Řešení příkladů (1. kolo)

PŘÍKLAD 1.

Příklad vyřešíme pomocí elementárních řádkových úprav rozšířené matice soustavy (tzv. Gaussova eliminační metoda). Abychom v případě potřeby mohli řádky matice násobit čísly p a $1/p$, musíme předpokládat $p \neq 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 & p \\ 1 & 1 & p & p^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & p & p^2 \\ 1 & p & 1 & p \\ p & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & p & p^2 \\ 0 & p-1 & 1-p & p-p^2 \\ 0 & p-1 & p^2-1 & p^3-1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & p & p^2 \\ 0 & p-1 & 1-p & p-p^2 \\ 0 & 0 & (p-1)(p+2) & (p-1)(p+1)^2 \end{array}\right).$$

Je-li $p = -2$, pak poslední matice bude mít tvar

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Je ihned vidět, že v tomto případě hodnost matice soustavy je rovna 2, zatímco hodnost rozšířené matice soustavy je 3. Tedy podle Frobeniovy věty soustava pro $p = -2$ nemá řešení.

Pokud $p = 1$, pak výše zmíněná poslední matice bude mít tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

V tom případě daná soustava má nekonečně mnoho řešení $x = s$, $y = t$, $z = 1 - s - t$, kde s, t jsou libovolná reálná čísla.

Konečně, je-li $p \notin \{-2, 0, 1\}$, budeme v úpravách ještě dále pokračovat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & p & p^2 \\ 0 & p-1 & 1-p & p-p^2 \\ 0 & 0 & (p-1)(p+2) & (p-1)(p+1)^2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & p & p^2 \\ 0 & 1 & -1 & -p \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(p+1)^2}{p+2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{p}{p+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{p+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(p+1)^2}{p+2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{p+1}{p+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{p+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(p+1)^2}{p+2} \end{array}\right).$$

Pokud $p = 0$, pak elementární řádkové úpravy v rozšířené matici soustavy budeme dělat takto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Řešení soustavy pro $p \notin \{-2, 1\}$ je tedy $x = -\frac{p+1}{p+2}$, $y = \frac{1}{p+2}$, $z = \frac{(p+1)^2}{p+2}$.

PŘÍKLAD 2.

Označme plán jednoho dolu jako x. V tom případě první důl vytěžil $1,02x$, druhý $0,99x$ a oba doly dohromady $2x + 134$. Celkově tedy dostáváme jednoduchou rovnici

$$\begin{aligned} 1,02x + 0,99x &= 2x + 134 \\ 0,01x &= 134 \\ x &= 13400. \end{aligned}$$

Každý z dolů měl tedy naplánováno vytěžit 13400 tun. Důl A ovšem vytěžil 13668 tun, zatímco důl B pouze 13266 tun.

PŘÍKLAD 3.

Při řešení zadaného algebrografu lze postupovat například takto:

1) $\mathbf{PQR} - \mathbf{LR} = \mathbf{LPT} \Longrightarrow \mathbf{T} = \mathbf{R} - \mathbf{R} = 0$, $\mathbf{L} > \mathbf{Q}$, $\mathbf{P} = \mathbf{L} + 1$,
2) $\mathbf{RON} + \mathbf{LTP} = \mathbf{PQR} \Longrightarrow \mathbf{N} + \mathbf{P} = \mathbf{R} + 10$, $\mathbf{O} + \mathbf{T} + 1 =$
   $= \mathbf{O} + 1 = \mathbf{Q}$, $\mathbf{R} + \mathbf{L} = \mathbf{P}$,
3) $(\mathbf{P} = \mathbf{L} + 1 \wedge \mathbf{R} + \mathbf{L} = \mathbf{P}) \Longrightarrow \mathbf{L} + 1 = \mathbf{L} + \mathbf{R} \Longrightarrow \mathbf{R} = 1$,
4) $\mathbf{LTP} + \mathbf{NQ} = \mathbf{LMO} \Longrightarrow \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{O} + 10$, $\mathbf{T} + \mathbf{N} + 1 =$
   $= \mathbf{N} + 1 = \mathbf{M}$,
5) Protože $\mathbf{R} = 1$ a $\mathbf{M} \times \mathbf{NQ} = \mathbf{LR}$, musí platit, že $\mathbf{M} \times \mathbf{Q}$ je dvojciferné číslo končící jedničkou. Ovšem 11, 31, 41, 61 a 71 jsou pročísla

