Řešení příkladů (1. kolo)

PŘÍKLAD 1.

Vypočteme vzdálenost $d(A,p)$ bodu $A=[0,0]$ od přímky $p: 6x+8y-49=0$. Tím dostaneme polovinu délky úhlopříčky AC i polovinu délky úhlopříčky BD:

$$d(A,p)=\frac{|AC|}{2}=\frac{|BD|}{2}=\frac{|0\cdot 6+0\cdot 8-49|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{49}{10}.$$

Navíc, protože se jedná o čtverec, jsou jeho úhlopříčky na sebe kolmé a vzájemně se půlí, tudíž délku strany AB můžeme následně vypočítat podle Pythagorovy věty:

$$|AB|^2=\left(\frac{|AC|}{2}\right)^2+\left(\frac{|BD|}{2}\right)^2=\frac{2401}{50},$$

a odtud

$$|AB|=\sqrt{\frac{2401}{50}}=\frac{49}{5\cdot\sqrt{2}}=4,9\cdot\sqrt{2}.$$

PŘÍKLAD 2.

Obecná rovnice roviny ϱ, která je určena body A, B a C, má očividně tvar $\varrho: z=0$. Výšku čtyřstěnu $ABCD$ pak vypočteme jako vdálenost $d(D,\varrho)$ bodu D od roviny ϱ:

$$d(D,\varrho)=\frac{|0\cdot 2+0\cdot 3+1\cdot 8|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=8.$$

PŘÍKLAD 3.

Každému měsíci přiřadíme interval, který jeho dnům přiřazuje jejich pořadí v roce. Dále pak z každého měsíce vyberema ta data, která po odstranění teček dají číslo náležející do příslušného intervalu:

měsíc	interval	vybraná data (pořadí v roce)
leden	$[1,31]$	1.1. (1), 2.1. (2), 3.1. (3)
únor	$[32,59]$	3.2. (34), 4.2. (35), 5.2. (36)
březen	$[60,90]$	6.3. (65), 7.3. (66), 8.3. (67)
duben	$[91,120]$	9.4. (99), 10.4. (100), 11.4. (101)
květen	$[121,151]$	12.5. (132), 13.5. (133), 14.5. (134)
červen	$[152,181]$	15.6. (166), 16.6. (167), 17.6. (168)
červenec	$[182,212]$	18.7. (199), 19.7. (200), 20.7. (201)
srpen	$[213,243]$	21.8. (233), 22.8. (234), 23.8. (235)
září	$[244,273]$	24.9. (267), 25.9. (268), **26.9. (269)**
říjen	$[274,304]$	–
listopad	$[305,334]$	3.11. (307)
prosinec	$[335,365]$	–

Z údajů v tabulce vidíme, že hledané datum je 26.9.

PŘÍKLAD 4.

Nejdříve vypočteme směrový vektor $\vec{u} = B - A = (4,2)$ přímky AB a sestavíme její parametrické rovnice:

$$\begin{aligned} AB: \quad & x = -3 + 4t, \\ & y = 1 + 2t; \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vyloučením parametru t získáme obecnou rovnici přímky AB

$$x - 2y + 5 = 0,$$

a odtud vyjádříme

$$y = \frac{x+5}{2}.$$

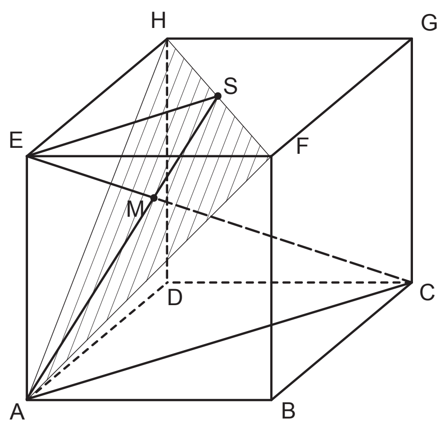
Body přímky AB, které leží uvnitř daného pásu, mají tedy souřadnice $\left[x, \dfrac{x+5}{2}\right]$, kde $x \in (-5,3)$.

PŘÍKLAD 5.

^{7}4	1	2	^{5}3	^{7}6	^{12}5
^{9}3	6	^{6}5	2	1	4
^{7}2	5	1	^{10}6	4	3
^{12}6	^{7}4	3	^{5}1	^{7}5	2
5	^{5}3	^{10}6	4	^{3}2	1
1	2	4	^{14}5	3	6

PŘÍKLAD 6.

