KOS
Matematický KOrespondenční Seminář

(Matematického ústavu Slezské univerzity v Opavě)

1. ROČNÍK

2001/2002

Vážení přátelé,

děkujeme vám za vaši účast v 1. ročníku našeho korespondenčního semináře KOS. Přejeme Vám hodně úspěchů v osobním životě.

Za organizátora
RNDr. D. Smetanová
RNDr. J. Šeděnková
Mgr. P. Volný

Dělitelnost celých čísel

Definice:

Řekneme, že celé číslo b je *dělitelné* číslem a, jestliže existuje celé číslo c tak, že platí

$$a \cdot c = b. \tag{1}$$

Píšeme pak $a|b$ (můžeme též říkat a *dělí* b, nebo b je *násobek* a).

Jestliže neexistuje takové celé číslo c, aby platila rovnost (1) říkáme, že číslo a nedělí číslo b.

Z definice přímo vyplývá:
a) Číslo nula je dělitelné každým celým číslem.
b) Jediné číslo, které je dělitelné nulou, je nula.
c) Čísla 1, -1 dělí každé celé číslo.
d) Pro libovolné celé číslo a platí $a|a$.
e) Pro libovolná celá čísla a, b, c platí

$$a|b \wedge b|c \;\Rightarrow\; a|c \tag{2}$$

$$a|b \wedge a|c \;\Rightarrow\; a|(b+c) \wedge a|(b-c) \tag{3}$$

$$c \neq 0 \;\Rightarrow\; (a|b \Leftrightarrow ac|bc) \tag{4}$$

$$a|b \wedge b > 0 \;\Rightarrow\; a \leq b. \tag{5}$$

Jednou z vlastností celých čísel je, že je-li $a \cdot b = 0$, pak $a = 0 \vee b = 0$. Jinak řečeno nemůže platit, že a i b jsou zároveň nenulové a splňují výše uvedenou rovnost.Tato zdánlivě zřejmá vlastnost nemusí platit v teori dělitelnosti na jiných množinách než jsou celá čísla. Např. vynásobíme-li dva nenulové polynomy můžeme dostat nulový polynom.

Podle vlastnosti dělitelnosti (resp. nedělitelnosti) číslem 2 můžeme množinu celých čísel rozdělit na podmnožinu sudých (resp. lichých čísel).

Příklad:

Zjistěte, pro která přirozená čísla n je číslo $n^2 + 4$ dělitelné číslem $n + 2$.

Řešení:

Číslo $n+2$ dělí číslo n^2-4, protože $n^2-4 = (n+2)\cdot(n-2)$. Předpokládejme, že $n+2$ dělí n^2+4. Zároveň tedy dělí rozdíl $(n^2+4)-(n^2-4) = 8$. Budeme-li považovat i 0 za přirozené číslo, pak z faktu $(n+2)|8$ plyne, že n, které

vyhovuje zadání příkladu, splňuje jednu z rovnic $n+2=2$, $n+2=4$, $n+2=8$. Tedy n může nabývat hodnot 0, 2, 6.

Zadání a řešení 1. kola

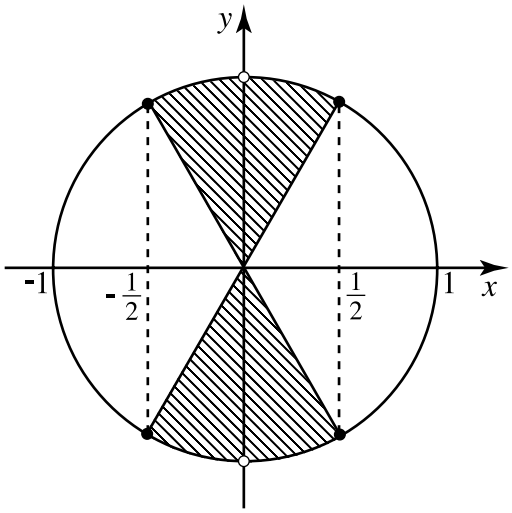
1. Řešte v oboru reálných čísel rovnici

$$2x^2 = \frac{2x-1}{|\cos\alpha|},$$

kde α je parametr. (Ve jmenovateli je absolutní hodnota.)

Řešení 1. Podmínky: $|\cos\alpha| \neq 0$ $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
Řešíme kvadratickou rovnici: $2 \cdot |\cos\alpha| \cdot x^2 - 2x + 1 = 0$,
$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8|\cos\alpha|}}{4 \cdot |\cos\alpha|}$, kde $4 - 8|\cos\alpha| \geq 0$, po úpravách $0 < |\cos\alpha| \leq \frac{1}{2}$,
Řešení rovnice:

$$\alpha \in \left\langle \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{2}{3}\pi + k\pi \right\rangle, \ k \in \mathbb{Z}$$



2. Dokažte, že $2^{n+1} + 5^n$ není pro žádné přirozené n prvočíslem.

Řešení 2. Označíme množinu přirozených čísel písmenem $\mathbb{N}$.

a) Uvažujme, že množina $\mathbb{N}$ obsahuje číslo 0, pak pro $n = 0$ platí $2^1 + 5^0 = 3$, což je prvočíslo. Tvrzení neplatí a nelze ho tedy dokázat.

b) Budeme uvažovat, že množina $\mathbb{N}$ neobsahuje 0.
První způsob řešení:
Prostudujme nejdříve, jaké hodnoty nabývá dvojčlen $2^{n+1} + 5^n$ pro malá n. Výpočty uspořádáme do tabulky, z níž je patrná domněnka, že $2^{n+1} + 5^n$ je pro každé n dělitelné číslem 3.

n	2^{n+1}	5^n	$2^{n+1} + 5^n$
1	4	5	9
2	8	25	33
3	16	125	141
4	32	625	657

Dokazujeme tuto hypotézu matematickou indukcí. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé.

Předpokládejme, že číslo $2^{n+1} + 5^n$ je dělitelné třemi. Existuje tedy k tak, že platí $2^{n+1} + 5^n = 3k$. Chceme ukázat, že také číslo $2^{n+2} + 5^{n+1}$ je dělitelné třemi. Platí $2^{n+2} + 5^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} + (2 + 3) \cdot 5^n = 2 \cdot 2^{n+1} + 2 \cdot 5^n + 3 \cdot 5^n = 2(2^{n+1} + 5^n) + 3 \cdot 5^n = 2 \cdot 3k + 3 \cdot 5^n = 3(2k + 5^n) = 3h$, kde $h = 2k + 5^n$. Pro každé přirozené n je tedy číslo $2^{n+1} + 5^n$ složené a nemůže být prvočíslem.

Druhý způsob řešení: Výraz $2^{n+1} + 5^n$ upravíme na tvar $3 \cdot 2^n + (5^n - 2^n)$ a ve druhém sčítanci využijeme vzorec $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ $(n \in \mathbb{N})$. Vidíme, že oba sčítance jsou dělitelné 3. Výraz $2^{n+1} + 5^n$ je tedy pro každé přirozené číslo n dělitelný třemi a nemůže být prvočíslem, protože nabývá hodnot, které jsou různé od 3.

