Domácí úkol č. 2

Zadáno: 25. 4. 2014, odevzdat do: 16. 5. 2014.

1. Pomocí Taylorova (resp. Maclurinova) polynomu vypočtěte přibližnou hodnotu Eulerova čísla e tak, aby se shodovala s jeho skutečnou hodnotou $(2,71828\ldots)$ alespoň ve třech desetinných místech. Jaký stupeň polynomu je k tomu třeba? (Tip: funkce $f(x) = e^x$, střed v 0.)

   Nejprve potřebujeme najít Maclaurinův polynom funkce e^x. Derivace této funkce jsou všechny stejné a ve středu 0 mají tedy všechny shodnou hodnotu 1.
   V polynomu se tak projeví pouze koeficienty a bude mít podobu:

   $$T_{n,0}(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$$

   My chceme nalézt hodnotu čísla e, tedy hodnotu funkce e^x v bodě 1 (e^1). Dosazujme proto do různých stupňů Maclaurinova polynomu za x jedničku.

   $$\begin{aligned}
   &T_{0,0}(1) = 1\\
   &T_{1,0}(1) = 1 + \frac{1}{1!}1 = 2\\
   &T_{2,0}(1) = 1 + \frac{1}{1!}1 + \frac{1}{2!}1^2 = 2,5\\
   &T_{3,0}(1) = 1 + \frac{1}{1!}1 + \frac{1}{2!}1^2 + \frac{1}{3!}1^3 \doteq 2,66667\\
   &T_{4,0}(1) = 1 + \frac{1}{1!}1 + \frac{1}{2!}1^2 + \frac{1}{3!}1^3 + \frac{1}{4!}1^4 \doteq 2,70833\\
   &T_{5,0}(1) = 1 + \frac{1}{1!}1 + \frac{1}{2!}1^2 + \frac{1}{3!}1^3 + \frac{1}{4!}1^4 + \frac{1}{5!}1^5 \doteq 2,71637\\
   &T_{6,0}(1) = 1 + \frac{1}{1!}1 + \frac{1}{2!}1^2 + \frac{1}{3!}1^3 + \frac{1}{4!}1^4 + \frac{1}{5!}1^5 + \frac{1}{6!}1^6 \doteq 2,\underline{718}05
   \end{aligned}$$

   Požadovaná hodnota je tedy 2,7181 a stupeň 6.

2. Nalezněte reálná čísla a a b taková, aby jejich součet byl 2 a jejich součin byl co největší.

   Podle zadání platí $a + b = 2$. Máme nalézt extrém funkce $s(a, b) = a \cdot b$. My ale umíme nalézt pouze extrémy funkcí jedné proměnné. Vyjádřeme proto $a = 2 - b$ a dosaďme do funkce s. Dostaneme:

   $$s(b) = (2 - b) \cdot b.$$

   Tak jsme získali funkci jedné proměnné a můžeme se pustit do hledání extrému. Zderivujme:

   $$s'(b) = ((2 - b)b)' = (2b - b^2)' = 2 - 2b.$$

První derivace funkce s bude tedy nulová v bodě $b = 1$ (řešení rovnice $2 - 2b = 0$).
Ověřme, že se jedná o požadované maximum – vypočítejme druhou derivaci funkce s v bodě 1 (bod podezřelý z extrému).

$$s''(1) = (2 - 2b)'|_{b=1} = -2$$

Druhá derivace je (nejen) v bodě 1 záporná a proto se opravdu jedná o maximum.
Dopočítejme ještě $a = 2 - 1 = 1$. Hledané hodnoty jsou tedy $a = b = 1$.

3. Vyšetřete průběh následujících funkcí:

   (a) $f(x) = (x + 1)^2(x - 3)^2$

   - Definiční obor je celé $\mathbb{R}$.
   - Limity v „krajních“ bodech definičního oboru tedy splývají s limitami v nevlastních bodech.

     $$\lim_{x\to\infty}(x + 1)^2(x - 3)^2 = (\infty + 1)^2 \cdot (\infty + 3)^2 = \infty$$

     $$\lim_{x\to-\infty}(x + 1)^2(x - 3)^2 = (-\infty + 1)^2 \cdot (-\infty + 3)^2 = \infty$$

   - Průsečík s osou y: dosadíme za x 0 a dostaneme $f(0) = (0 + 1)^2(0 - 3)^2 = 9$. Osu y tedy graf f protíná v bodě $P_y = [0, 9]$.
     Průsečík s osou x: řešme rovnici $0 = (x + 1)^2(x - 3)^2$. Protože součin je nulový právě tehdy když se alespoň jeden z činitleů rovná nule dostáváme řešení $x_1 = -1$ a $x_2 = 3$ (z rovnic $x+1 = 0$, resp. $x-3 = 0$). Osu x tedy graf f protíná v bodech $P_{x,1} = [-1, 0]$ a $P_{x,2} = [3, 0]$.
   - $f(-x) = (-x + 1)^2(-x - 3)$, což se (celkem očividně) nerovná ani $f(x)$ ani $-f(x) = -(x+1)^2(x+3)^2$. Takže funkce f není ani sudá ani lichá.
   - $f'(x) = ((x+1)^2(x-3)^2)' = 2(x+1)(x-3)^2 + (x+1)^2 \cdot 2(x-3)$
     – Nalezněme kritické body (neboli stacionární body neboli body podezřelé z extrému), tj. vyřešme rovnici $f'(x) = 0$.

