Příklady k řešení (1. kolo)

Datum odevzdání 14. prosince 2007

PŘÍKLAD 1.

Je dána soustava rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} px & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & py & + & z & = & p \\ x & + & y & + & pz & = & p^2, \end{array}$$

kde x, y, z jsou neznámé a p je reálný parametr. Proveďte diskuzi řešení soustavy vzhledem k parametru p.

PŘÍKLAD 2.

Doly A, B měly stejný plán těžby a vytěžily dohromady 134 tun nad plán. Zásluhu na tom měl však pouze důl A, který překročil plán o 2%, kdežto důl B zůstal o 1% pod plánem. Kolik tun měly oba doly plánováno a kolik skutečně vytěžily?

PŘÍKLAD 3.

V následujícím algebrografu nahraďte písmena číslicemi 0 až 9 tak, aby všechny naznačené početní operace byly správné. Různá písmena představují různé číslice.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{RON} & + & \mathbf{LTP} & = & \mathbf{PQR} \\ : & & + & & - \\ \mathbf{M} & \times & \mathbf{NQ} & = & \mathbf{LR} \\ = & & = & & = \\ \mathbf{KS} & + & \mathbf{LMO} & = & \mathbf{LPT} \end{array}$$

PŘÍKLAD 4.

Trojciferné číslo má ciferný součet 21. Jestliže v tomto čísle zaměníme číslice stovek a desítek, číslo se zmenší o 180. Jestliže zaměníme číslice desítek a jednotek, číslo se zvětší o 36. Určete toto číslo.

PŘÍKLAD 5.

Představte si, že by lidé měli na každé ruce pouze 4 prsty, a tudíž by místo do desíti počítali jen do osmi. 10 by v tomto početním systému bylo rovno současným 8 a 100 rovno nynějším 64. Jak v tomto osmičkovém systému vyjádříte letošní rok 2007?

PŘÍKLAD 6.

Učitel matematiky nechal za trest po škole dva nepozorné žáky, Frantu a Tondu. Z velké krabice před ně na lavici vysypal hromadu vystříhaných různých pravoúhlých trojúhelníků a řekl jim:

"Všechny tyto trojúhelníky mají obvod maximálně 40 cm. Vaším úkolem je vybrat z této hromady ten, jehož rozměry mám napsané v kapse na lístku. Délky jeho odvěsen jsou přirozená čísla. Navíc Tobě Franto řeknu, jaký je součet délek těchto odvěsen, a Tobě Tondo, jak je dlouhá jeho přepona. Ale pozor! Jeden druhému nesmíte žádným způsobem prozradit, co jste se ode mne dozvěděli. A dále, dokud nebudete znát rozměry hledaného trojúhelníku, nesmíte je nijak měřit."

Protože oba žáci dobře věděli, že je učitel propustí, až úkol splní, vrhli se ihned do jeho řešení a proběhl mezi nimi následující rozhovor:

Tonda: "Nevím, který je to trojúhelník."
Franta: "Nevím, který je to trojúhelník."
Tonda: "Nevím, který je to trojúhelník."
Franta: "Nevím, který je to trojúhelník."
Tonda: "Nevím, který je to trojúhelník."
Franta: "Nevím, který je to trojúhelník."
Tonda: "Sláva, nyní už vím, který trojúhelník to má být!"

Za chvíli již Franta s Tondou kráčeli spokojeně ze školy domů. Víte i vy, jaké byly rozměry trojúhelníku, který měli najít?

Příklady k řešení (2. kolo)

Datum odevzdání 29. února 2008

PŘÍKLAD 1.

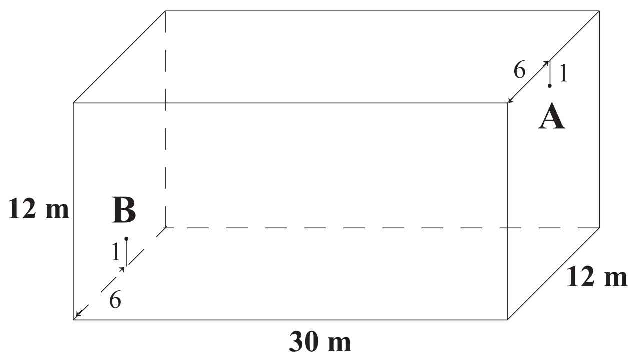
Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu, který je vymezen rovinami $z = 0$, $z = 3$, $3x + 3y - 2z = 0$, $3x + 3y - 2z - 6 = 0$, $3x - z - 3 = 0$ a $3x - z = 0$.

PŘÍKLAD 2.

Ve dvou stejných třicetilitrových nádobách je dohromady 30 litrů lihu. První nádoba byla doplněna vodou a vzniklou směsí je doplněna druhá nádoba. Nakonec je 12 litrů nové směsi přelito z druhé do první nádoby. Kolik lihu bylo původně v každé nádobě, jestliže je nakonec ve druhé nádobě o 2 litry lihu méně než v první nádobě?

PŘÍKLAD 3.

Na obrázku níže je znázorněna místnost 30 m dlouhá, 12 m široká a 12 m vysoká. V bodě A na pravé boční stěně metr od stropu, ve středu šířky, sedí pavouk. V bodě B na levé boční stěně metr od podlahy a opět ve středu šířky sedí moucha. Kolik metrů měří nejkratší možná cesta pavouka k mouše, jestliže může pouze lézt po stěnách, stropu nebo podlaze?