a čísla 51, 91 prozměnu nelze rozložit na součin dvou jednociferných čísel, tudíž je můžeme všechny ihned vyloučit. Číslo 81 lze rozložit jedině jako 9×9, ale protože $\mathbf{M} \neq \mathbf{Q}$, můžeme ho rovněž vyloučit. To znamená, že $\mathbf{M} \times \mathbf{Q} = 21$ odkud $\mathbf{M} = 3$, $\mathbf{Q} = 7$ nebo $\mathbf{M} = 7$, $\mathbf{Q} = 3$, a dále $\mathbf{M} \times \mathbf{N} + 2 = \mathbf{L}$.

6) Protože $\mathbf{M} \times \mathbf{N} + 2$ je jednociferné číslo a $\mathbf{N} + 1 = \mathbf{M}$, nemůže být $\mathbf{M} = 7$, tedy musí platit $\mathbf{M} = 3$, $\mathbf{Q} = 7$ a $\mathbf{N} = 2$.
7) Z $\mathbf{M} \times \mathbf{N} + 2 = \mathbf{L}$ můžeme vypočíst $\mathbf{L} = 8$ a z $\mathbf{O} + 1 = \mathbf{Q}$ plyne $\mathbf{O} = 6$.
8) Dále víme, že $\mathbf{P} = \mathbf{L} + 1 = 9$. Nakonec $\mathbf{RON} : \mathbf{M} = 162 : 3 = 54 = \mathbf{KS}$, tedy $\mathbf{K} = 5$, $\mathbf{S} = 4$.

Celkově jsme tedy dostali

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{162} & + & \mathbf{809} & = & \mathbf{971} \\
: & & + & & - \\
\mathbf{3} & \times & \mathbf{27} & = & \mathbf{81} \\
= & & = & & = \\
\mathbf{54} & + & \mathbf{836} & = & \mathbf{890}.
\end{array}$$

PŘÍKLAD 4.

Neznámé trojciferné číslo můžeme zapsat jako $100x+10y+z$, kde x, y, z jsou jeho cifry. Ze zadání příkladu pak dostaneme následující soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
x & + & y & + & z & = & 21 & & & & & & \\
10x & + & 100y & + & z & = & 100x & + & 10y & + & z & - & 180 \\
100x & + & y & + & 10z & = & 100x & + & 10y & + & z & + & 36,
\end{array}$$

neboli

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & y & + & z & = & 21 \\
-90x & + & 90y & & & = & -180 \\
 & & -9y & + & 9z & = & 36.
\end{array}$$

Tuto soustavu vyřešíme Gausovou eliminační metodou:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 21 \\ -90 & 90 & 0 & -180 \\ 0 & -9 & 9 & 36 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 21 \\ 0 & 180 & 90 & 1710 \\ 0 & -9 & 9 & 36 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 21 \\ 0 & 180 & 90 & 1710 \\ 0 & 0 & 270 & 2430 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right).$$

Hledané trojciferné číslo je tedy 759.

PŘÍKLAD 5.

$$2007 = 3 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0,$$

takže

$$(2007)_{10} = (3727)_8 \,.$$

PŘÍKLAD 6.

Označme délky odvěsen pravoúhlého trojůhelníka jako a, b a dle zadání jsou to přirozená čísla. Pak Franta se od učitele dozvěděl, kolik je $a+b$ a Tonda pro změnu kolik je $\sqrt{a^2+b^2}$, z čehož si umocněním mohl snadno spočítat, kolik je a^2+b^2. To je součet druhých mocnin dvou přirozených čísel a tudíž rovněž přirozené číslo. K vyřešení příkladu si pak kluci sestrojili následující tabulku:

$a+b$	a^2+b^2
2	2
3	5
4	8, 10
5	13, 17
6	18, 20, 26
7	25, 29, 37
8	32, 34, 40, 50
9	41, 45, 53, 65
10	50, 52, 58, 68, 82
11	61, 65, 73, 85, 101
12	72, 74, 80, 90, 104, 122
13	85, 89, 97, 109, 125, 145
14	98, 100, 106, 116, 130, 148, 170
15	113, 117, 125, 137, 153, 173, 197
16	128, 130, 136, 146, 160, 178, 200, 226
17	145, 149, 157, 169, 185, 205, 229, 257
18	162, 164, 170, 180, 194, 212, 234, 260, 290
19	181, 185, 193, 205, 221, 241, 265, 293, 325
20	200, 202, 208, 218, 232, 250, 272, 298, 328, 362
21	221, 225, 233, 245, 261, 281, 305, 333
22	242, 244, 250, 260, 274, 292, 314
23	265, 269, 277, 289

V levém sloupci jsou možné součty $a+b$ a v pravém všechny možné součty a^2+b^2 tak, aby výsledný trojúhelník měl v souladu se zadáním obvod maximálně 40 cm. Např. součet $a+b=8$ může vzniknout jako 4+4, 5+3, 6+2 nebo 7+1 a tomu po řadě odpovídající součty a^2+b^2

jsou 32, 34, 40 nebo 50. První sdělení Tondy znělo, že neví, který je to trojúhelník, což znamená, že a^2+b^2 nemůže být rovno žádnému číslu, které se v pravém sloupci tabulky vyskytuje právě jednou. Jinak by totiž Tonda mohl ihned říct, který trojúhelník má učitel na mysli. Když tato čísla vyškrtáme, dostaneme novou tabulku v úvahu připadajících trojúhelníků:

$a+b$	a^2+b^2
8	50
9	65
10	50
11	65, 85
13	85, 125, 145
14	130, 170
15	125
16	130, 200
17	145, 185, 205
18	170, 260
19	185, 205, 221, 265
20	200, 250
21	221
22	250, 260
23	265

Po sdělení Franty, že neví, který je to trojúhelník, můžeme nyní z této nové tabulky vyškrtat všechny řádky, které v pravém sloupci obsahují právě jedno číslo. Tím dostaneme další tabulku:

$a+b$	a^2+b^2
11	65, 85
13	85, 125, 145
14	130, 170
16	130, 200
17	145, 185, 205
18	170, 260
19	185, 205, 221, 265
20	200, 250
22	250, 260

Nyní Tonda říká, že stále neví, který to je trojúhelník, takže opět z pravého sloupce můžeme vyškrtat všechna čísla, která jsou tam právě jednou, a následně, po druhém tvrzení Franty, že taky stále neví, který trojúhelník to je, můžeme opět vyloučit řádky, ve kterých na pravé straně zůstalo právě jedno číslo. Tím dostaneme tabulku:

$a+b$	a^2+b^2
13	85, 145
14	130, 170
16	130, 200
17	145, 185, 205
18	170, 260
19	185, 205
20	200, 250
22	250, 260

Postup popsaný výše nyní aplikujeme ještě jednou, protože Tonda a po něm i Franta opět prohlašují, že neví, který trojúhelník to je. Dostaneme poslední tabulku:

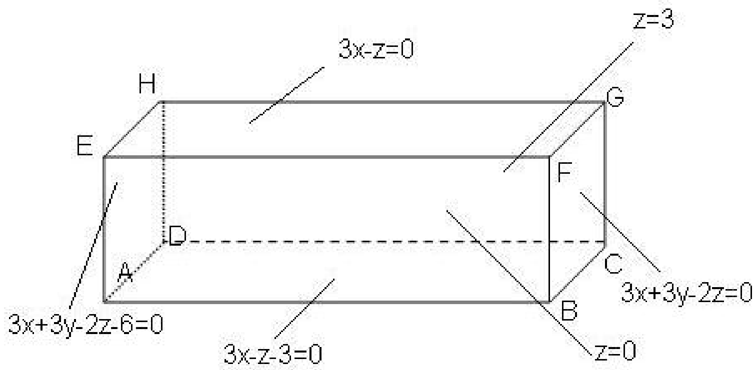
$a+b$	a^2+b^2
14	130, 170
16	130, 200
17	145, 185, 205
18	170, 260
19	185, 205
20	200, 250
22	250, 260

Ovšem nyní již Tonda prohlašuje, že konečně ví, o který trojúhelník se jedná. To znamená, že $a^2 + b^2$ musí být rovno číslu, které se v pravém sloupci poslední tabulky vyskytuje právě jednou a tímto číslem je 145. Hledaný pravoúhlý trojúhelník má tedy odvěsny dlouhé 8 cm a 9 cm a přeponu $\sqrt{145}$ cm.