     $$\begin{aligned} 2(x + 1)(x - 3)^2 + (x + 1)^2 \cdot 2(x - 3) &= 0 \\ 2(x + 1)(x - 3)(x - 3 + x + 1) &= 0 \\ 2(x + 1)(x - 3)(2x - 2) &= 0 \\ 4(x + 1)(x - 3)(x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

     Takže řešení rovnice (a kritické body) jsou $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ a $x_3 = 3$.
     – Nyní řešme, kdy je první derivace kladná (a kdy záporná). Stejnými úpravami jako v předchozím bodě dostaneme:

     $$4(x + 1)(x - 3)(x - 1) > 0.$$

     Řešme tuto nerovnici tabulkou:

	$(-\infty,-1)$	(-1,1)	(1,3)	$(3,\infty)$
(x+1)	-	+	+	+
(x-3)	-	-	-	+
(x-1)	-	-	+	+
$\sum$	-	+	-	+
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Šipky pod tabulkou už naznačují monotónnost – kde je derivace kladná, tam funkce roste ($\nearrow$) a kde je záporná tam klesá ($\searrow$). Funkce f tedy roste na intervalech $(-1,1)$ a $(3,\infty)$ a klesá na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(1,3)$.

– Z tabulky můžeme také vyčíst, které z kritických bodů jsou nebo nejsou extrémy. V bodě -1 se f mění z klesající na rostoucí, nabývá zde tedy lokálního minima. Dohromady dostáváme:
lok. minimum v bodě $x_1 = -1$ s hodnotou $f(-1) = 0$,
lok. maximum v bodě $x_2 = 1$ s hodnotou $f(1) = 16$,
lok. minimum v bodě $x_3 = 3$ s hodnotou $f(3) = 0$.

- $f''(x) = 4((x-3)(x+1) + (x+1)(x-1) + (x-1)(x-3))$

  – Řešme nerovnici $f''(x) > 0$:

$$4((x-3)(x+1) + (x+1)(x-1) + (x-1)(x-3)) > 0$$
$$x^2 - 2x - 3 + x^2 - 1 + x^2 - 4x + 3 > 0$$
$$3x^2 - 6x - 1 > 0$$

Pomocí diskriminantu nalezneme kořeny kvadratického polynomu z poslední nerovnice. Jsou jimi: $x_1 = 1 - 2/3 \cdot \sqrt{3}$ a $x_2 = 1 + 2/3 \cdot \sqrt{3}$. Nerovnici lze tedy upravit takto:

$$\left(x - 1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)\left(x - 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) > 0.$$

Řešme ji opět tabulkou.

	$(-\infty, x_1)$	(x_1, x_2)	(x_2, ∞)
$(x - x_1)$	-	+	+
$(x - x_2)$	-	-	+
$\sum$	+	-	+
	$\smile$	$\frown$	$\smile$

Obloučky pod tabulkou naznačují konvexnost ($\smile$) a konkávnost ($\frown$). Funkce f je tedy konvexní na intervalech $(-\infty, 1 - 2/3 \cdot \sqrt{3})$ a $(1 + 2/3 \cdot \sqrt{3}, \infty)$ a konkávní na intervalu $(1 - 2/3 \cdot \sqrt{3}, 1 + 2/3 \cdot \sqrt{3})$.

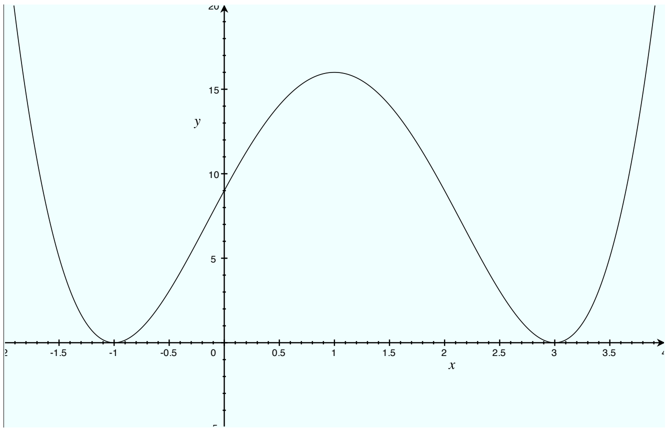
– Protože se v bodech $1 - 2/3 \cdot \sqrt{3}$ a $1 + 2/3 \cdot \sqrt{3}$ funkce mění z konvexní na konkávní nebo naopak, můžeme říct, že tyto body jsou inflexní. $f(1 - 2/3 \cdot \sqrt{3}) = f(1 + 2/3 \cdot \sqrt{3}) = 64/9$

- Asymptoty bez směrnice nejsou.