3. Žáci dostali za úkol vymyslet slovní příklad. Libor vymyslel tento:

Prvním a druhým kohoutkem nateče dohromady za hodinu p hektolitrů vody. Druhým a třetím (dohromady) nateče za hodinu o 30 hektolitrů více. Třetím

a čtvrtým (dohromady) nateče za hodinu dvakrát více než druhým a třetím. Prvním a čtvrtým (dohromady) nateče za hodinu o 20 hektolitrů více než prvním a druhým. Kolik hektolitrů vody nateče za hodinu každým kohoutkem zvlášť?

Vyřešte Liborův problém.

Řešení 3. První kohoutek $\ldots A$, druhý kohoutek $\ldots B$, třetí kohoutek $\ldots C$, čtvrtý kohoutek $\ldots D$.

$$\begin{array}{lll} A+B & \ldots & P \text{ hl/hod.} \\ B+C & \ldots & P+30 \text{ hl/hod.} \\ C+D & \ldots & 2(P+30) \text{ hl/hod.} \\ A+D & \ldots & P+20 \text{ hl/hod.} \end{array}$$

Za hodinu nateče všemi $A+B+C+D$ hl vody,

$$\begin{aligned} [A+B]+[C+D] &= [B+C]+[A+D] \\ P+2(P+30) &= P+30+P+20 \\ 2P+30 &= P+20 \\ P &= -10 \end{aligned}$$

Nemůže natéct záporný počet hektolitrů. Úloha nemá řešení.

Uvedenou úlohu lze také řešit soustavou čtyřech rovnich o čtyřech neznamých s parametrem. Tyto rovnice snadno sestavíme ze zadání. Soustava má řešení pouze pro hodnotu parametru $p=-10$ a řešení není jediné, je jich nekonečně mnoho. Srovnáme-li výsledek se zadáním (nemůže natéct záporný počet hektolitrů). Úloha nemá řešení.

4. V oboru reálných čísel naleznětě všechna řešení soustavy

$$\begin{gathered} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_2+x_3+x_4=0, \\ x_3+x_4+x_5=0, \\ \ldots \\ x_{98}+x_{99}+x_{100}=0, \\ x_{99}+x_{100}+x_1=0, \\ x_{100}+x_1+x_2=0, \end{gathered}$$

Řešení 4. Z první a druhé rovnice vidíme, že $x_1 + x_2 + x_3 - (x_2 + x_3 + x_4) = x_1 - x_4 = 0$, tj. $x_1 = x_4$ ze čtvrté a páté rovnice dostaneme $x_4 = x_7$, atd. až se dostaneme k rovnostem $x_{94} = x_{97}$, $x_{97} = x_{100}$, z poslední a první rovnice máme $x_{100} = x_3$, pokračujeme dál $x_3 = x_6, \ldots, x_{96} = x_{99}$, $x_{99} = x_2$, $x_2 = x_5$, $\ldots, x_{98} = x_1$. Zjistili jsme, že pokud má soustava řešení, pak se musí všechy kořeny rovnat, tj. $x_1 = x_2 = \ldots = x_{100} = x$. Dosazením do první rovnice zjistíme, že musí platit zároveň $3x = 0$, tj. $x = 0$. Soustava má jediné řešení $x_1 = x_2 = \ldots = x_{100} = 0$.

5. Určete, pro která celá čísla n je číslo $7n + 1$ dělitelné číslem $3n + 4$.

Řešení 5. Jestliže $(3n + 4)|7n + 1$, pak $(3n + 4)|(7 \cdot (3n + 4) - 3 \cdot (7n + 1))$, po úpravě $(3n + 4)|25$, tj. $3n + 4 \in \{\pm 1, \pm 5, \pm 25\}$, odkud $n \in \{-3, -1, 7\}$.

6. a) Na dvě vážení zjistěte, která z devíti stejně vypadajících koulí je lehčí. Můžete použít jen rovnoramenné váhy bez závaží.

b) Za stejných podmínek jako v předcházející úloze zjistěte lehčí kouli mezi osmi stejně vypadajícími koulemi.

Řešení 6.

a) Rozdělíme devět koulí na tři stejné skupiny a na obě misky vah položíme po třech koulích. Třetí skupinu ponecháme stranou (první vážení).

První případ: Váhy jsou v rovnováze, hledaná koule je potom v hromádce, kterou jsme odložili. Vezmeme z těchto tří koulí kterékoliv dvě a každou z nich položíme na jednu misku vah (druhé vážení). Nebudou-li váhy nyní v rovnováze, bude miska s lehčí koulí nahoře, budou-li v rovnováze, je lehčí ta koule, kterou jsme na váhu nedali.

Druhý případ: Váhy nejsou v rovnováze. Hledaná koule je tedy na té misce, která je nahoře. V tomto případě najdeme z těchto koulí druhým vážením jako v prvním případě lehčí kouli.

b) Rozdělíme osm koulí na tři nestejné hromádky. Dvě po třech koulích a jedna ze dvou. Položíme na váhy první dvě hromádky, na každou misku tři koule (první vážení). Zůstanou-li váhy v rovnováze, je hledaná koule mezi zbylými dvěma a snadno je při druhém vážení poznáme. Jestliže se váhy z rovnováhy vychýlí, je lehčí koule na té misce, která je nahoře. Vezmeme

z nich libovolné dvě a každou položíme na jednu misku vah (druhé vážení). Nebudou-li misky v rovnováze, bude opět miska s lehčí koulí nahoře. Budou-li obě koule na vahách stejně těžké, je lehčí ta koule, která na vahách nebyla.

Zadání a řešení 2. kola

1. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n je číslo $72^{2n+2}-47^{2n}+28^{2n-1}$ dělitelné číslem 25.

Řešení 1. Pro řešení využijeme mocninný rozvoj

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Číslo $72^{2n+2} - 47^{2n} + 28^{2n-1}$ postupně upravujeme
$72^{2n+2} - 47^{2n} + 28^{2n-1} = (75-3)^{2n+2} - (50-3)^{2n} + (25+3)^{2n-1} =$
$75^{2n+2} + \binom{2n+2}{1}75^{2n+1}\cdot(-3) + \binom{2n+2}{2}75^{2n}\cdot(-3)^2 + \cdots + \binom{2n+2}{2n+1}75\cdot(-3)^{2n+1} +$
$(-3)^{2n+2}$
$-50^{2n} - \binom{2n}{1}50^{2n-1}\cdot(-3) - \binom{2n}{2}50^{2n-2}\cdot(-3)^2 + \cdots - \binom{2n}{2n-1}50\cdot(-3)^{2n-1} - (-3)^{2n}$
$+ 25^{2n-1} + \binom{2n-1}{1}25^{2n-2}\cdot 3 + \binom{2n-1}{2}25^{2n-3}\cdot 3^2 + \cdots + \binom{2n-1}{2n-2}25\cdot 3^{2n-2} + 3^{2n-1}$

Všechny mocniny (větší než 0) čísel $75, 50$ a 25 jsou dělitelné číslem 25. K tomu, aby celý výraz byl dělitelný číslem 25, stačí ukázat, že je číslem 25 dělitelný výraz $(-3)^{2n+2} - (-3)^{2n} + 3^{2n-1}$. Platí

$$(-3)^{2n+2} - (-3)^{2n} + 3^{2n-1} = 3^{2n+2} - 3^{2n} + 3^{2n-1} = (3^3 - 3 + 1)\cdot 3^{2n-1}$$

$$= (27 - 3 + 1)\cdot 3^{2n-1} = 25\cdot 3^{2n-1},$$

což je dělitelné 25 pro každé přirozené číslo n. (V první rovnosti jsme využili vlastnost, že sudá mocnina čísla -3 je stejná jako sudá mocnina čísla 3.)

