Domácí úkol č. 1 – Řešení

1. Zderivujte funkci $f(x) = \sqrt{x}$ v bodě 9 podle definice.

$$f'(9) = \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{9}}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{6}$$

2. Zderivujte.

   (a) $(\ln(\ln(\ln x)))' =$

$$= \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot (\ln(\ln x))' = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$$

   (b) $\left(\frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' =$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{4x}{(x^2+1)(x^2-1)} = \frac{x}{x^4-1}$$

   (c) $(\sin^n x \cos x)' =$

$$= (\sin^n x)' \cdot \cos x + \sin^n x \cdot (\cos x)' =$$
$$= n \sin^{n-1} x \cdot (\sin x)' \cdot \cos x - \sin^{n+1} x =$$
$$= n \sin^{n-1} x \cdot \cos^2 x - \sin^{n+1} x$$

   (d) $(\sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x))' =$

$$= (\sin(\cos^2 x))' \cdot \cos(\sin^2 x) + \sin(\cos^2 x) \cdot (\cos(\sin^2 x))' =$$
$$= \cos(\cos^2 x) \cdot (\cos^2 x)' \cdot \cos(\sin^2 x) +$$
$$+ \sin(\cos^2 x) \cdot (-\sin(\sin^2 x)) \cdot (\sin^2 x)' =$$
$$= \cos(\cos^2 x) \cdot (-2 \cos x \sin x) \cdot \cos(\sin^2 x) +$$
$$- \sin(\cos^2 x) \cdot \sin(\sin^2 x) \cdot (2 \sin x \cos x) =$$
$$= -\sin 2x \cdot \cos(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\sin 2x \cdot \cos(\cos 2x)$$

   (e) $(e^x(x^2-2x+2))' =$

$$= (e^x)'(x^2-2x+2) + e^x(x^2-2x+2)' = e^x(x^2-2x+2) + e^x(2x-2) = e^x x^2$$

(f) $\left(\left(\frac{1-x^2}{2}\sin x - \frac{(1-x)^2}{2}\cos x\right)e^{-x}\right)' =$

$$= \left(\frac{1-x^2}{2}\sin x - \frac{(1-x)^2}{2}\cos x\right)' e^{-x} +$$
$$+ \left(\frac{1-x^2}{2}\sin x - \frac{(1-x)^2}{2}\cos x\right)(e^{-x})' =$$
$$= \left(\left(\frac{1-x^2}{2}\right)' \sin x + \frac{1-x^2}{2}(\sin x)' +\right.$$
$$\left. - \left(\frac{(1-x)^2}{2}\right)' \cos x - \frac{(1-x)^2}{2}(\cos x)'\right) e^{-x} +$$
$$- \left(\frac{1-x^2}{2}\sin x - \frac{(1-x)^2}{2}\cos x\right) e^{-x} =$$
$$= \left(-x\sin x + \frac{1-x^2}{2}\cos x + (1-x)\cos x + \frac{(1-x)^2}{2}\sin x\right) e^{-x} +$$
$$- \left(\frac{1-x^2}{2}\sin x - \frac{(1-x)^2}{2}\cos x\right) e^{-x} =$$
$$= e^{-x}(-2x\sin x + 2\cos x - 2x\cos x + x^2\sin x)$$

(g) $(\log^3 x^2)' =$

$$3(\log^2 x^2)\cdot(\log x^2)' = 3(\log^2 x^2)\cdot\left(\frac{1}{x^2\ln 10}\right)\cdot(x^2)' = \frac{6}{x\ln 10}\log^2 x^2$$

(h) $(a^5 + 5a^3x^2 - x^5)' =$

$$= (a^5)' + (5a^3x^2)' + (-x^5)' = 0 + 5a^3(x^2)' - (x^5)' = 10a^3x - 5x^4$$

(i) $((x\sin\alpha + \cos\alpha)\cdot(x\cos\alpha - \sin\alpha))' =$

$$= (x\sin\alpha + \cos\alpha)'(x\cos\alpha - \sin\alpha) +$$
$$+ (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha)' =$$
$$= \sin\alpha(x\cos\alpha - \sin\alpha) + (x\sin\alpha + \cos\alpha)\cos\alpha =$$
$$= 2x\cos\alpha\sin\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = x\sin 2\alpha + \cos 2\alpha$$