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2(x-3)^2}{x} = \infty$$

$$k_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2(x-3)^2}{x} = -\infty$$

Směrnice vyšly nekonečné, takže ani asymptoty se směrnicemi graf této funkce nemá.



(b) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$

- Definiční obor je celé $\mathbb{R}$.
- Limity v „krajních“ bodech definičního oboru opět splývají s limitami v nevlastních bodech.

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 12x^2 + 36x = \lim_{x\to\infty} x(x-6)^2 = \infty \cdot (\infty - 6)^2 = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 - 12x^2 + 36x = \lim_{x\to-\infty} x(x-6)^2 = -\infty \cdot (-\infty - 6)^2 = -\infty$$

- Průsečík s osou y: $f(0) = 0$, $P_y = [0, 0]$.
  Průsečíky s osou x:

$$x^3 - 12x^2 + 36x = 0$$
$$x(x-6)^2 = 0$$

Řešením rovnice je $x_1 = 0$ a$x_2 = 6$. $P_{x,1} = [0, 0]$ a $P_{x,2} = [6, 0]$

- $f(-x) = -x^3 - 12x^2 - 36x$, což se nerovná ani $f(x)$, ani $-f(x) = -x^3 + 12x^2 - 36x$, takže f není ani sudá, ani lichá.
- $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$
  - Řešme rovnici $f'(x) = 0$:

$$3x^2 - 24x + 36 = 0$$
$$x^2 - 8x + 12 = 0$$
$$(x-6)(x-2) = 0$$

Kritické body jsou tedy $x_1 = 2$ a $x_2 = 6$.

- Řešme nyní nerovnici $f'(x) > 0$ neboli $(x-6)(x-2) > 0$.

	$(-\infty, 2)$	$(2, 6)$	$(6, \infty)$
$(x-2)$	-	+	+
$(x-6)$	-	-	+
$\sum$	+	-	+
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

- V bodě $x = 2$ má tedy f lok. maximum s hodnotou $f(2) = 32$ a v bodě $x = 6$ má f lok. minimum s hodnotou $f(6) = 0$.

• $f''(x) = 6x - 24$

- Řešme nerovnici $f''(x) > 0$:

$$\begin{aligned} 6x - 24 &> 0 \\ 6x &> 24 \\ x &> 4. \end{aligned}$$

Na intervalu $(4, \infty)$ je tedy f konvexní a na intervalu $(-\infty, 4)$ je konkávní.

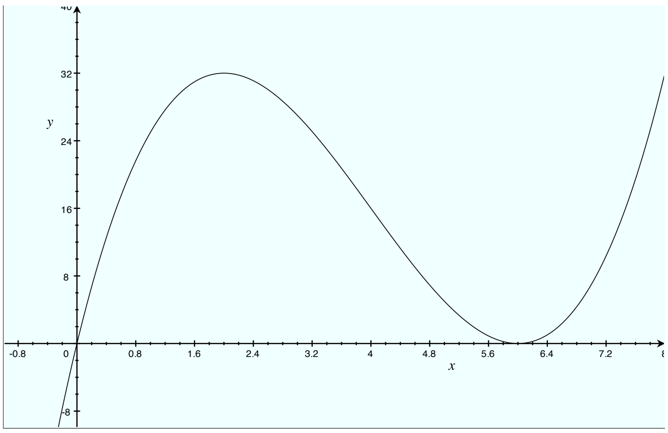
- Bod $x = 4$ je inflexní s hodnotou $f(4) = 16$.

• Asymptoty bez směrnice nejsou.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 12x^2 + 36x}{x} = \lim_{x\to\infty} x^2 - 12x + 36 = \lim_{x\to\infty} (x-6)^2 = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 12x^2 + 36x}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^2 - 12x + 36 = \lim_{x\to-\infty} (x-6)^2 = \infty$$

Takže ani asypmtoty se směrnicí nejsou.



(c) $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x+1}$

• Jmenovatel musí být nenulový, takže musí platit $x+1 \neq 0$ neboli $x \neq -1$, definiční obor je tedy $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- Vypočtěme jednostranné limity v bodě -1.

