Příklady k řešení (1. kolo)

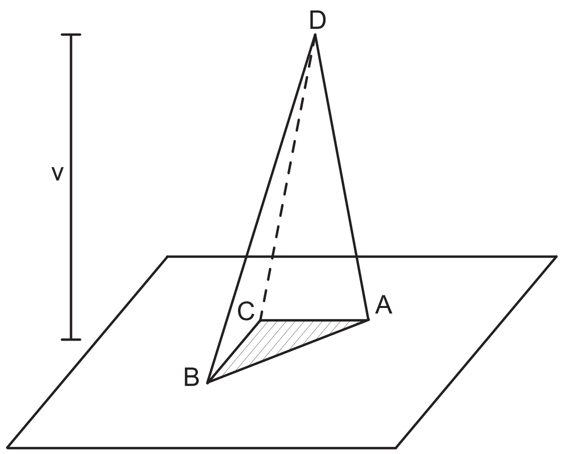
Datum odevzdání 12. prosince 2008

PŘÍKLAD 1.

Vypočtěte velikost strany čtverce $ABCD$ s vrcholem $A = [0, 0]$, jestliže úhlopříčka BD leží na přímce $p : 6x + 8y - 49 = 0$.

PŘÍKLAD 2.

Jsou dány body $A = [2, 0, 0], B = [0, 3, 0], C = [0, 0, 0], D = [2, 3, 8]$. Vypočtěte výšku v čtyřstěnu $ABCD$ na stěnu ABC (viz. obrázek).

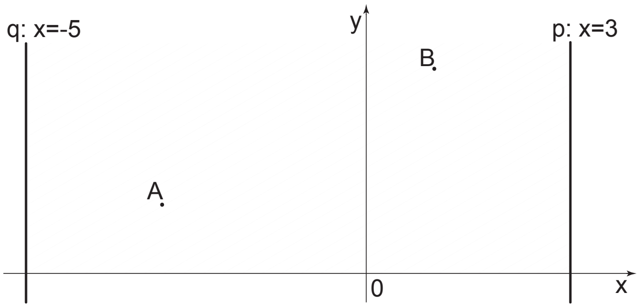


PŘÍKLAD 3.

V každém roce, kromě roku přestupného, je den, který je zvláštní svým zápisem. Pokud napíšeme jeho datum a vynecháme první tečku, pak číslo, které dostaneme, uvádí kolikátým dnem v roce je. Tak například 2. 1. není 21. dnem v roce. Pro který den platí požadovaný počet?

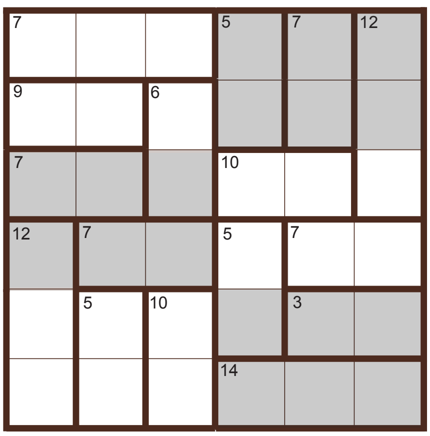
PŘÍKLAD 4.

Jsou dány body $A = [-3, 1], B = [1, 3]$ a přímý pás ohraničený dvěma rovnoběžkami $p : x = 3, q : x = -5$ (viz. obrázek). Určete, které body přímky AB leží uvnitř daného pásu.



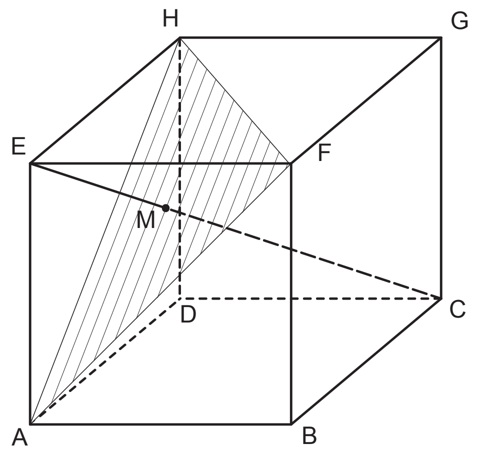
PŘÍKLAD 5.