(j) $x^{2x} =$

$$= (e^{2x\ln x})' = e^{2x\ln x}\cdot(2x\ln x)' = x^{2x}\cdot((2x)'\ln x + 2x(\ln x)') =$$
$$= x^{2x}\cdot\left(2\ln x + 2\frac{x}{x}\right) = 2\cdot x^{2x}\cdot(\ln x + 1)$$

3. Nalezněte tečnu ke grafu funkce f v bodě $[-2, f(-2)]$.

$$f(x) = \frac{8}{4+x^2}$$

Nejprve musíme dopočítat y-ovou souřadnici bodu dotyku, tj.

$$f(-2) = \frac{8}{4 + (-2)^2} = 1.$$

Hledaná tečna bude mít směrnici rovnou derivaci funkce f v x-ové souřadnici bodu dotyku.

$$f'(x) = 8 \cdot ((4 + x^2)^{-1})' = -8(4 + x^2)^{-2} \cdot (4 + x^2)' = -\frac{16x}{(4 + x^2)^2}$$

$$f'(-2) = -\frac{16(-2)}{(4 + (-2)^2)^2} = \frac{1}{2}$$

Nyní můžeme dosadit do vzorce:

$$t : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

kde x_0 je x-ová souřadnice bodu dotyku, tedy v našem případě $x_0 = -2$. Dosazením dostaneme

$$t : y = f'(-2)(x + 2) + f(-2) = \frac{1}{2}(x + 2) + 1 = \frac{x}{2} + 2.$$

Místo dosazení do vzorce můžeme použít následující způsob – víme, že tečna (přímka) má rovnici $y = kx + q$. Víme, že $k = f'(-2) = 1/2$ (směrnice) a zbývá nám dopočítat q.

Víme, že tečna musí procházet bodem $[-2, f(-2)] = [-2, 1]$. A musí tedy platit:

$$k(-2) + q = \frac{1}{2}(-2) + q = 1 = f(-2).$$

Odtud snadno vypočteme $q = 2$, a tedy opět:

$$t : y = \frac{1}{2}x + 2.$$

4. Nalezněte tečnu ke grafu funkce f rovnoběžnou s přímkou p (tip: rovnoběžné přímky mají stejnou směrnici.)

$$f(x) = \frac{x^3}{6} + 2$$

$$p\colon\ y = 2x + 3$$

Tady máme situaci ztíženou tím, že neznáme bod dotyku. Než budeme moci použít metody z předchozí úlohy, musíme jej nalézt.

Víme, že tečna je rovnoběžná s přímkou p, která má směrnici 2. Tečna tudíž musí mít rovněž směrnici 2 a zároveň se rovnat derivaci funkce f v x-ové souřadnici bodu dotyku. Tu tedy spočteme z rovnice $f'(x) = 2$. Spočtěme tedy

$$f'(x) = (\frac{x^3}{6} + 2)' = \frac{x^2}{2}$$

Hledaná rovnice má tedy podobu

$$\frac{x^2}{2} = 2$$

a řešení $x_1 = 2$ a $x_2 = -2$. Podmínky ze zadání tedy splňují celkem 2 tečny, a to v bodech dotyku $[2, f(2)] = [2, 10/3]$ a $[-2, f(-2)] = [-2, 2/3]$. (y-ová souřadnice bodu dotyku je vždy funkční hodnota te x-ové, jinak by bod dotyku neležel na grafu f.)
Dále již postupujeme jako v předchozí úloze a nakonec dostaneme:

$$t_1 : y = 2x - \frac{2}{3} \text{ a } t_2 : y = 2x + \frac{14}{3}.$$

5. Nalezněte následující limity použitím l'Hospitalova pravidla.

   (a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

   (b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$$

   (c)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 + x - 2}{3x^3 - 2x^2 + x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2+1}{9x^2 - 4x + 1} = \\ = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{12x}{18x - 4} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

   Všimněte si, že v tomto případě již znáte rychlejší způsob, jak tuto limitu spočítat.