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-4x+4}{x+1} = 9 \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1} = \infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-4x+4}{x+1} = 9 \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty$$

- Vypočtěme limity v nevlastních bodech.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-4x+4}{x+1} = \infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-4x+4}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{(x-2)^2}{x+1} = -\infty$$

- Průsečík s osou y: $f(0) = -4$, $P_y = [0, -4]$.
  Průsečíky s osou x:

$$\begin{aligned} \frac{x^2-4x+4}{x+1} &= 0 \\ (x-2)^2 &= 0 \end{aligned}$$

  Řešením je $x = 2$ a průsečík je tedy jediný $P_x = [2, 0]$.
- Definiční obor není „symsetrický“ a proto f nemůže být ani sudá, ani lichá.
- $f'(x) = \frac{(2x-4)(x+1)-(x^2-4x+4)}{(x+1)^2}$
  - Řešme opět rovnici $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{(2x-4)(x+1)-(x^2-4x+4)}{(x+1)^2} &= 0 \\ 2(x-2)(x+1)-(x-2)^2 &= 0 \\ (x-2)(2x+2-x+2) &= 0 \\ (x-2)(x+4) &= 0 \end{aligned}$$

    Kritické body tedy jsou $x_1 = -4$ a $x_2 = 2$.
  - Řešme nyní nerovnici $f'(x) > 0$ neboli

$$\frac{(x-2)(x+4)}{(x+1)^2} > 0.$$

    Tady se jmenovatele jen tak zbavti nemůžeme – mohl by zasáhnout do znaménka. V našem případě to ale přesto neudělá, protože je vždy kladný (díky sudé mocnině). Ale také je třeba nezapomenou, že jak f tak f' nejsou definovány v bodě $x = -1$, což je vhodné zohlednit i v tabulce.

	$(-\infty,-4)$	(-4,-1)	(-1,2)	$(2,\infty)$
$(x-2)$	-	-	-	+
$(x+4)$	-	+	+	+
$\sum$	+	-	-	+
	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Nutno podotknout, že kvůli „problému“ v bodě $x = -1$ funkce f klesá na intervalech (-4,-1) a (-1,2), ale nikoli na intervalu (-4,2)!

- V bodě $x = -4$ má f lok. maximum s hodnotou $f(-4) = -12$.
  V bodě $x = 2$ má f lok. minimum s hodnotou $f(2) = 0$.

- $f''(x) = \frac{((x-4)+(x-2))(x+1)^2-(x-4)(x-2)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$
  - Řešme nerovnici $f''(x) > 0$.

$$\frac{((x+4)+(x-2))(x+1)^2 - (x+4)(x-2)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} > 0$$

$$\frac{(2x+2)(x+1) - 2(x+4)(x-2)}{(x+1)^3} > 0$$

$$\frac{(x+1)(x+1) - (x+4)(x-2)}{(x+1)^3} > 0$$

$$\frac{9}{(x+1)^3} > 0$$

Čitatel je kladný vždy, jmenovatel bude kladný pro $x+1 > 0$, tedy pro $x > -1$. Na intervalu $(-1,\infty)$ tak bude funkce konvexní, zatímco na intervalu $(-\infty,-1)$ konkávní.

  - Funkce f nemá inflexní bod, protože v bodě $x = -1$, kde se mění z konvexní na konkávní není definovaná (a ani její druhá derivace).

- Asymptotu bez směrnice má f v bodě $x = -1$, a to oboustrannou (do kladného i záporného nekonečna).

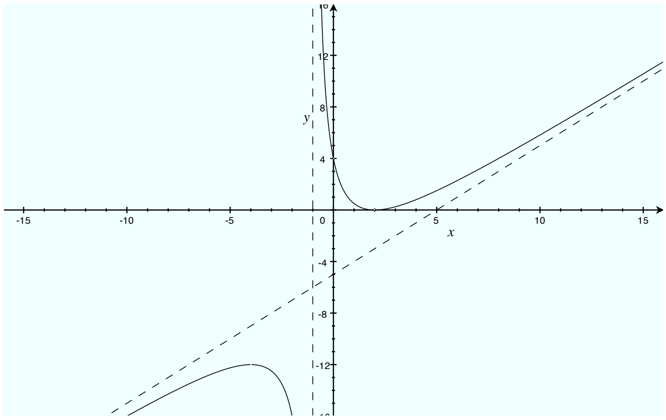
$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-4x+4}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+4}{x^2+x} = 1$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2-4x+4}{x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x+4}{x^2+x} = 1$$

$$q_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+4}{x+1} - 1\cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x+4}{x+1} = -5$$

$$q_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x+4}{x+1} - 1\cdot x = \lim_{x\to-\infty} \frac{-5x+4}{x+1} = -5$$

Asymptota se směrnicí je tedy jediná (a opět obousměrná) – $y = x - 5$.