Zadanou úlohu převedeme na planimetrický problém v rovině ACE. Protože přímka CE leží v této rovině, náleží do této roviny i bod M. Bod S, jakožto průsečík úhlopříček ve čtverci $EFGH$, je středem úsečky EG, která rovněž leží v rovině ACE. Nyní se soustředíme na trojúhelníky ACM a ESM. Úsečky AC a ES jsou rovnoběžné a bod M leží na úsečce AS. Tudíž platí, že $|\angle MAC| = |\angle MSE|$ a rovněž $|\angle MCA| = |\angle MES|$. Trojúhelníky ACM a ESM tedy mají stejně velké úhly a proto jsou podobné. Využitím této podobnosti a očividného faktu, že $|AC| = 2|ES|$ dostáváme, že $|AM| = 2|MS|$ a hlavně $|CM| = 2|ME|$. Odtud již přímo vidíme, že $|CM| : |ME| = 2 : 1$, což jsme chtěli dokázat.



Řešení příkladů (2. kolo)

PŘÍKLAD 1.

Středem S kružnice k vedeme přímku p', která je kolmá k přímce p. Průsečíkem těchto dvou přímek pak bude bod P, který danou tětivu půlí a jeho vzdálenost od průsečíku P_1 přímky p s kružnicí k tedy bude $d(P, P_1) = 4$. Vzdálenost $d(S, P)$ bodu P od středu S je rovna vzdálenosti bodu S od přímky p:

$$d(S,P) = d(S,p) = \frac{|5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

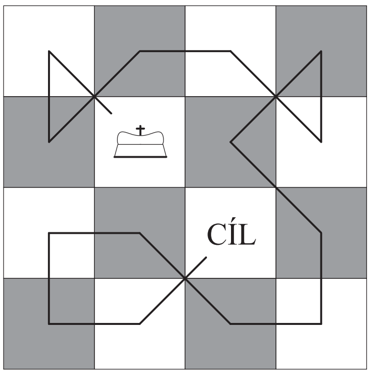
Poloměr r požadované kružnice nyní můžeme vypočítat podle Pythagorovy věty:

$$r = \sqrt{d(P,P_1)^2 + d(S,P)^2} = \sqrt{16 + 20} = 6.$$

Nyní již známe jak střed, tak i poloměr kružnice k a můžeme tedy napsat její středovou rovnici $k : (x-5)^2 + (y-4)^2 = 36$. Tuto rovnici můžeme dále upravit na obecnou rovnici kružnice $k : x^2 + y^2 - 10x - 8y + 5 = 0$.

PŘÍKLAD 2.

Cesta krále splňující zadané podmínky může vypadat například takto:



PŘÍKLAD 3.

Obecná rovnice přímky v rovině je $ax + by + c = 0$. Dosazením bodu $M = [0, 1]$ do této rovnice dostaneme $c = -b$, takže hledané přímky budou mít obecné rovnice tvaru

$$ax + by - b = 0. \tag{1}$$

Navíc je zřejmé, že pro danou hyperbolu hledané přímky nemůžou být rovnoběžné se souřadnicovými osami, takže musí platit $a \neq 0$, $b \neq 0$. Odtud můžeme vyjádřit

$$x = \frac{b}{a}(1 - y).$$

Dosazením tohoto vztahu do rovnice hyperboly dostaneme

$$\frac{b^2}{a^2}(1 - y)^2 - y^2 - 1 = 0$$

a odtud po jednoduchých úpravách

$$(b^2 - a^2)y^2 - 2b^2y + b^2 - a^2 = 0. \tag{2}$$

Nyní stačí vyřešit, kdy má tato kvadratická rovnice proměnné y právě jedno řešení v závislosti na koeficientech a, b. To nastane v následujících dvou případech:

a) Diskriminant rovnice (2) je roven nule, tj.

$$D = 4b^4 - 4(b^2 - a^2)^2 = 8a^2b^2 - 4a^4 = 0,$$

což je splněno pro

$$a = \pm b\sqrt{2}.$$

Dosazením posledních rovností do (1) a položením $b = 1$ dostaneme rovnice prvních dvou přímek, které mají s danou hyperbolou právě jeden společný bod:

$$p_1 : x\sqrt{2} + y - 1 = 0, \qquad p_2 : -x\sqrt{2} + y - 1 = 0.$$

Poznámka: Přímky p_1 a p_2 jsou tečnami hyperboly $x^2 - y^2 - 1 = 0$.

b) Koeficient u kvadratického členu rovnice (2) je roven 0. Pak má rovnice (2) očividně jediné řešení $y = 0$. To nastane v případě, že

$$b^2 - a^2 = 0,$$

odkud

$$a = \pm b.$$

Opět dosazením posledních rovností do (1) a položením $b = 1$ dostaneme rovnice zbývajících dvou přímek, které mají s danou hyperbolou právě jeden společný bod:

$$p_3 : x + y - 1 = 0, \quad p_4 : -x + y - 1 = 0.$$

Poznámka: Přímky p_3 a p_4 jsou rovnoběžné s asymptotami hyperboly $x^2 - y^2 - 1 = 0$.