Ukázali jsme, že pro libovolné přirozené číslo n je číslo $72^{2n+2} - 47^{2n} + 28^{2n-1}$ dělitelné číslem 25.

Jiný způsob řešení: Použijeme matematickou indukci.
1) $n = 1$:

$$72^4 - 47^2 + 28^1 = 26\ 871\ 675 = 25\cdot 1\ 074\ 867$$

Pro $n = 1$ je výraz dělitelný 25.

2) Předpokládejme, že pro $n = k$ je výraz dělitelný 25, tj. že platí

$$72^{2k+2} - 47^{2k} + 28^{2k-1} = 25 \cdot h \tag{6}$$

pro nějaké přirozené číslo h.

Chceme ukázat, že pak i pro $n = k + 1$ je výraz dělitelný 25. Dosadíme $n = k + 1$ a upravujeme

$$\begin{gathered}
72^{2(k+1)+2} - 47^{2(k+1)} + 28^{2(k+1)-1} = \\
= 72^{2k+4} - 47^{2k+2} + 28^{2k+1} = \\
= 72^2 \cdot 72^{2k+2} - 47^2 \cdot 47^{2k} + 28^2 \cdot 28^{2k-1} = \\
= 28^2(72^{2k+2} - 47^{2k} + 28^{2k-1}) + (72^2 - 28^2) \cdot 72^{2k+2} - (47^2 - 28^2)47^{2k} = \\
= 784 \cdot 25 \cdot h + 4400 \cdot 72^{2k+2} - 1425 \cdot 47^{2k} = \\
= 25 \cdot (784 \cdot h + 176 \cdot 72^{2k+2} - 57 \cdot 47^{2k}),
\end{gathered}$$

ve čtvrtém řádku jsme výraz $72^{2k+2} - 47^{2k} + 28^{2k-1}$ nahradili $25 \cdot h$ (podle předpokladu (6)).

Zjistili jsme, že výraz $72^{2k+4} - 47^{2+2k} + 28^{2k+1}$ je také dělitelný 25.

Pomocí matematické indukce jsme ukázali, že výraz $72^{2n+2} - 47^{2n} + 28^{2n-1}$ je dělitelný 25 pro každé přirozené číslo n.

2. Petr přišel za Pavlem se zajímavou úlohou. „Předpokládej, že číslo a se rovná číslu b.“ Pavel pak sledoval další Petrův postup. Budeme jej sledovat i my: Nechť $a = b$. Vynásobíme obě strany číslem a, tedy

$$a^2 = ab.$$

Pak k oběma stranám rovnice přičteme $a^2 - 2ab$:

$$a^2 + a^2 - 2ab = a^2 - ab.$$

Upravíme na

$$2(a^2 - ab) = a^2 - ab.$$

Nakonec vydělíme obě strany rovnice výrazem $a^2 - ab$, a dostaneme

$$2 = 1.$$

„Najdeš chybu v mém postupu, Pavle?“ říká Petr. „Ale vždyť to je jasné,“ odpovídá Pavel. Naleznete tuto chybu i vy?

Řešení 2. V posledním kroku dělíme výrazem $a^2 - ab$, který je ale podle předpokladu nulový, protože $a^2 = ab$. Dělení nulou není ekvivalentní úpravou a to je ta chyba, které se dopustil Petr.

3. Dne 1. ledna v 0.00 hodin dva přátelé zpozorovali, že na Zemi přistála vesmírná loď s mimozemskou civilizací. Během 15 minut věděly o přistání jejich manželky. Během dalších 15 minut sdělil každý z nich tuto událost svému známému, takže o události vědělo půl hodiny po půlnoci už 8 lidí. A teď předpokládejme, že by se tato zpráva mohla šířit po čtvrt hodinách i na další obyvatele Země. Který den a v kolik hodin by se o přistání dozvěděli všichni lidé na Zemi?

Řešení 3. Po každých patnácti minutách bude o přistání vědět dvojnásobný počet lidí (nebudeme uvažovat případy, kdy se o přistání dozví jeden člověk vícekrát). Odvodíme vztah mezi uplynulým časem a počtem lidí.

O půlnoci ví o přistání 2 lidé,
po 15 minutách ví o přistání $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ lidé,
po $2 \cdot 15 = 30$ minutách ví o přistání $2 \cdot 2^2 = 2^3 = 8$ lidí,
po $3 \cdot 15 = 45$ minutách ví o přistání $2 \cdot 2^3 = 2^4 = 16$ lidí,
$\vdots$
po $n \cdot 15$ minutách ví o přistání $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ lidí.

Předpokládejme, že na zemi žije okolo 6,5 miliard lidí. Potřebujeme najít nejmenší přirozené číslo n tak, aby platilo $2^{n+1} > 6,5 \cdot 10^9$. Přímým výpočtem zjistíme, že $2^{32} = 4294967296 < 6,5 \cdot 10^9$ a $2^{33} = 8589934592 > 6,5 \cdot 10^9$. Hledaným nejmenším přirozeným číslem je tedy číslo $n = 32$. Všichni lidé na zemi budou vědět o přistání po $n \cdot 15 = 32 \cdot 15 = 480$ minutách, což je 8 hodin.

Zjistili jsme, že všichni lidé na Zemi budou o přistání vědět 1. ledna v 8:00 hodin ráno.