(d) $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

- Definiční obor je $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Jednostranné limity počítáme v bodě $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = 8 \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = 8 \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

- I v tomto případě spočtěme limity v nevlastních bodech.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = -\infty$$

- Průsečík s y: $f(0) = -1$, $P_y = [0, -1]$.
  Průsečíky s x:

$$\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = 0$$
$$(x+1)^3 = 0$$

  Řešením je $x = -1$, $P_x = [-1, 0]$.
- Definiční obor není „symetrický" – f není ani sudá, ani lichá.
- $f'(x) = \frac{3(x+1)^2(x-1)^2-(x+1)^3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$
  - Řešme rovnici $f'(x) = 0$.

$$\frac{3(x+1)^2(x-1)^2 - (x+1)^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = 0$$
$$\frac{(x+1)^2(3(x-1) - 2(x+1))}{(x-1)^3} = 0$$
$$(x+1)^2(x-5) = 0$$

Kritické body jsou tedy $x_1 = -1$ a $x_2 = 5$.

– Řešme nyní nerovnici $f'(x) > 0$ neboli

$$\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3} > 0.$$

Člen $(x+1)^2$ je kladný vždy, do tabulky tedy vstoupí pouze $x-5$ a $x-1$ (resp. $(x-1)^3$).

	$(-\infty, 1)$	(1,5)	$(5, \infty)$
$x-5$	-	-	+
$x-1$	-	+	+
$\sum$	+	-	+
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

– V bodě $x = 5$ má f lok. minimum s hodnotou $f(5) = 27/2$. V bodě $x = 1$ extrém není, protože tam není definovaná ani funkce f ani f'.
V (kritickém) bodě $x = -1$ není extrém protože se tam nemění znaménko f' (f se nemění z rostoucí na klesající).

- $f''(x) = \frac{(2(x+1)(x-5)+(x+1)^2)(x-1)^3-(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^6}$
  – Řešme nerovnici $f'' > 0$.

$$\frac{(2(x+1)(x-5)+(x+1)^2)(x-1)^3-(x+1)^2(x-5)\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} > 0$$
$$\frac{(x+1)((2(x-5)+(x+1))(x-1)-3(x+1)(x-5))}{(x-1)^4} > 0$$
$$\frac{24(x+1)}{(x-1)^4} > 0$$

Jmenovatel a 24 jsou vždy kladné, takže musí platit $(x+1) > 0$. Funkce f je tedy konvexní na intervalech $(-1, 1)$ a $(1, \infty)$ (v bodě $x = 1$ není definovaná ani f, ani f'') a konkávní na intervalu $(-\infty, -1)$.

– Bod $x = -1$ je inflexní s hodnotou $f(-1) = 0$.

- Asymptota bez směrnice je jediná (a jednostranná, pro $+\infty$), a to $x = 1$.

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2} = 1$$

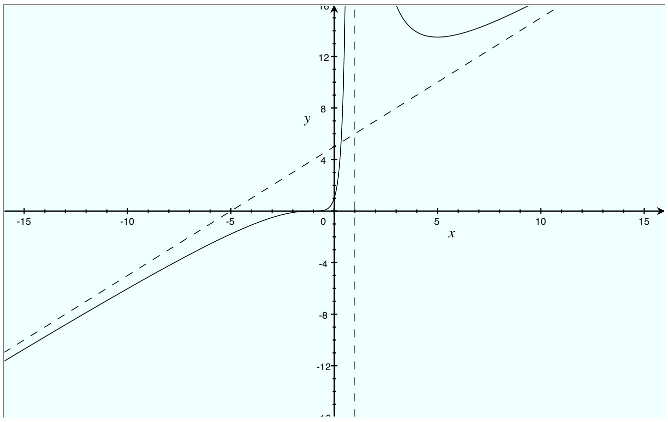
$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2} = 1$$

$$q_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+2x+1}{(x-1)^2} = 5$$

$$q_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2+2x+1}{(x-1)^2} = 5$$

Asymptota se směrnicí je taky jediná (ale obousměrná), a to $y = x + 5$.

- V grafu si povšimněte, že na okolí inflexního bodu je funkce „skoro vodorovná“ To díky skutečnosti, že inflexní bod je zároveň bodem kritickým (1. derivace v něm je nulová).



(e) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

- Definiční obor je celé $\mathbb{R}$.
- Takže limity v krajních bodech opět splývají s těmi v bodech nevlastních.