KOS, 2.série

Lucie Mohelníková

Gymnázium Mikuláše Koperníka v Bílovci, 17.listopadu 526, Bílovec



Dvě rovnoběžné roviny mají stejné koeficienty u x,y,z. Abych mohla zjistit objem rovnoběžnostěnu potřebuji znát tři lineárně nezávislé vektory (pokud možno jdoucí z jednoho vrcholu) a následně udělat jejich smíšený součin. Objem dostanu jako absolutní hodnotu smíšeného součinu těchto tří vektorů.

Každý vrchol čtyřstěnu lze vyjádřit jako průnik 3 rovin. Vyberu si body E,F,G,B a pomocí čtyř soustav o třech neznámých zjistím souřadnice těchto bodů.

Bod E vzniká průnikem těchto rovin:

$z = 0$

$3x - z = 0$

$3x + 3y - 2z - 6 = 0$

Vyřením soustavy dostávám: $E = [0, 2, 0]$

Bod F vzniká průnikem těchto rovin:

$z = 0$

$3x - z = 0$

$3x + 3y - 2z = 0$

Vyřešením soustavy dostávám: $F = [0, 0, 0]$

Bod G vzniká průnikem těchto rovin:

$z = 3$

$3x - z = 0$

$3x + 3y - 2z = 0$

Vyřešením soustavy dostávám: $G = [1, 1, 3]$

Bod B vzniká průnikem těchto rovin:

$z = 0$

$3x - z - 3 = 0$

$3x + 3y - 2z = 0$

Vyřešením soustavy dostávám: $B = [1, -1, 0]$

Pomocí bodů $E = [0, 2, 0]$,$F = [0, 0, 0]$,$G = [1, 1, 3]$,$B = [1, -1, 0]$ určím vektory $\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FB}$.

$\overrightarrow{FE} = (0, 2, 0), \overrightarrow{FG} = (1, 1, 3), \overrightarrow{FB} = (1, -1, 0)$

$$\mathbf{V} = \left| \left[\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FB} \right] \right| = \left\| \begin{matrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix} \right\| = (0 + 6 + 0) - (0 + 0 + 0) = 6 o.j.$$

Objem rovnoběžnostěnu je 6 objemových jednotek.

Příklad číslo 2.

Jana Konečná, Obchodní akademie Frýdek - Místek

Označíme-li množství lihu v první nádobě x, ve druhé nádobě pak je $30 - x$ litrů lihu. Po doplnění vodou bude koncentrace lihu v první nádobě $x/30$. Po doplnění druhé nádoby směsí z první nádoby bude druhá nádoba obsahovat $30 - x + x^2/30$ litrů lihu. Po přelití 12 litrů směsi zpět do první nádoby zůstanou ve druhé nádobě $3/5$ jejího obsahu a v nich 14 litrů lihu. Dostaneme tedy rovnici

$$\frac{3}{5}\left(30 - x + \frac{x^2}{30}\right) = 14,$$

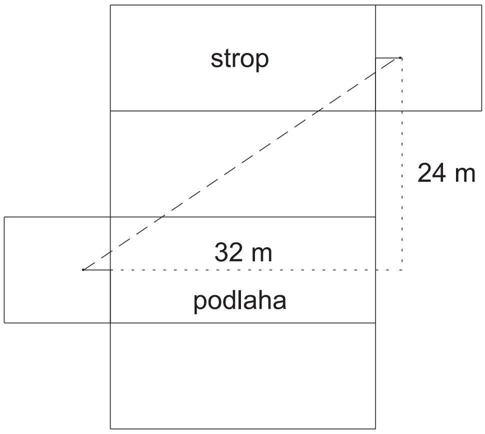
neboli po drobných úpravách

$$x^2 - 30x + 200 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má řešení $x_1 = 20$, $x_2 = 10$. Tedy tato úloha má dvě řešení: v první nádobě bylo původně 20 litrů a ve druhé nádobě 10 litrů lihu nebo v první nádobě bylo 10 litrů a ve druhé 20 litrů lihu.