Samunamupure - pod tímto názvem se skrývá logická hra, která dokáže řádně pocuchat nervy i zarputilým, ostříleným řešitelům. Jaký je princip řešení? Jednotlivá pole vyplňujeme číslicemi 1 až 6, přičemž v každém řádku, sloupci i v každém z 6 obdélníků 3x2 (odlišeny barevným podkladem) musí být každé z těchto čísel zastoupeno právě jedenkrát. Další omezení je v podobě silně orámovaných částí, kde v každé z nich je uvedeno jedno číslo udávající součet všech čísel této části. Zdánlivé ulehčení ve více omezujících podmínkách se rozplyne při vědomí, že začínáte s naprosto prázdným herním polem. Nutno je tak všechny požadavky pořádně promyslet, než se úloha začne ubírat správným směrem.



PŘÍKLAD 6.

Dokažte, že tělesová úhlopříčka CE krychle $ABCDEFGH$ protíná rovinu AFH v bodě M (viz. obrázek), který dělí úsečku CE v poměru $2:1$.



Příklady k řešení (2. kolo)

Datum odevzdání 27. února 2009

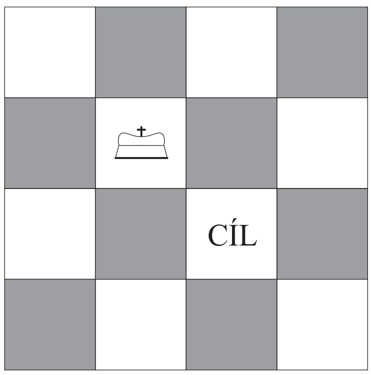
PŘÍKLAD 1.

Napište rovnici kružnice k, která má střed v bodě $S = [5, 4]$ a která na přímce $p : x + 2y - 3 = 0$ vytíná tětivu délky $d = 8$.

PŘÍKLAD 2.

Mějme herní pole v podobě šachovnice o rozměrech 4x4 a jedinou figurku, kterou je král. Připomeňme, že podle šachových pravidel král může v jednom tahu postoupit o právě jedno pole v kterémkoliv z osmi směrů. Zadání úlohy zní takto - přemístit krále z výchozí zobrazené pozice do cíle při splnění následujících podmínek:

- král musí po každém tahu změnit směr cesty,
- král musí navštívit všechna pole šachovnice právě jednou.



PŘÍKLAD 3.

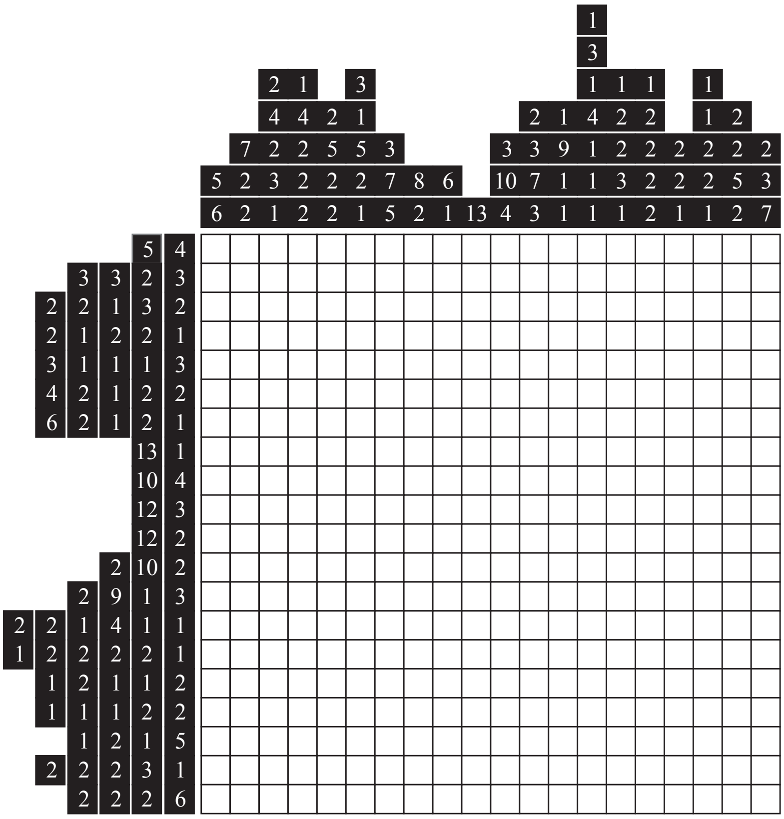
Je dána hyperbola $x^2 - y^2 - 1 = 0$ a bod $M = [0, 1]$. Napište obecné rovnice všech přímek, které procházejí bodem M a mají s danou hyperbolou právě jeden společný bod.