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = e^{-\infty} = 0$$

- Průsečík s y: $f(0) = 1$, $P_y = [0, 1]$.
  Průsečíky s x: rovnice $e^{-x^2} = 0$ nemá řešení, takže graf f osu x neprotíná.
- $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$, funkce f je sudá.
- $f'(x) = -2xe^{-x^2}$
  - Řešme rovnici $f'(x) = 0$. Činitel e^{-x^2} je ale nenulový, takže jediným řešením (a kritickým bodem) je $x = 0$.
  - Činitel e^{-x^2} je dokonce pořád kladný, takže řešení nerovnice $f'(x) > 0$ se zúží na nerovnici $-2x > 0$, která má řešení $x < 0$. Funkce f tedy roste na intervalu $(-\infty, 0)$ a klesá na $(0, \infty)$.
  - Kritický bod $x = 0$ je tedy i lok. maximem s hod. $f(0) = 1$.
- $f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)^2e^{-x^2}$

– Řešme nerovnici $f''(x) > 0$.

$$-2e^{-x^2} + (-2x)^2 e^{-x^2} > 0$$
$$e^{-x^2}(4x^2 - 2) > 0$$
$$4e^{-x^2}(x^2 - \frac{1}{2})$$
$$4e^{-x^2}(x - \frac{\sqrt{2}}{2})(x + \frac{\sqrt{2}}{2})$$

Činitel $4e^{-x^2}$ je kladný vždy, takže do tabulky vstoupí jen $(x - \frac{\sqrt{2}}{2})$ a $(x + \frac{\sqrt{2}}{2})$.

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$
$(x - \frac{\sqrt{2}}{2})$	-	-	+
$(x + \frac{\sqrt{2}}{2})$	-	+	+
$\sum$	+	-	+
	$\smile$	$\frown$	$\smile$

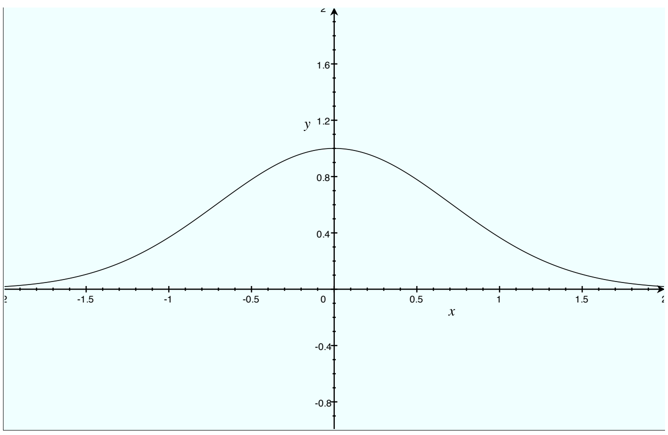
– Body $x_1 = -\sqrt{2}/2$ a $x_2 = \sqrt{2}/2$ jsou tedy inflexní s hodnotou $f(-\sqrt{2}/2) = f(\sqrt{2}/2) = e^{-1/2}$.

- Asymptoty bez směrnice nejsou.

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = \frac{0}{\infty} = 0$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

A protože směrnice vyšla (v obou případech) nulová jsou „kvéčka“ stejné limity jaké jsme už počítali v nevlastních bodech. Asymptota je tedy jediná (obousměrná), a to $y = 0$.



(f) $f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$

- Výraz pod odmocninou musí být nezáporný. Řešme proto nerovnici:

$$\begin{aligned}
&8x^2 - x^4 \geq 0\\
&x^2(8 - x^2) \geq 0\\
&x^2(2\sqrt{2} - x)(2\sqrt{2} + x) \geq 0
\end{aligned}$$

  Činitel x^2 bude nezáporný vždy. Do tabulky nám tedy vstoupí jen $2\sqrt{2} - x$ a $2\sqrt{2} + x$.

	$(-\infty, -2\sqrt{2})$	$(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$	$(2\sqrt{2}, \infty)$
$2\sqrt{2} - x$	+	+	-
$2\sqrt{2} + x$	-	+	+
$\sum$	-	+	-

  Definičním oborem je tedy interval $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ (protože se jedná o neostrou nerovnost).
- Limity v krajních bodech definičního oboru nemají smysl, protože v těchto bodech je funkce definovaná a spojitá, limity se proto rovnají funkčním hodnotám.
- Limity v nevlastních bodech nemají smysl, protože definiční obor je ohraničený.
- Průsečík s y: $f(0) = 0$, $P_y = [0, 0]$.
  Průsečíky s x:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{8x^2 - x^4} = 0\\
&8x^2 - x^4 = 0\\
&x^2(2\sqrt{2} - x)(2\sqrt{2} + x) = 0
\end{aligned}$$

  Řešením jsou tedy $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ a $x_3 = 2$. $P_{x,1} = [0, 0]$, $P_{x,2} = [-2, 0]$ a $P_{x,3} = [2, 0]$
- $f(-x) = \sqrt{8(-x)^2 + (-x)^4} = \sqrt{8x^2 - x^4} = f(x)$ Funkce f je tedy sudá.
- $f'(x) = \frac{16x - 4x^3}{2\sqrt{8x^2 - x^4}}$
  - Při řešení rovnice $f'(x) = 0$ bychom si měli uvědomit, že výraz není definován v bodech $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 2$ (nula ve jmenovateli).

$$\begin{aligned}
&\frac{16x - 4x^3}{2\sqrt{8x^2 - x^4}} = 0\\
&2x\frac{4 - x^2}{\sqrt{8x^2 - x^4}} = 0\\
&2x\frac{(2 - x)(2 + x)}{\sqrt{8x^2 - x^4}}
\end{aligned}$$

    Kritické body jsou tedy $x_{1,2} = \pm 2$. Nula není kritickým bodem, protože f' v ní není definována.