4. Najděte všechny takové funkce f, definované na množině všech reálných

čísel, které pro libovolná reálná čísla x, y splňují vztah

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+3y^2-f(y).$$

Řešení 4. Uvedený vztah má platit pro všechna reálná čísla x, y. Zvolme např. $x=0$, $y=0$. Dostaneme

$$f(0+0)+f(0-0)=2f(0)+3\cdot 0^2-f(0),$$

odkud plyne, že

$$f(0)=0.$$

Pokud zvolíme $x=y$, dostaneme

$$f(x+x)+f(x-x)=2f(x)+3x^2-f(x),$$

po úpravě (s využitím již dokázané rovnosti $f(0)=0$)

$$f(2x)=f(x)+3x^2$$

Zkusme nyní zvolit $x=0$ a y libovolné a dostaneme

$$f(0+y)+f(0-y)=2f(0)+3y^2-f(y) \quad \Leftrightarrow \quad 2f(y)+f(-y)=3y^2.$$

Podobně pro $x=0$ a $y=-y$ platí

$$f(0+(-y))+f(0-(-y))=2f(0)+3(-y)^2-f(-y) \quad \Leftrightarrow \quad 2f(-y)+f(y)=3y^2.$$

Každé řešení původního problému musí splňovat všechny uvedené rovnosti. Jediným řešením soustavy dvou rovnic $2f(y)+f(-y)=3y^2$ a $2f(-y)+f(y)=3y^2$, které dostaneme například tak, že první rovnici vynásobíme dvěma a druhou od ní odečteme, je funkce

$$f(y)=y^2.$$

Dosazením zjistíme, jestli je tato funkce řešením i původního problému. Na levé straně původní rovnice dostaneme

$$f(x+y)+f(x-y)=(x+y)^2+(x-y)^2=2x^2+2y^2,$$

Na pravé straně původní rovnice dostaneme

$$2f(x) + 3y^2 - f(y) = 2x^2 + 3y^2 - y^2 = 2x^2 + 2y^2.$$

Obě strany se rovnají a funkce $f(x) = x^2$ je jediným řešením zadané rovnice $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 3y^2 - f(y)$.

Jiný způsob řešení: Původní rovnici upravíme na tvar

$$f(y) = 2f(x) + 3y^2 - f(x+y) - f(x-y). \tag{7}$$

Dosazením čísla $-y$ místo čísla y máme rovnici

$$f(-y) = 2f(x) + 3(-y)^2 - f(x + (-y)) - f(x - (-y)).$$

Snadno zjistíme, že pravé strany obou rovnic jsou stejné, tedy se musí rovnat i strany levé

$$f(y) = f(-y)$$

(řešením musí být sudá funkce).

Do první upravené rovnice (7) dosadíme $x = 0$ a $y = 0$, zjistíme, že

$$f(0) = 2f(0) + 3 \cdot 0^2 - f(0+0) - f(0-0) \quad \Leftrightarrow \quad f(0) = 0.$$

Pokud do první upravené rovnice (7) dosadíme pouze $x = 0$, dostaneme

$$f(y) = 2f(0) + 3y^2 - f(0+y) - f(0-y).$$

Tento vztah upravíme s využitím rovností $f(y) = f(-y)$ a $f(0) = 0$.

$$f(y) = 2 \cdot 0 + 3y^2 - f(y) - f(y)$$

$$3f(y) = 3y^2$$

$$f(y) = y^2.$$

Po provedení zkoušky (dosazením do zadání) zjistíme, že funkce $f(x) = x^2$ je jediným řešením zadané rovnice.

5. Máme tři hřebíky, které mají průřez ve tvaru kruhu, čtverce, rovnostranného trojúhelníku. Strana čtverce měří $1\,mm$ a průřez hřebíků má stejnou

velikost. Který z hřebíků jde nejhůře vytáhnout, jsou-li zaraženy do hloubky $3\,cm$?

(Nápověda: Nejpevněji drží hřebík, který se okolního materiálu dotýká největším povrchem.)

Řešení 5. Máme hřebíky s průřezem ve tvaru kruhu, čtverce a rovnostranného trojúhelníka. Povrch zaražené části hřebíků můžeme počítat jako povrch válce nebo hranolu s výškou $3\,cm$. Vztah mezi velikostmi povrchů bude záležet jen na velikosti obvodů podstav a nezáleží na výšce, protože je stejná. Povrch hrotu hřebíku je vzhledem k celkovému povrchu zanedbatelný, proto ho nebudeme uvažovat.

Čtverec o straně $1\,mm$ má obsah

$$S_\square = 1\,mm^2$$

a obvod

$$o_\square = 4\,mm$$

Rovnostranný trojúhelník má podle zadání stejný obsah $S_\triangle = 1\,mm^2$, délku jeho strany a vypočteme ze vzorce

$$S_\triangle = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \qquad \Rightarrow \qquad a = \sqrt{\frac{4S_\triangle}{\sqrt{3}}} \doteq 1,52\,mm,$$

obvod je pak

$$o_\triangle = 3 \cdot a \doteq 4,56\,mm$$

Kruh má podle zadání také stejný obsah $S_\circ = 1\,mm^2$, velikost jeho poloměru r vypočteme ze vzorce

$$S_\circ = \pi r^2 \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt{\frac{S_\circ}{\pi}} \doteq 0,56\,mm,$$

obvod je pak

$$o_\circ = 2\pi r \doteq 3,52\,mm$$

Porovnáním obvodů zjistíme, který hřebík má největší povrch a bude proto držet nejpevněji

$$o_\triangle > o_\square > o_\circ.$$

Nejhůře půjde vytáhnout hřebík s průřezem ve tvaru rovnostranného trojúhelníka.

6. Dokažte, že každý rok je pátek třináctého.

Řešení 6. Každý rok připadne 1. leden na jeden den v týdnu od pondělí do neděle, označme si ho D. Podle kalendáře určíme, na které dny připadnou třinácté dny v měsíci v závislosti na dni D. Např. 13. ledna bude v den $D+5$ (pro D=pondělí bude 13. ledna v sobotu, pro D=pátek bude 13. ledna ve středu). Správně bychom měli psát $D+12$, ale pro určení dnu v týdnu můžeme násobky sedmi vynechat, stačí připočítat pět dní. Stejným způsobem zjistíme, že 13. únor připadne na den $D+1$. V ostatních měsících musíme rozlišovat přestupný a nepřestupný rok. Výsledné určení dnů je shrnuto do tabulky.

Nepřestupný rok			**Přestupný rok**	
1. leden	D		1. leden	D
13. leden	$D+5$		13. leden	$D+5$
13. únor	$D+1$		13. únor	$D+1$
13. březen	$D+1$		13. březen	$D+2$
13. duben	$D+4$		13. duben	$D+5$
13. květen	$D+6$		13. květen	D
13. červen	$D+2$		13. červen	$D+3$
13. červenec	$D+4$		13. červenec	$D+5$
13. srpen	D		13. srpen	$D+1$
13. září	$D+3$		13. září	$D+4$
13. říjen	$D+5$		13. říjen	$D+6$
13. listopad	$D+1$		13. listopad	$D+2$
13. prosinec	$D+3$		13. prosinec	$D+4$

Podíváme-li se do tabulky, zjistíme, že třinácté dny v měsíci zabírají každý rok (nepřestupný i přestupný) všechny dny v týdnu D, $D+1$, $D+2$, $D+3$, $D+4$, $D+5$, $D+6$, jeden znich je tedy určitě pátek. Na základě tabulky jsme ukázali, že každý rok musí být pátek třináctého.