PŘÍKLAD 4.

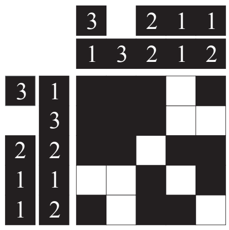
Elipsa má střed v bodě $S = [0, 0]$, hlavní poloosu $a = 5$, vedlejší $b = 3$ a hlavní osu v ose x. Určete úhel tečen vedených v krajních bodech tětivy, která prochází ohniskem $F = [e, 0]$ kolmo k hlavní ose.

PŘÍKLAD 5.

Kódované obrázky (někdy se jim také říká malované křížovky, nebo anglicky griddlers) jsou velice oblíbeným a rozšířeným druhem hlavolamů. Vašim úkolem je vyřešit tento:



Jaký je princip řešení? Čísla, která jsou na okrajích, udávají délky souvislých úseků v daném řádku nebo sloupci, které mají být vybarveny. Pokud je v daném řádku nebo sloupci čísel více, musí být mezi jednotlivými úseky alespoň jedno nevybarvené políčko. Pro lepší pochopení uvádíme jednoduchý vyřešený příklad:



Závěrem ještě dvě rady: vyplatí se začínat od největších čísel, nejlépe pokud jsou větší než polovina šířky křížovky. Pokud zjistíte, že některé políčko určitě nebude vybarveno, je dobré si v něm udělat křížek nebo nějakou jinou značku symbolizující tuto skutečnost. Výsledkem vašeho snažení by měl být obrázek škorpióna.

PŘÍKLAD 6.

Jsou dány body $A = [-2a, 0]$, $B = [0, 0]$ a $C = [a, 0]$, kde $a > 0$. Určete množinu všech bodů, z nichž je vidět úsečky AB, BC pod stejnými úhly.

Příklady k řešení (3. kolo)

Datum odevzdání 4. května 2009

PŘÍKLAD 1.

Z bodu $M = [-2, 2]$ veďte tečny ke křivce $y = x + \dfrac{1}{x}$.

PŘÍKLAD 2.

