z
  - $N \to Z:\ 1 \to 0,\ 2 \to 1,\ 3 \to -1 \ldots$
- R je stejně mohutné jako $(-\pi/2, \pi/2)$
  - Tangens
- R je mohutnější než N
- $|N| = \aleph_0$
- Spočetné m. - $N, Z, Q, \bar{Q}$

Kardinální čísla

- Sčítání: $|A|+|B|=|(A\times\{0\})\cup(B\times\{1\})|$
- Násobení: $|A|\cdot|B|=|A\times B|$

$0+|A|=|\emptyset\cup A|=|A|$

$0\cdot|A|=|\emptyset\times A|=|\emptyset|=0$

$\aleph_0+k=\aleph_0$

$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$

$\aleph_0\cdot k=\aleph_0,\ \ k\neq 0$

$\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$

Hypotéza kontinua

- 1882, Georg Cantor
  - „Množina všech reálných čísel je nespočetná množina s nejmenší mohutností.“
- 1900, Hilbertův seznam
- 1940, Kurt Gödel – nelze vyvrátit
- 1963, Paul Cohen – nelze dokázat
- $c=|R|=\aleph_1$