Důsledky: Pro konkrétní D můžeme z tabulky přímo určit, ve kterých měsících bude pátek třináctého. Např. rok 2002 začal 1. ledna v D=úterý, pátku odpovídá den $D+3$. Rok 2002 není přestupný. Z tabulky zjistíme, že

letos bude pátek třináctého v září a v prosinci.

Z tabulky se dá také poznat, že pátek třináctého může být v jednom kalendářním roce maximálně třikrát (pro nepřestupný rok se opakuje třikrát den $D+1$, rok začíná ve čtvrtek, pro přestupný rok je to den $D+5$, rok začíná v neděli).

Diofantické rovnice

Diofantické rovnice jsou rovnice, jejichž řešení hledáme na množině celých čísel. Jedná se o jednu z významných částí teorie čísel. Formulace problémů je celkem snadná, o to obtížnější je pak vlastní řešení. Objasníme si tuto problematiku na příkladech.

Příklad 1:
Pro která přirozená čísla x, y existuje řešení rovnice $3x^2 - 7y^2 = -1$.

Řešení: První otázkou je, zda-li takové řešení vůbec existuje. Metodou pokus-omyl se snadno přesvědčíme, že řešením jsou $x = 3$, $y = 2$. Existují další řešení této rovnice a kolik jich vlastně dohromady je? Naše rovnice má nekonečně mnoho řešení. Využijeme následující trik: uvažujme identitu $3(55a+84b)^2 - 7(36a+55b)^2 = 3a^2 - 7b^2$. Splňují-li přirozená čísla $x = a$, $y = b$ rovnici $3x^2 - 7y^2 = -1$, pak ji splňují i čísla $x = 55a + 84b$ a $y = 36a + 5b$. Takže z jediného řešení $x = 3$ a $y = 2$ dostaneme nekonečně mnoho řešení. Problémem tedy zůstává jedině ona identita, jejíž nalezení může být obtížné.

Příklad 2:
Rovnice $x^2 = 3 - 8z + 2y^2$ nemá řešení pro celá čísla x, y, z.

Řešení: Budeme postupovat sporem. Předpokládejme, že řešení existuje a odvodíme spor. K tomuto účelu je vhodné počítat obě strany rovnice modulo nějaké číslo. Číslo x^2 je kongruentní $0, 1, 4 \bmod 8$ (tzn. levá strana rovnice po vydělení číslem 8 dává zbytek $0, 1, 4$). Pokud je y sudé, pak pro pravou stranu $3 - 8z + 2y^2$ je kongruentní $3 \bmod 8$ ($8z (\bmod 8) = 0 (\bmod 8)$, $y = 2k$), což nelze. Je-li y liché, pak $3 - 8z + 2y^2$ je kongruentní $5 (\bmod 8)$, což opět nemůže být. Dostali jsme spor s předpokladem a řešení tedy neexistuje.

Obecná teorie pomocí které by bylo možné řešit libovolné diofantické rovnice neexistuje.

Zadání a řešení 3. kola

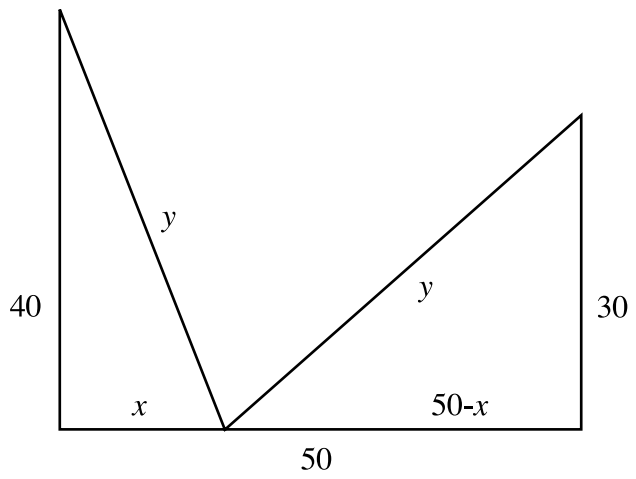
1. Historická úloha (úloha Leonarda Pisánského ze 13. století).
Dvě věže jsou od sebe vzdáleny 50 loktů a jsou 40 loktů a 30 loktů vysoké. Mezi nimi je kašna, k níž se z vrcholů obou věží spustili ve stejný okamžik dva holubi, kteří proletěli stejnou dráhu. Určete vzdálenost kašny od obou věží.

Řešení 1. Situace je znázorněna na obrázku. Vidíme zde dva pravoúhlé trojúhelníky se stejnou přeponou, pro které platí Pythagorova věta:

$$y^2 = 40^2 + x^2, \qquad y^2 = 30^2 + (50 - x)^2$$

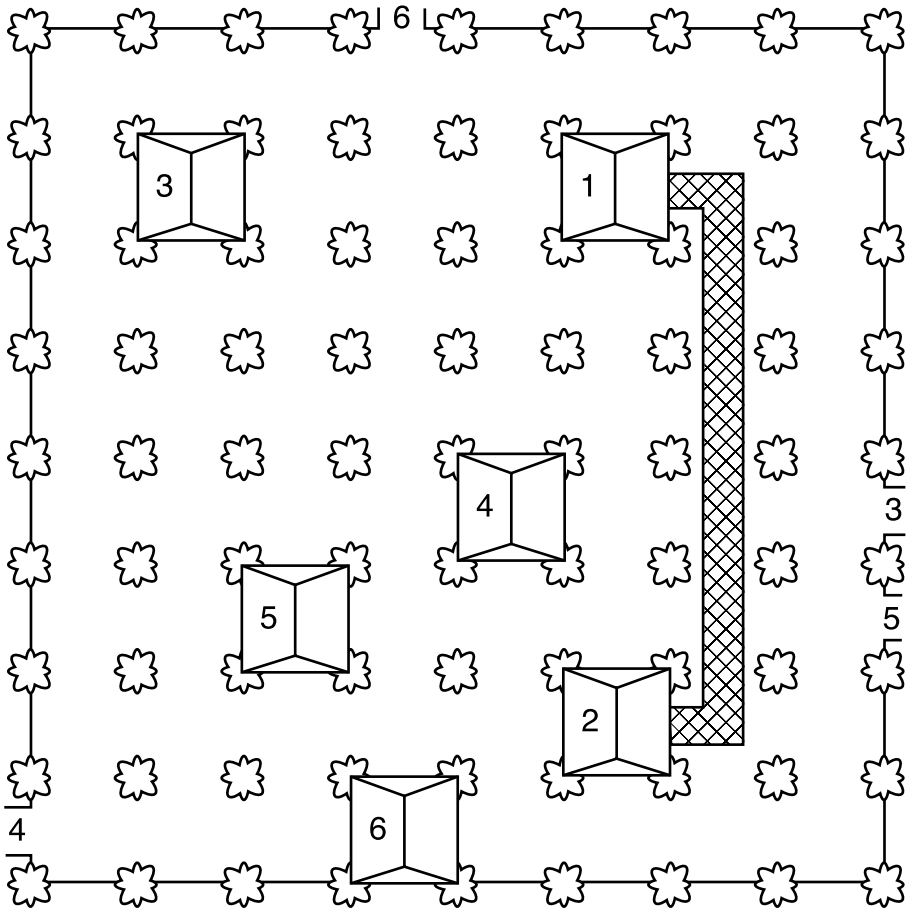
Levé strany se rovnají. Z rovnosti pravých stran postupně dostáváme

$$\begin{aligned} 40^2 + x^2 &= 30^2 + 2500 - 100x + x^2 \\ 100x &= 1800 \\ x &= 18 \end{aligned}$$



Kašna je vzdálena 18 loktů od vyšší věže a 32 loktů od nižší věže.