PŘÍKLAD 4.

Z údajů v zadání příkladu snadno sestavíme středovou rovnici dané elipsy:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Její excentricitu e vypočteme ze vztahu

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4,$$

což znamená, že ohnisko $F = [4, 0]$. Odtud plyne, že tětiva elipsy vedená ohniskem F kolmo k hlavní ose elipsy má obecnou rovnici

$$x = 4.$$

Průsečíky této tětivy s danou elipsou, a tedy body dotyku hledaných tečen, jsou body $T_1 = \left[4, -\frac{9}{5}\right]$ a $T_2 = \left[4, \frac{9}{5}\right]$. Tečny k elipse v těchto bodech pak mají směrnicové rovnice

$$t_1 : y = -\frac{4}{5}x + 5, \quad t_2 : y = \frac{4}{5}x + 5.$$

Úhel φ, který svírají tyto dvě přímky, vypočteme ze vztahu

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|,$$

kde k_1, resp. k_2 je směrnice tečny t_1, resp. t_2. Po dosazení dostáváme

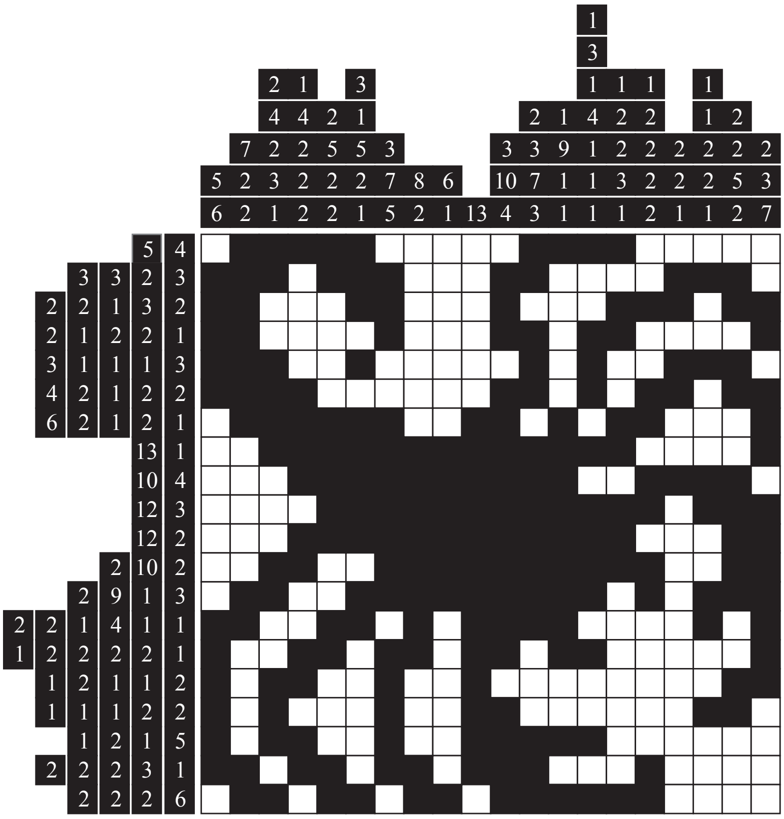
$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{-0,8 - 0,8}{1 - 0,8 \cdot 0,8} \right| = \frac{40}{9},$$

a odtud

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{40}{9} \doteq 77°19'.$$

PŘÍKLAD 5.