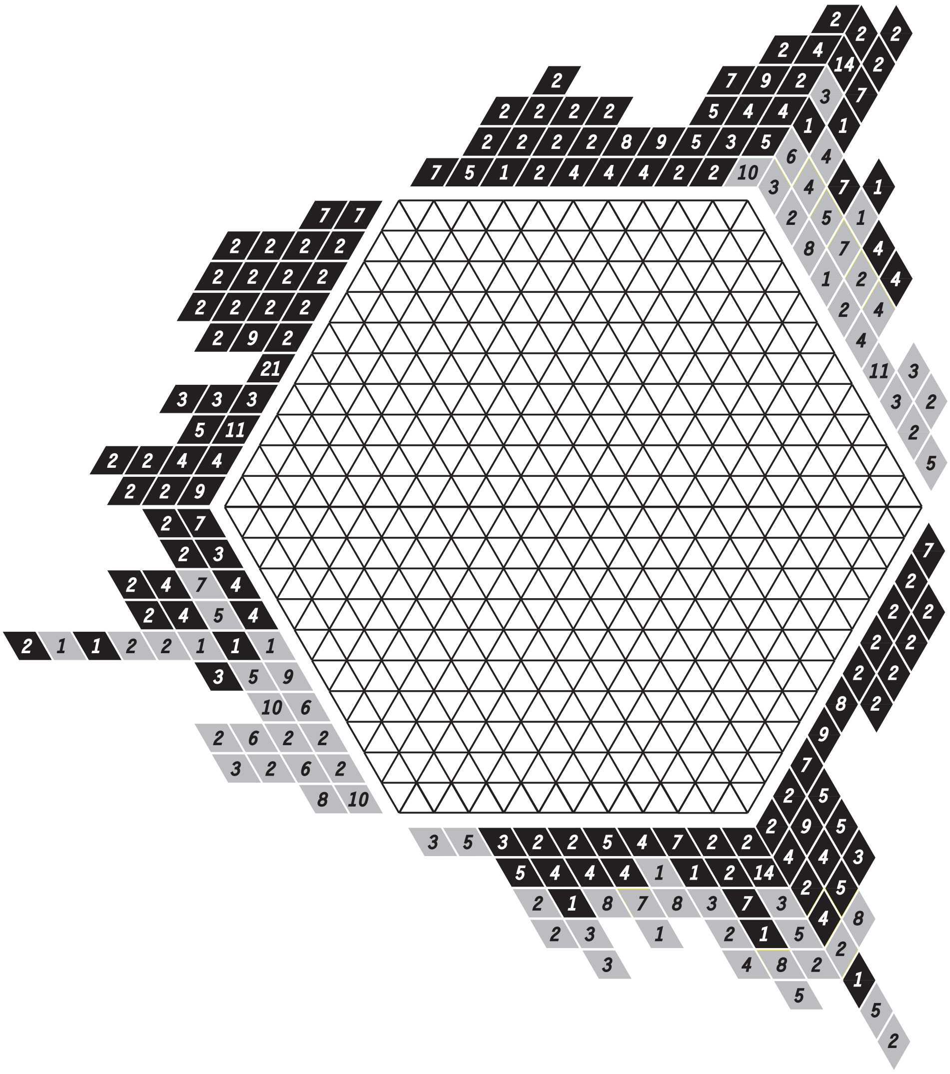
Policejní psovodi Ivan, Jan, Karel, Libor a Mirek se se svými německými ovčáky Jimem, Benem, Samem, Kimem a Rexem zúčastnili závodů (psovody jsme nevyjmenovali ve stejném pořadí jako jejich psy). Soutěž měla dvě disciplíny: hledání ukrytého předmětu a překonávání překážky. Za každou disciplínu bylo maximálně 20 bodů. V první disciplíně získal Ben 19 bodů, Jim 16 a Kim 18. Janův pes byl nejlepší, Liborův získal jen 15 bodů. Ve druhé disciplíně vyhrál Sam s plným počtem 20-ti bodů, Mirkův pes byl hned po něm s 19-ti body, Rex a Kim měli ještě o 4 body méně. Ivanův pes získal 18 bodů. Když viděl ostatní psy, přál si Mirek, aby se jeho psu dařilo jako Benovi. Libor obdivoval Samova psovoda, jak psa dobře připravil. Kolik bodů získal každý pes za obě disciplíny celkem a jak se jmenovali jejich psovodi?

PŘÍKLAD 3.

Na kružnici o rovnici $x^2 + y^2 - 4x = 0$ najděte bod $C = [c_1, c_2]$ tak, aby obdélník ABCD, kde $A = [0, 0], B = [c_1, 0], D = [0, c_2]$, měl maximální obsah.

PŘÍKLAD 4.

Dalším typem kódovaných obrázků jsou tzv. triddlery. Narozdíl od griddleru se nevybarvují čtverečky, ale trojúhelníčky. Jinak je princip řešení v podstatě stejný jako u griddleru. Upozornění: trojúhelníčky různých barev nemusí být odděleny nevybarveným trojúhelníčkem. Náš triddler vám po úspěšném vyřešení zobrazí nepřítele švýcarského sýru.



PŘÍKLAD 5.

Těleso A je umístěno v bodě $[0, 8]$, těleso B v bodě $[7, 0]$. V témže okamžiku se dají obě tělesa do pohybu po osách systému souřadnic směrem k jeho počátku: těleso A rychlostí 1 jednotka ze sekundu, těleso B rychlostí 2 jednotky za sekundu. Po kolika sekundách bude vzdálenost těles nejmenší?

PŘÍKLAD 6.

Ve kterých bodech má graf funkce $f : y = \sin^2 x$ tečnu svírající s osou x úhel $\varphi = 45°$.