   (d)
$$\lim_{x\to 0} x \ln x = |0 \cdot (-\infty)| = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} (-x) = 0$$

   (e)
$$\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right) = |\infty - \infty| = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x} = \\ \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x\cos x} = \left|\frac{0}{0}\right| \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - x\cos x}{2\cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

V posledních dvou úlohách se výraz v limitě musel nejdříve upravit, aby vůbec bylo možné použít L'Hospitalovo pravidlo.

6. Nalezněte Maclaurinův polynom funkce f stupně 5.

$$f(x) = e^{2x-x^2}$$

Vlastně budeme jen dosazovat do vzorce pro Taylorův polynom, kde $x_0 = 0$. Vzorec je:

$$\begin{aligned} T_{5,x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \\ + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 + \frac{f^{(5)}(x_0)}{5!}(x-x_0)^5 \end{aligned}$$

Potřebujeme tedy vypočítat jednotlivé derivace:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{2x-x^2}(2-2x) \\ f''(x) &= e^{2x-x^2}(2-2x)^2 - 2e^{2x-x^2} \\ f'''(x) &= e^{2x-x^2}(2-2x)^3 - 4(2-2x)e^{2x-x^2} - 2(2-2x)e^{2x-x^2} = \\ &= e^{2x-x^2}(2-2x)^3 - 6(2-2x)e^{2x-x^2} \\ f^{(4)}(x) &= e^{2x-x^2}(2-2x)^4 - 6(2-2x)^2e^{2x-x^2} - 6(2-2x)^2e^{2x-x^2} + \\ &\quad + 12(2-2x)e^{2x-x^2} = \\ &= e^{2x-x^2}(2-2x)^4 - 12(2-2x)^2e^{2x-x^2} + 12e^{2x-x^2} \\ f^{(5)}(x) &= e^{2x-x^2}(2-2x)^5 - 8(2-2x)^3e^{2x-x^2} - 12(2-2x)^3e^{2x-x^2} + \\ &\quad + 48(2-2x)e^{2x-x^2} + 12(2-2x)e^{2x-x^2} = \\ &= e^{2x-x^2}(2-2x)^5 - 20(2-2x)^3e^{2x-x^2} + 60(2-2x)e^{2x-x^2} \end{aligned}$$

V bodě $x_0 = 0$ mají tedy derivace hodnoty: $f'(0) = 2$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = -4$, $f^{(4)}(0) = -20$ a $f^{(5)}(0) = -8$. Samotná funkční hodnota $f(0) = 1$. Maclaurinův polynom má tedy podobu:

$$\begin{aligned} T_{5,0}(x) = 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{-4}{3!}x^3 + \frac{-20}{4!}x^4 + \frac{-8}{5!}x^5 = \\ = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 \end{aligned}$$

7. Nalezněte Taylorův polynom funkce kosinus stupně 5 se středem v bodě $x_0 = \pi/3$. Derivace až do pátého stupně jsou:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x \\ f''(x) &= -\cos x \\ f'''(x) &= \sin x \\ f^{(4)}(x) &= \cos x \\ f^{(5)}(x) &= -\sin x \end{aligned}$$

Hodnoty v nich jsou $f'(\pi/3) = f^{(5)}(\pi/3) = -\sqrt{3}/2$, $f''(\pi/3) = -1/2$, $f'''(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ a $f(\pi/3) = f^{(4)}(\pi/3) = 1/2$. Taylorův polynom funkce kosinus má tedy podobu:

$$T_{5,\frac{\pi}{3}}(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \\ + \frac{1}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 - \frac{\sqrt{3}}{240}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5$$