Správné řešení kódovaného obrázku vypadá takto:

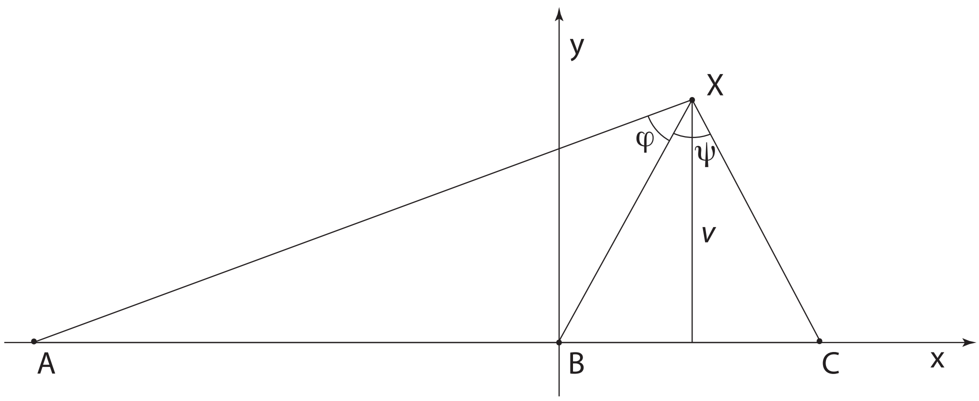


PŘÍKLAD 6.

Buď $X = [x_1, x_2]$ libovolný bod v rovině. Předpokládejme nejdříve, že $x_2 = 0$, tj. bod X leží na ose x. Pokud je v tomto případě $x_1 \leq -2a$, nebo $x_1 = 0$, nebo $x_1 \geq a$, pak je očividné, že z těchto bodů jsou úsečky AB a BC vidět pod stejným úhlem $\varphi = 0°$. Pokud $-2a < x_1 < 0$, je úsečka AB vidět z bodu X pod úhlem $180°$ a úsečka BC pod úhlem $0°$. Pokud $-0 < x_1 < a$, pak je pro změnu úsečka AB vidět z bodu X pod úhlem $0°$ a úsečka BC pod úhlem $180°$.

Nyní předpokládejme, že $x_2 \neq 0$ a že z bodu X jsou úsečky AB a BC

vidět pod stejně velkými úhly $\varphi = \psi$. Body A, B, C a X vytvoří dva trojúhelníky, které mají společnou výšku délky v_x, viz. obrazek níže.



Podíváme se nejdříve na trojúhelník ABC a vyjádříme si jeho obsah pomocí výšky v_x a délky strany $|AB|$:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{|AB| \cdot v_x}{2}.$$

Obsah stejného trojúhelníku ovšem můžeme vyjádřit i pomocí délek stran $|AX|$ a $|BX|$ a $\sin \varphi$:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{|AX| \cdot |BX| \cdot \sin \varphi}{2}.$$

Porovnáním obou rovnic pro $S_{\Delta ABC}$ dostaneme po drobných úpravách

$$v_x = \frac{|AX| \cdot |BX| \cdot \sin \varphi}{|AB|}.$$

Pokud provedeme analogické úvahy pro obsah trojúhelníku BCX, dostaneme pro výšku v_x rovnici

$$v_x = \frac{|CX| \cdot |BX| \cdot \sin \psi}{|BC|}.$$

Obě rovnice pro výšku v_x můžeme opět porovnat a po dosazení $|AB| = 2a$ a $|BC| = a$ dostaneme vztah

$$|AX| = 2|CX|.$$

Ovšem $|AX| = \sqrt{(x_1 + 2a)^2 + x_2^2}$, $|CX| = \sqrt{(x_1 - a)^2 + x_2^2}$. Pro souřadnice bodu X tedy musí platit

$$\sqrt{(x_1 + 2a)^2 + x_2^2} = 2\sqrt{(x_1 - a)^2 + x_2^2}.$$

Úpravou poslední rovnice dostaneme

$$x_1^2 - 4ax_1 + x_2^2 = 0,$$

což je rovnice kružnice, která po úpravě na středový tvar přejde na rovnici

$$(x_1 - 2a)^2 + x_2^2 = 4a^2.$$

Závěr: Úsečky AB a BC jsou vidět pod stejnými úhly ze všech bodů kružnice k se středovou rovnicí $k : (x - 2a)^2 + y^2 = 4a^2$ a dále ze všech bodů, které leží na polopřímkách opačných k polopřímkám AB a CB.

Řešení příkladů (3. kolo)

PŘÍKLAD 1.