Příklad číslo 3.

Daný problém převedeme na řešení problému v rovině tím, že si místnost s pavoukem a mouchou "rozbalíme." To lze provést několika způsoby a ten, který je správným řešením, je naznačen na následujícím obrázku.



Z naznačeného pravouhlého trojúhelníku s pomocí Pythagorovy věty nyní již snadno spočítáme, že nejkratší cesta pavouka k mouše má délku

$$d = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40 \text{ m}.$$

Příklad číslo 4.

Jan Matějka, Gymnázium České Budějovice

Velkou krychli si rozdělíme na $13^3 = 2197$ stejných krychliček. V tom případě podle Dirichletova principu existuje alespoň jedna krychlička, ve které leží alespoň dva body. Délka hrany libovolné malé krychličky je $a = 15/13$ cm. Nejdelší úsečkou v krychli je její tělesová úhlopříčka. Ovšem tělesová úhlopříčka malé krychličky má délku

$$\omega = a\sqrt{3} = \frac{15}{13}\sqrt{3} \doteq 1,9985 \text{ cm} < 2 \text{ cm}.$$

Proto dva body, které se nacházejí v jedné malé krychličce, nelze umístit tak, aby jejich vzdálenost byla rovna nebo větší než 2 cm. Tím je důkaz ukončen.

Příklad číslo 5.

Trung Ha duc, Masarykovo gymnázium Plzeň

Zavedeme následující výroky a jejich označení:

H ... Na místě činu byl Horák.
N ... Na místě činu byl Novák.
S ... Na místě činu byl Svoboda.

Potom jednotlivé výroky, které vyplynuly z výslechů, lze postupně symbolicky zapsat takto:

- $S \Rightarrow \neg H \wedge N$,
- $\neg\left(\neg H \wedge \neg S\right)$, což je ekvivalentní s výrokem $H \vee S$,
- $\left(H \Rightarrow \neg S\right) \wedge \left(\neg S \Rightarrow H\right)$, což je ekvivalentní s výrokem $H \Leftrightarrow \neg S$.

Nyní sestavíme tabulku pravdivostních hodnot pro tyto tři výroky a vzhledem k tomu, že pachatel byl na místě činu zcela jistě sám, stačí nám uvažovat pouze ty případy, kdy právě jeden z výroků H, N, S je pravdivý a zároveň ostatní dva jsou nepravdivé:

H	N	S	$S \Rightarrow \neg H \wedge N$	$H \vee S$	$H \Leftrightarrow \neg S$
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1

Z tabulky plyne, že pachatelem je Horák, protože pouze v tom případě jsou všechny tři výroky vyplývající z výslechů pravdivé.

KOS, 2.série

Lucie Mohelníková

Gymnázium Mikuláše Koperníka v Bílovci, 17.listopadu 526, Bílovec

Příklad č.6 Na začátek rozeberu největší možný počet sousedů čísel od 1 do 8:

1: 3-8, celkem 6 možných sousedů

2: 4-8, celkem 5 možných sousedů

3: 1, 5-8, celkem 5 možných sousedů

4: 1,2,6,7,8, celkem 5 možných sousedů

5: 1,2,3,7,8, celkem 5 možných sousedů

6: 1,2,3,4,8, celkem 5 možných sousedů

7: 1,2,3,4,5, celkem 5 možných sousedů

8: 1,2,3,4,5,6, celkem 6 možných sousedů

Pozice A,B,G,H mají každá právě 5 sousedů. C,F mají 4 sousedy a D,E celkem 6 sousedů ⇒ na pozicích D,E jsou čísla 1, 8.

	A	B	
C	D	E	F
	G	H	

1) D=1, E=8. Protože s pozicí D nesousedí pouze F, musí být F=2 a C=7. $B \neq 3, H \neq 3 \Rightarrow A = 3 \vee G = 3$. Určím si: A=3. Ze zbývajících čísel může být kombinace A,B: 3,5 a G,H: 4,6. Doplním celou tabulku.

Pokud bych si za G zvolila 3, postupovala bych obdobně.