PŘÍKLAD 4.

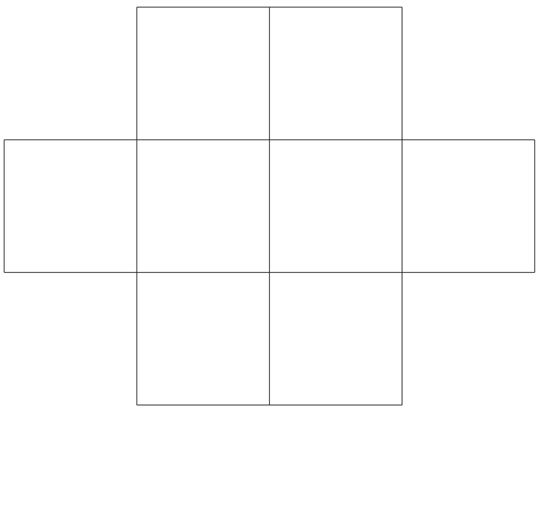
V krychli s hranou 15 cm je náhodně rozmístěno 2198 bodů. Dokažte, že mezi nimi existují 2 body, jejichž vzdálenost je menší než 2 cm.

PŘÍKLAD 5.

Z kanceláře organizátorů KOSa v nestřeženém okamžiku někdo ukradl zadání příkladů pro druhé kolo. Pátráním se okruh podezřelých zúžil na tři osoby - Horáka, Nováka a Svobodu. Z výslechů vyplynulo, že pokud byl v kritické době na místě činu Svoboda, pak tam nebyl Horák, ale byl tam Novák. Dále není pravda, že na místě činu nebyl Horák a přitom tam nebyl Svoboda. V době, kdy byl na místě činu Horák, nebyl tam Svoboda, a když tam nebyl Svoboda, byl tam Horák. Protože tyto výpovědi čin neobjasnily, vyšetřovalo se dál. Bezpečně se zjistilo, že pachatel byl v kritické době na místě činu sám. Bylo možné nyní zatknout zloděje? Kdo to byl?

PŘÍKLAD 6.

Archeologové narazili v indické džungli na zpola rozpadlý palác. Když prozkoumali spletité bludiště chodeb a síní, našli na jedné stěně vytesaný kříž, rozdělený do osmi polí. V každém poli bylo jedno z prvních osmi čísel. Badatel, který kříž objevil, chvíli uvažoval, co mají znamenat čísla vepsaná do jednotlivých polí kříže. Nakonec usoudil, že je to zřejmě jeden z nejstarších hlavolamů. Čísla od 1 do 8, přičemž se žádné neopakuje, byla rozmístěna s podivuhodným důmyslem. Rozdíl mezi kterýmikoliv dvěma sousedními čísly byl vždy nejméně 2 jednotky. Nejen ve směru vodorovném a svislém, ale i úhlopříčném. Tak zní úvodní příběh. A teď je na vás, abyste se pokusili vepsat čísla 1 až 8 do křížového obrazce podle výše uvedeného pravidla. V sousedním poli žádného čísla nesmí stát číslo jen o jedničku větší či menší. Rozdíl musí být vždy alespoň dva.



Příklady k řešení (3. kolo)

Datum odevzdání 30. dubna 2008

PŘÍKLAD 1.

V komplexním oboru řešte kvadratickou rovnici s komplexními koeficienty

$$x^2 - (2+i)x - 1 + 7i = 0$$

.

PŘÍKLAD 2.

Pepík, Jirka a Karel přišli do školy v bundách, na kterých měli každý jednu cifru: Pepík 3, Jirka 1 a Karel 6. Když se postavili vedle sebe, vzniklo číslo 316. Milan se s nimi vsadil, že je dokáže postavit tak, aby vzniklo trojciferné číslo, které je bezezbytku dělitelné sedmi. Jak to udělal?

PŘÍKLAD 3.

Pomocí goniometrického a exponenciálního vyjádření komplexních čísel, případně pomocí Moivrovy věty dokažte vztahy

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(3\alpha) = \sin\alpha\,(4\cos^2\alpha - 1).$$

PŘÍKLAD 4.

Na březích řeky jsou naproti sobě dvě palmy. Výška jedné je 30 m, druhé 20 m. Vzdálenost jejich kmenů je 50 m. Na vrcholku každé palmy sedí pták. Najednou oba ptáci uvidí ve vodě rybu, vrhnou se za ní a doletí k ní současně. V jaké vzdálenosti od vyšší palmy se objevila ryba?

PŘÍKLAD 5.

Komplexní čísla a, b, c, d, e, f znázorněná v Gaussově komplexní rovině tvoří vrcholy pravidelného šestiúhelníku, který má střed v počátku soustavy souřadnic a jeden vrchol v bodě $A = (-3, 3\sqrt{3})$. Napište všechna čísla $a, b, c, d,$ e, f v algebraickém tvaru.

PŘÍKLAD 6.

Mezi komplexními čísly x, které vyhovují nerovnosti $|25i - x| \leq 15$, určete to číslo, jehož argument goniometrického tvaru je nejmenší.