2. Na čtvercové zahradě roste v pravidelných rozestupech $9 \times 9 = 81$ stromů, které ji rozdělují na 64 stejných malých čtverců (viz. obrázek).

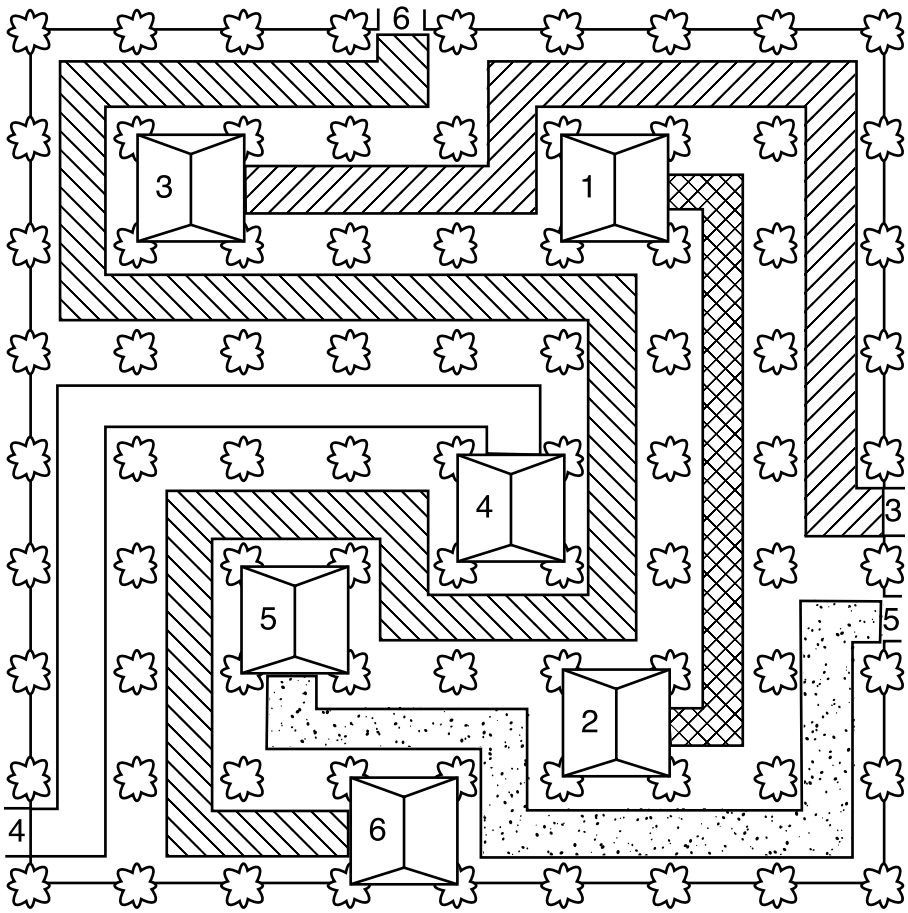


Ve čvercích označených čísly 1 až 6 jsou postaveny domy. Zahrada je ohraničena plotem, který má čtyři brány, označené čísly 3 až 6. Obyvatelé domu 3 se dostávají do zahrady branou číslo 3, podobně obyvatelé domů 4, 5 a 6 se do zahrady dostávají branou se stejným číslem 4, 5 a 6. V domech 1 a 2 žijí lidé, kteří ze zahrady neodcházejí, pouze se mezi sebou navštěvují. Vyšrafovaná část mezi domy 1 a 2 označuje cestu. Obyvatelé domů 3 až 6 se rozhodli, že si taky postaví cesty ke svým domovům a že to udělají následujícím způsobem. Každá cesta bude spojovat dům a bránu se stejným číslem, v každém čtverci bude maximálně jedna cesta a žádné dvě cesty se

nebudou protínat (ani s již existující cestou mezi 1 a 2).

Zjistěte, zda lze takové cesty postavit při splnění všech požadavků. V kladném případě nakreslete, kudy cesty povedou.

Řešení 2. Cesty s uvedenými vlastnostmi postavit lze. Řešení je znázorněno na obrázku.



3. Pět pirátů uloupí poklad se 100 zlatými mincemi. Piráti jsou jednoznačně seřazeni s klesající hodností a podělí se o poklad takto:

Nejvyšší, kapitán, prohlásí, že navrhne rozdělení peněz všem členům posádky, o kterém se bude hlasovat. V případě, že jeho návrh nebude přijatý, bere

si svoji pětinu, tedy 20 zlaťáků, a nechá další rozdělování na nejvyšším podřízeném, prvním důstojníkovi.

V případě, že se první důstojník dostane k rozdělování zbylých 80 zlaťáků (tedy kapitánův návrh byl zamítnut), rozhodne se první důstojník stejně jako před ním kapitán: Navrhne rozdělení, a když není přijato (ostrou) většinou, bere si 20 zlaťáků, a nechá další rozhodnutí na nejvyšším podřízeném, druhém důstojníkovi.

Rozhodovací proces jde rekurzivně dál.

Každý z pirátů je mazaný a sobecký, nezáleží mu na tom, kolik dostanou ostatní, hlavně, když získá sám co nejvíc.

Otázka: Kolik dostane kapitán?

Řešení 3. Označíme si piráty s klesající hodností jako 1. pirát (kapitán), 2. pirát (první důstojník), 3. pirát (druhý důstojník), 4. pirát a 5. pirát. Budeme úlohu řešit odzadu, to znamená, že se nejdříve podíváme jaké rozdělení může nastat v případě, že první tři návrhy na rozdělení budou zamítnuty (v případě zamítnutí všech návrhů dostane každý 20 zlaťáků).

a) 4. pirát rozděluje 40 zlaťáků mezi 2 piráty (4. a 5.). V tomto případě dojde k rozdělení **20:20**. Žádné jiné rozdělení nezíská většinu hlasů (s návrhem musí souhlasit oba dva piráti).

b) 3. pirát rozděluje 60 zlaťáků mezi 3 piráty (3., 4., 5.). 3. pirát může navrhnout rozdělení **39:21:0** nebo **39:0:21**. V obou případech kromě svého hlasu získá i hlas piráta s 21 zlaťáky, který bude souhlasit, protože v případě nesouhlasu může získat maximálně 20 zlaťáků (viz. a)). Pirát s 0 zlaťáky bude přehlasován většinou.

c) 2. pirát rozděluje 80 zlaťáků mezi 4 piráty (2., 3., 4., 5.). Aby 2. pirát získal co nejvíce zlaťáků, musí navrhnout takové rozdělení, se kterým budou souhlasit tři piráti, pouze jeden hlas může být proti. V tomto kroku rozlišíme dva případy.