Buď $P = [p_1, p_2]$ bod dotyku hledané tečny. Směrnice tečny k dané křivce v bodě P je pak

$$k = f'(p_1).$$

Tato směrnice je ale zároveň i směrnicí přímky MP, tedy

$$k = \frac{p_2 - 2}{p_1 + 2}.$$

Z rovnosti obou výrazů pro směrnici k a z podmínky, že bod P leží na dané křivce pak dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{p_1^2} &= \frac{p_2 - 2}{p_1 + 2}, \\ p_2 &= p_1 + \frac{1}{p_1}. \end{aligned}$$

Tato soustava má dvě řešení, $P_1 = [1, 2]$, $P_2 = [-0,5; -2,5]$, a příslušné směrnice tečen jsou tedy $k_1 = 0$, $k_2 = -3$. Rovnice hledaných tečen pak jsou $t_1 : y - 2 = 0$, $t_2 : 3x + y + 4 = 0$.

PŘÍKLAD 2.

Z vět "...vyhrál Sam s plným počtem 20-ti bodů, Mirkův pes byl hned po něm s 19-ti body, Rex a Kim měli ještě o 4 body méně" a "Ivanův pes získal 18 bodů" lze snadno odvodit, že Mirek a Ivan mohli cvičit jen Bena a Jima. Ale dále se dozvídáme, že "Mirek si přál, aby se jeho psu dařilo jako Benovi", takže jeho psem byl Jim a celkem získali 35 bodů. Ivanovým psem pak musel být Ben a celkem získali 37 bodů. Dále víme, že "Janův pes byl nejlepší" v první disciplíně. Protože to již nemůže být Ben, tak jeho psem je buď Sam nebo Rex a za první disciplínu získali 20 bodů. Dále "..., Liborův pes získal jen 15 bodů," takže Liborovým psem nemůže být Kim a musí to rovněž být Sam nebo Rex. Psovodem Kima je tedy Karel a celkem získali 33 bodů. Ovšem "Libor obdivoval Samova psovoda, ...", takže Liborovým psem je Rex a získali celkem 30 bodů. Poslední dvojici pak tvoří Jan a Sam a jejich celkový zisk byl 40 bodů.

PŘÍKLAD 3.

Kružnice $x^2 + y^2 - 4x = 0$ na střed v bodě $S = [2, 0]$. Bod C leží na této kružnici a tudíž musí platit

$$c_2^2 = 4c_1 - c_1^2.$$

Pro obsah P hledaného obdélníku tedy platí

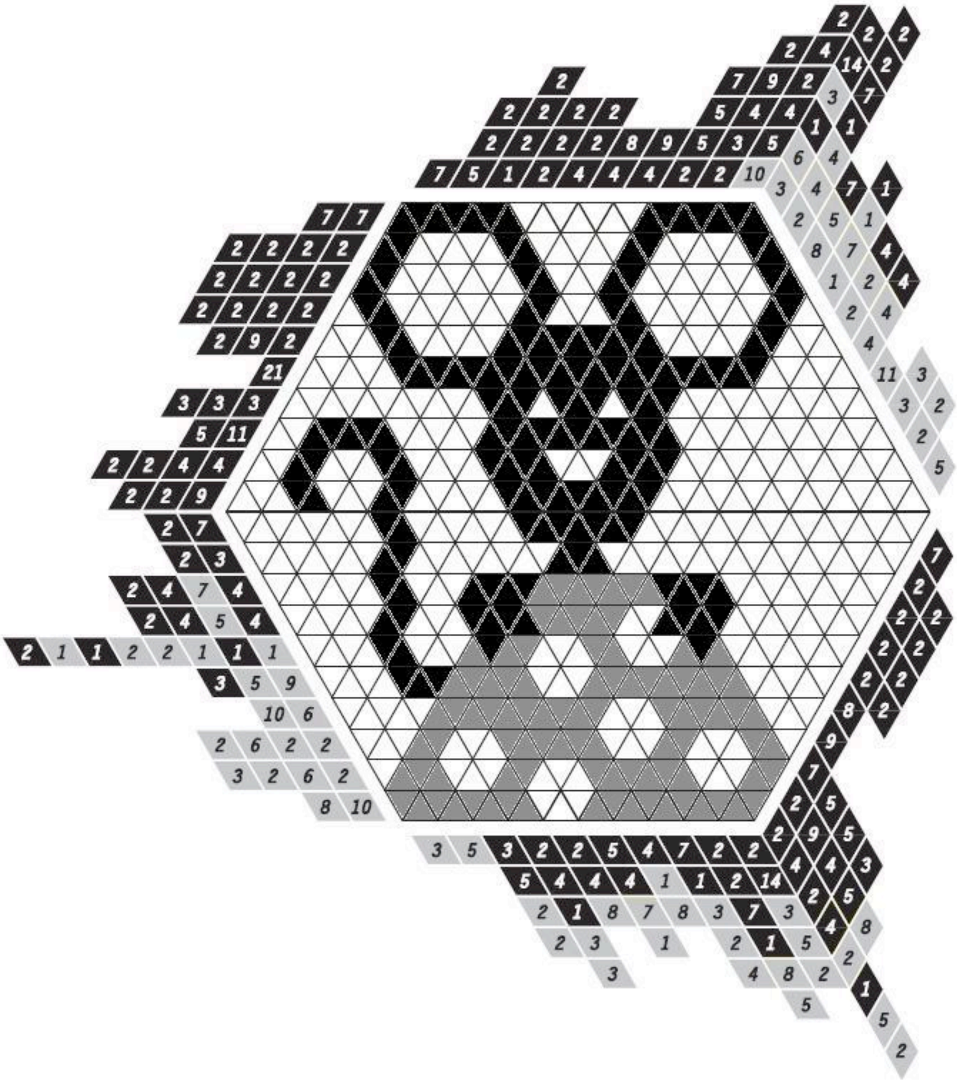
$$P(c_1) = |c_1c_2| = c_1\sqrt{4c_1 - c_1^2}.$$