– Řešme nerovnici $f'(x) > 0$ neboli

$$2x\frac{(2-x)(2+x)}{\sqrt{8x^2-x^4}} > 0.$$

Jmenovatel je kladný vždy, do tabulky tedy vstoupí jen x, $2-x$ a $2+x$.

	$(-2\sqrt{2},-2)$	(-2,0)	(0,2)	$(2,2\sqrt{2})$
x	-	-	+	+
$2-x$	+	+	+	-
$2+x$	-	+	+	+
$\sum$	+	-	+	-
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

– V bodech $x = \pm 2$ má f lok. maxima s hodnotami $f(-2) = f(2) = 4$.
V bodě $x = 0$ má f lok. minimum s hodnotou $f(0) = 0$, přestože se nejedná o kritický bod.

• $f''(x) = -\frac{(16-12x^2)(\sqrt{8x^2-x^4})-(16x-4x^3)\frac{16x-4x^3}{2\sqrt{8x^2-x^4}}}{4(8x^2-x^4)}$
  – Řešme rovnici $f''(x) > 0$.

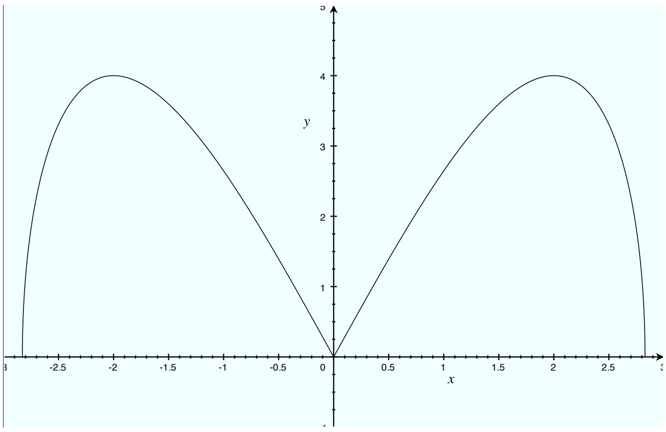
$$-\frac{(16-12x^2)(\sqrt{8x^2-x^4})-(16x-4x^3)\frac{16x-4x^3}{2\sqrt{8x^2-x^4}}}{4(8x^2-x^4)} > 0$$
$$-\frac{(16-12x^2)(8x^2-x^4)-(16x-4x^3)^2}{4(8x^2-x^4)^{\frac{3}{2}}} > 0$$
$$x^2\frac{32-4x^2+x^4}{(8x^2-x^4)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

Jmenovatel je vždy kladný, stejně tak čitatel (komplexní kořeny), jediný problém tak vyvstává v bodě $x = 0$, kde výraz není definován, v ostatních bodech je kladný. Funkce f je tedy konvexní v intervalech $(-2\sqrt{2}, 0)$ a $(0, 2\sqrt{2})$.

  – Funkce f nemá inflexní body.

• Asymptoty bez směrnice nejsou a asymptoty se směrnicí nemají smysl, protože definičnií obor f je ohraničený.

• U grafu si povšimněte „zobáčku“ v bodě $x = 0$. Ten je tam díky tomu, že derivace f není v tomto bidě definovaná.



4. Předpokládejme, že jste šikovný strýček. Váš synovec za vámi přijde s následujícím úkolem: chtěl by z obdélníkového kartonového archu o rozměrech 50×30 cm udělat krabici bez víka s co možná největším objemem. Vaším úkolem je tedy zjistit, jak moc je třeba vyříznout, aby vytvořená krabice měla co nejmenší objem.

   Krabice bude mít rozměry x (hloubka výřezu, výška krabice), $50 - 2x$ a $30 - 2x$ (viz náčrtek). x může nabývat hodnot z intervalu $[0, 15]$. Objem krabice je

   $$V(x) = x \cdot (30 - 2x)(50 - 2x) = 1500x - 160x^2 + 4x^3.$$

   Naším úkolem je nalézt (globální) maximum funkce V v daném intervalu. To určitě existuje, protože se spojitá funkce (V je spojitá) na uzavřeném intervalu nabývá svého maxima i minima. A to buď v lokálním extrému nebo v krajních bodech intervalu. Krajní body můžeme rovnou vyloučit, protože pro ty je objem nulový (krabice by vlastně vůbec nešla složit). Hledejme tedy lokální extrém – derivujme.