První případ: 2. pirát předem ví, jaké ze dvou rozdělení navrhne 3. pirát (viz. b)). Předpokládejme pro určitost, že 3. pirát navrhne 39:21:0. V tomto případě může 2. pirát navrhnout rozdělení **57:0:22:1**. Všichni hlasující piráti kromě 3. piráta s tímto návrhem budou souhlasit, protože dostanou více než by dostali, kdyby nesouhlasili.

Druhý případ: 2. pirát předem neví, jak se 3. pirát rozhodne, každý z jeho dvou návrhů může nastat s pravděpodobností 50 je průměrný zisk 4. a

5. piráta 10,5 zlaťáků a mohli by se dát koupit za 11 zlaťáků. 2. pirát navrhne rozdělení **58:0:11:11**.

d) 1. pirát rozděluje 100 zlaťáků mezi 5 pirátů (1., 2., 3., 4., 5.). Aby 1. pirát získal co nejvíce zlaťáků, musí navrhnout takové rozdělení, se kterým budou souhlasit tři piráti, pouze dva hlasy mohou být proti. I v tomto kroku rozlišíme dva případy podle toho, jestli je známo který návrh podá 3. pirát.

První případ: 1. pirát předem ví, jaké rozdělení by navrhni piráti po něm (pro určitost 2. pirát navrhne 57:0:22:1, viz. c)). V tomto případě může 1. pirát navrhnout rozdělení **97:0:1:0:2**. Souhlasit budou piráti 1., 3., 5., proti budou piráti 2. a 4.

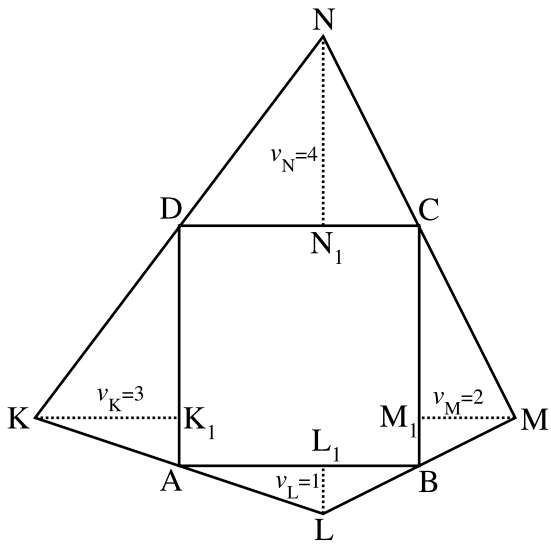
Druhý případ: 1. pirát předem neví, jaký návrh podá 3. pirát, ale ví, že v takovém případě podá 2. pirát návrh 58:0:11:11 (viz. c)). Proto může navrhnout rozdělení **87:0:1:12:0** nebo **87:0:1:0:12**.

Poznámka: Řešení tohoto příkladu hodně závisí na tom, jak budeme chápat jeho zadání. V některých krocích může být další postup ovlivněn tím, jestli jsou piráti spíše více mazaní nebo více sobečtí. Proto není vyloučeno, že může být považováno za správné i jiné řešení, než je uvedeno zde.

Odpověď: Kapitán dostane 87 nebo 97 zlaťáků.

4. K danému čtverci $ABCD$ se stranou $a = 5\,cm$ sestrojte čtyřúhelník $KLMN$ tak, aby body A, B, C, D ležely po řadě uvnitř stran KL, LM, MN, NK, obsahy trojúhelníků ABL, CBM, ADK, DCN byly (v daném pořadí) v poměru 1:2:3:4, a aby součet těchto obsahů byl roven obsahu čtverce $ABCD$.

Řešení 4. Označme si v_K, v_L, v_M, v_N po řadě výšky v trojúhelnících ADK, ABL, CBM, DCN z vrcholů K, L, M, N, paty těchto kolmic označme K_1, L_1, M_1, N_1.



Pro obsahy trojúhelníků platí následující vztahy:

$$S_{ABL} = \frac{1}{2}|AB| \cdot v_L, \qquad S_{CBM} = \frac{1}{2}|CB| \cdot v_M,$$

$$S_{ADK} = \frac{1}{2}|AD| \cdot v_K, \qquad S_{DCN} = \frac{1}{2}|DC| \cdot v_N,$$

Ze zadání příkladu odvodíme další podmínky:

$$S_{ABL} : S_{CBM} : S_{ADK} : S_{DCN} = 1 : 2 : 3 : 4 \tag{8}$$

$$S_{ABL} + S_{CBM} + S_{ADK} + S_{DCN} = a^2 \tag{9}$$

$$|AB| = |CB| = |AD| = |DC| = a = 5 \tag{10}$$

Z podmínek (9) a (10) získáme požadavek na součet výšek

$$v_L + v_M + v_K + v_N = 25,$$

z podmínek (8) a (10) získáme požadavek na poměr výšek

$$v_L : v_M : v_K : v_N = 1 : 2 : 3 : 4,$$

Existuje pouze jediné řešení posledních dvou rovnic

$$v_L = 1, \quad v_M = 2, \quad v_K = 3, \quad v_N = 4.$$

Pravoúhlé trojúhelníky LL_1B a BM_1M jsou podobné. Označíme-li si $x = |L_1B|$, dostaneme z podobnosti

$$\frac{1}{x} = \frac{|M_1B|}{2} \qquad \Rightarrow \qquad |M_1B| = \frac{2}{x}.$$

Z obrázku vidíme, že

$$|M_1C| = 5 - |M_1B| = 5 - \frac{2}{x} = \frac{5x-2}{x}.$$

Analogicky z podobnosti trojúhelníků MM_1C a CN_1N dostaneme

$$\frac{2}{\frac{5x-2}{x}} = \frac{|N_1C|}{4} \qquad \Rightarrow \qquad |N_1C| = \frac{8x}{5x-2},$$

dopočítáme

$$|N_1D| = 5 - |N_1C| = 5 - \frac{8x}{5x-2} = \frac{17x-10}{5x-2},$$

z podobnosti trojúhelníků NN_1D a DK_1K dostaneme

$$\frac{4}{\frac{17x-10}{5x-2}} = \frac{|K_1D|}{3} \qquad \Rightarrow \qquad |K_1D| = \frac{60x-24}{17x-10},$$

dopočítáme

$$|K_1A| = 5 - |K_1D| = 5 - \frac{60x-24}{17x-10} = \frac{25x-26}{17x-10},$$

z podobnosti trojúhelníků KK_1A a AL_1L dostaneme

$$\frac{3}{\frac{25x-26}{17x-10}} = \frac{|L_1A|}{1} \qquad \Rightarrow \qquad |L_1A| = \frac{51x-30}{25x-26},$$

dopočítáme

$$|L_1B| = 5 - |L_1A| = 5 - \frac{51x-30}{25x-26} = \frac{74x-100}{25x-26},$$

ale $|L_1B| = x$. Vyřešíme rovnici

$$\frac{74x-100}{25x-26} = x \quad \Leftrightarrow \quad 25x^2 - 100x + 100 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má jediný dvojnásobný kořen $x = 2$. Nyní známe všechny údaje, které potřebujeme ke zkonstruování čtyřúhelníku $KLMN$.