Abychom nalezli, kdy je obsah P maximální, vyjádříme si jeho derivaci

$$P'(c_1) = \sqrt{4c_1 - c_1^2} + \frac{c_1(4 - 2c_1)}{2\sqrt{4c_1 - c_1^2}} = \frac{2c_1(3 - c_1)}{\sqrt{4c_1 - c_1^2}}.$$

Maximum P může nastat pouze v těch bodech, ve kterých je derivace P' rovna 0, nebo v nichž neexistuje. Takovéto body jsou dva, a to $c_{11} = 0$ a $c_{12} = 3$. Na dané kružnici tedy máme celkem tři podezřelé body, $C_1 = [0, 0]$, $C_2 = [3, \sqrt{3}]$ a $C_3 = [3, -\sqrt{3}]$. Bod C_1 ovšem splývá s bodem A a tudíž nepřichází v úvahu. Snadno ověříme, že obdélníky ABC_2D_2 a ABC_3D_3, kde $D_2 = [0, \sqrt{3}]$ a $D_3 = [0, -\sqrt{3}]$, mají stejný obsah $P = 3\sqrt{3}$. Hledané body jsou tedy na dané kružnici dva.

PŘÍKLAD 4.



PŘÍKLAD 5.

Těleso A se pohybuje po ose y a jeho vzdálenost od počátku je vyjádřena funkcí

$$f_A(t) = 8 - t.$$

Podobně těleso B se pohybuje po ose x jeho vzdálenost od počátku je vyjádřena funkcí

$$f_B(t) = 7 - 2t.$$

Vzdálenost tělesa A od tělesa B je pak popsána vztahem

$$f_{AB}(t) = \sqrt{f_A^2(t) + f_B^2(t)} = \sqrt{5t^2 - 44t + 113}.$$

Abychom zjistili, kdy je tato vzdálenost minimální, vyjádříme derivaci funkce $f_{AB}(t)$:

$$f'_{AB}(t) = \frac{1}{2}(5t^2 - 44t + 113)^{-1/2}(10t - 44) = \frac{5t - 22}{\sqrt{5t^2 - 44t + 113}}.$$

Minimum funkce $f_{AB}(t)$ může nastat pouze v těch bodech, ve kterých platí $f'_{AB}(t) = 0$ nebo v nichž derivace $f'_{AB}(t)$ neexistuje. Takovýto bod je ovšem jediný, a to $t = 4,4$.
Nejmenší vzdálenost mezi tělesy A, B je tedy $4,4$ sekundy od začátku pohybu. V tomto čase se těleso A nachází v bodě $A = [0; 3,6]$ a těleso B je v bodě $B = [-1,8; 0]$.

PŘÍKLAD 6.

Hodnota první derivace $f'(x_0)$ v bodě x_0 je rovna směrnici k tečny t grafu funkce f v bodě $T_0 = [x_0, f(x_0)]$, tedy

$$k = f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi.$$

Protože $\varphi = 45°$, hledáme ty body x, ve kterých platí $f'(x) = 1$. Odtud

$$f'(x) = 2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi = 1,$$

$$2\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Hledaných bodů na grafu funkce f je tedy nekonečně mnoho a jsou to všechny body $T = [\pi/4 + k\pi]$, kde $k \in \mathbb{Z}$.