   $$V'(x) = 1500 - 320x + 12x^2$$

   Řešme rovnici $V'(x) = 0$ neboli

   $$1500 - 320x + 12x^2 = 0.$$

   Tato rovnice má dva kořeny $x_{1,2} = 40/3 \pm 5/3\sqrt{19}$. Ten s plusem nevyhovuje, protože je mimo vytčený interval (tolik ani nejde vystřihnout!). $x_2 = 40/3 - 5/3\sqrt{19} \doteq 6,07$ už v intervalu leží. Ověřme, že se jedná o maximum – dosaďme tento bod do druhé derivace.

   $$V''(x_2) = -320 + 24x|_{x_2} = -320 + 320 - 40\sqrt{19} = -40\sqrt{19} < 0$$

   Druhá derivace v bodě x_2 je záporná a x_2 je proto opravdu maximum. Je potřeba vyříznout čtverce o straně přibližně 6,07 cm.

5. Na plotě, jehož výška je 1 metr sedí vrabec. Ve vzdálenosti 15 metrů od plotu roste strom, který má větev ve výšce 3 metry. Na zemi mezi plotem a stromem jsou hustě rozesety žížaly. V jaké vzdálenosti od plotu má vrabec sezobnout žížalu, aby proletěl trasu plot-žížala-větev po přímkách a po nejkratší dráze?

   Označme písmenem x vzdálenost místa, kde vrabec sezobne žížalu, od plotu. Vzdálenost tohot místa od stromu je pak $15 - x$. Písmenem s označme dráhu, kterou vrabec uletí. Trajektorie jeho pohybu bude tvořit přepony dvou praúhlých trojúhelníků. Z Pythagorovy věty dostaneme:

$$s(x) = \sqrt{1^2 + x^2} + \sqrt{3^2 + (15 - x)^2} = \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{234 - 30x + x^2}.$$

   Hledáme globální extrém funkce s na intervalu [0,15]. Hledejme lokální extrém – zderivujme

$$s'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}} + \frac{-30 + 2x}{2\sqrt{234 - 30x + x^2}}$$

   a řešme rovnici $s'(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}} + \frac{-30 + 2x}{2\sqrt{234 - 30x + x^2}} &= 0 \\
\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} &= \frac{15 - x}{\sqrt{234 - 30x + x^2}} \\
\frac{x^2}{1 + x^2} &= \frac{(15 - x)^2}{234 - 30x + x^2} \\
x^2(234 - 30x + x^2) &= (15 - x)^2(1 + x^2) \\
234x^2 - 30x^3 + x^4 &= 225 - 30x + 226x^2 - 30x^3 + x^4 \\
0 &= 225 - 30x - 8x^2
\end{aligned}$$

   Tato rovnice má kořeny $x_1 = 15/4$ a $x_2 = -15/2$. Druhý kořen nevyhovuje našim podmínkám – délka dráhy nemůže být záporná. Ověřme, že x_1 je minimum.

$$s''\left(\frac{15}{4}\right) = \frac{\sqrt{1 + x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1 + x^2} + \\
+ \frac{\sqrt{234 - 30x + x^2} - \frac{(x-15)^2}{\sqrt{234-30x+x^2}}}{234 - 30x + x^2}\Big|_{x=\frac{15}{4}} \doteq 0,02 > 0$$

   Vrabec tedy sezobne žížalu ve vzdálensti 3,75 metru od plotu.

6. Předpokládejme, že jste konstruktér firmy PEPSI a dostanete následující úkol: musíte navrhnout válcovou plechovku takovou, aby do ní vešlo přesně $250\pi\,\mathrm{cm}^3$ tekutiny a přitom aby se na ni spotřebovalo co nejméně materiálu. Tedy aby měla co nejmenší povrch.

Objem válcové plechovky je $V = \pi r^2 v$, kde r je její poloměr a v výška. Povrch plechovky je $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$. Víme, že objem má být přesně 250π. Ze vztahu pro objem tak můžeme vyjádřit v (případně i r, ale v je jednodušší).

$$\begin{aligned} 250\pi &= \pi r^2 v \\ 250 &= r^2 v \\ v &= \frac{250}{r^2} \end{aligned}$$

Dosazením do S dostáváme funkci jedné proměnné.

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{500\pi}{r}$$

Chceme nalézt její globální minimum na intervalu $[0, \infty)$ – zderivujme

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{500\pi}{r^2}$$

a řešme $S'(r) = 0$.

$$\begin{aligned} 4\pi r - \frac{500\pi}{r^2} &= 0 \\ 4\pi r &= \frac{500\pi}{r^2} \\ r^3 &= 125 \end{aligned}$$

Jediným (reálným) kořenem je $r_1 = 5$. Ověřme, že se jedná o minimum.

$$S''(5) = 4\pi + \frac{1000\pi}{r^3}|_{r=5} = 12\pi > 0$$

Hledné rozměry jsou tedy $r = 5$ cm a $v = \frac{250}{5^2} = 10$ cm.