Konstrukci čtyřúhelníku $KLMN$ provedeme následujícím způsobem. Sestrojíme čtverec $ABCD$ s délkou strany $a = 5$. Vně čtverce ke každé straně AB, BC, CD a DA sestrojíme rovnoběžku p_1, p_2, p_3 a p_4 ve vzdálenosti, která je stejná jako velikost výšky na tutéž stranu čtverce. Uvnitř strany AB sestrojíme bod L_1 jako průsečík úsečky AB a kružnice se středem v B a poloměrem 2. Bodem L_1 vedeme kolmici na stranu AB, průsečík této kolmice s odpovídající rovnoběžkou p_1 označíme L. Spojíme body L a B a průsečík této spojnice s rovnoběžkou p_2 označíme M. Spojíme body M a C a průsečík této spojnice s rovnoběžkou p_3 označíme N. Spojíme body N a D a průsečík této spojnice s rovnoběžkou p_4 označíme K. Spojením bodů K a L získáme hledaný čtyřůhelník $KLMN$.

Poznámka: Teoreticky zde existuje možnost, že některý z vrcholů K, L, M, N může ležet uvnitř čtverce $ABCD$, ale ve všech takových případech zjistíme, že dojdeme ke sporu. Výsledkem těchto úvah pak je, že zkonstruované řešení je jediné.

5. Ukažte, že alespoň jedno z celých čísel a, b, c, splňujících rovnost $a^2 + b^2 = c^2$, je dělitelné třemi.

Řešení 5. Obě strany rovnice budeme uvažovat modulo 3. Číslo, které je dělitelné 3, je kongruentní 0 mod 3 (protože zbytek po vydělení číslem 3 je 0). Ostatní čísla jsou kongruentní 1 mod 3 nebo 2 mod 3. To znamená, že libovolné číslo x lze napsat ve tvaru $x = 3k + l$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a l je 0, 1 nebo 2. Pro číslo x^2 pak platí $x^2 = (3k + l)^2 = 3(3k^2 + 2kl) + l^2$ (pro $l = 0$ nebo 1 je $l^2 = l$ kongruentní l mod 3, pro $l = 2$ je $l^2 = 4$ kongruentní 1 mod 3). Mohou nastat tyto případy:

$$\begin{aligned} x \text{ je kongruentní } 0 \bmod 3 &\Rightarrow x^2 \text{ je kongruentní } 0 \bmod 3, \\ x \text{ je kongruentní } 1 \bmod 3 &\Rightarrow x^2 \text{ je kongruentní } 1 \bmod 3, \\ x \text{ je kongruentní } 2 \bmod 3 &\Rightarrow x^2 \text{ je kongruentní } 1 \bmod 3, \end{aligned}$$

Vraťme se nyní k zadané rovnosti $a^2 + b^2 = c^2$. Vyzkoušíme všechny možnosti dosazení 0 nebo 1 mod 3 za všechny druhé mocniny a zjistíme, že rovnost nastává pouze v těchto případech:

$$0 + 0 = 0 \qquad \bmod 3$$

$$\begin{aligned} 0+1 &= 1 \qquad \mod 3 \\ 1+0 &= 1 \qquad \mod 3 \end{aligned}$$

V prvním případě jsou všechna čísla a, b, c dělitelná 3, v druhém případě je a dělitelné třemi, ve třetím případě je b dělitelné třemi. ukázali jsme, že ve všech možných případech je alespoň jedno z čísel a, b, c dělitelné 3.

Jiný způsob řešení: Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že čísla a, b, c nejsou dělitelná 3. Stejně jako v předchozím řešení odvodíme, že druhá mocnina x^2 čísla x dává zbytek 0 nebo 1 po vydělení 3. Čísla a, b, c nejsou dělitelná 3, to znamená, že a^2, b^2, c^2 dávají zbytek 1 po vydělení 3. Dosadíme do rovnice

$$1 + 1 = 1 \qquad \mod 3$$

Tato rovnost ale neplatí, dostáváme spor. Původní předpoklad neplatí. Alespoň jedno z čísel a, b, c musí být dělitelné 3.

6. Ukažte matematickou indukcí, že pro každé přirozené číslo n platí rovnost

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1).$$

Řešení 6. Ukážeme, že rovnost platí pro $n = 1$. Dosadíme

$$1^2 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 1.$$

Zadaná rovnost platí pro $n = 1$.

Předpokládejme nyní, že rovnost platí pro $n = k$, tj. že platí

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{1}{3}k(2k+1)(2k-1). \tag{11}$$

Chceme ukázat, že pak rovnost platí i pro $n = k + 1$, tj že platí

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2(k+1)-1)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{3}(k+1)(2(k+1)+1)(2(k+1)-1).$$

Budeme upravovat nejdříve levou stranu poslední rovnosti a ukážeme, že se rovná pravé straně rovnosti (najdeme část levé strany L, která je stejná jako levá strana rovnosti (11) a nahradíme ji pravou stranou rovnosti (11)).
$L = 1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2(k+1)-1)^2 = 1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2 = \frac{1}{3}k(2k+1)(2k-1)+(2k+1)^2 = \frac{1}{3}(2k+1)(k(2k-1)+3(2k+1)) = \frac{1}{3}(2k+1)(2k^2-k+6k+3) = \frac{1}{3}(2k+1)(2k+3)(k+1) = \frac{1}{3}(k+1)(2k+3)(2k+1)$.
Úpravou pravé strany dostaneme
$P = \frac{1}{3}(k+1)(2k+3)(2k+1)$.
Dostáváme rovnost $L = P$.

Matematickou indukcí jsme ukázali, že uvedená rovnost platí pro každé přirozené číslo n.

Použitá a doporučená literatura

[**1**] Herman, J., Kučera, R., Šimša, J.; Metody řešení matematických úloh I, 2. vyd.(přepracované), Masarykova univerzita v Brně, Brno, 1996.

[**2**] Kuřina, F., Umění vidět v matematice, 1. vyd., SPN, Praha, 1990.

[**3**] Opava, Z., Matematika kolem nás, 1. vydání, Albatros, Praha, 1989.

[**4**] Singh S., Velká Fermatova věta, 1. vydání, Academia, Praha, 2000.