	3	5	
7	1	8	2
	4	6	

	4	6	
7	1	8	2
	3	5	

2) D=8, E=1 (úplně stějné úvahy, opět 2 řešení):

	6	4	
2	8	1	7
	5	3	

	5	3	
2	8	1	7
	6	4	

Úloha má celkem 4 řešení.

Řešení příkladů (3. kolo)

PŘÍKLAD 1.

$$x^2 - (2+i)x - 1 + 7i = 0$$

Nejdříve spočteme diskriminant dané kvadratické rovnice:
$D = b^2 - 4ac = (-2-i)^2 - 4(-1+7i) = 4 + 4i - 1 + 4 - 28i = 7 - 24i.$

Dále spočteme, čemu je rovna $\sqrt{D}$ a protože počítáme v komplexním oboru, výsledkem budou dvě komplexní čísla! Hledáme tedy taková komplexní čísla z, pro která platí

$$z^2 = (a+bi)^2 = 7 - 24i.$$

Odtud

$$a^2 + 2abi - b^2 = 7 - 24i$$

a srovnáním levých a pravých stran dostáváme soustavu rovnic

$$2ab = -24$$

$$a^2 - b^2 = 7.$$

Řešení této soustavy jsou dvě: $a_1 = 4, b_1 = -3$ a $a_2 = -4, b_2 = 3$. Proto

$$\sqrt{D} = \pm(4 - 3i).$$

Nyní již vypočteme kořeny dané kvadratické rovnice. Je zřejmé, že nezáleží na tom, zda za $\sqrt{D}$ dosadíme $4 - 3i$ nebo $-4 + 3i$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 + i \pm (4 - 3i)}{2},$$

$$x_1 = 3 - i, \quad x_2 = -1 + 2i.$$

PŘÍKLAD 2.

Z čísel 1,3,6 můžeme složit celkem P(3)=3!=6 trojciferných čísel. Snadným vydělením zjistíme, že ani jedno z těchto čísel není dělitelné 7. Milanovi se podařilo složit trojciferné číslo dělitelné 7 tak, že nechal Karla stát na rukou (z šestky na jeho bundě se rázem stala devítka) a uspořádal je do tohoto pořadí: Karel, Pepík, Jirka=931, protože $931 : 7 = 133$.

PŘÍKLAD 3.

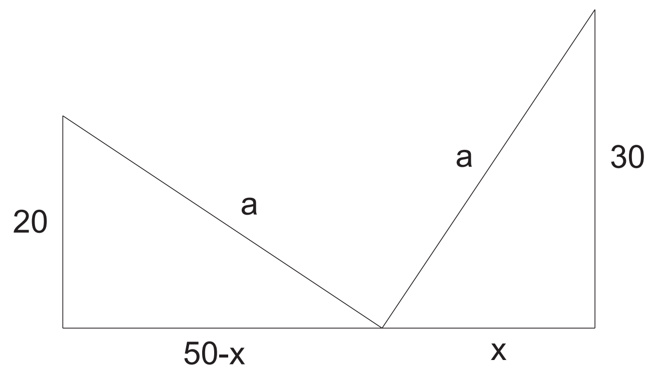
K důkazu prvního vztahu využijeme goniometrický a exponenciální tvar komplexního čísla:

$$\cos(\alpha+\beta) = \mathcal{R}e\left\{\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\right\} = \mathcal{R}e\left\{\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)}\right\} =$$
$$\mathcal{R}e\left\{\mathrm{e}^{i\alpha}\cdot\mathrm{e}^{i\beta}\right\} = \mathcal{R}e\left\{(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta+i\sin\beta)\right\} =$$
$$\mathcal{R}e\left\{(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\right\} =$$
$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

K důkazu druhého vztahu využijeme goniometrický tvar komplexního čísla a Moivrův vzorec:

$$\sin 3\alpha = \mathcal{I}m\left\{\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha\right\} = \mathcal{I}m\left\{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3\right\} =$$
$$\mathcal{I}m\left\{(\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha)+i(3\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha)\right\} =$$
$$3\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha = \sin\alpha(4\cos^2\alpha-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) =$$
$$\sin\alpha(4\cos^2\alpha-1).$$

PŘÍKLAD 4.



Ptáci letí k rybě stejnou rychlostí a doletí k ní současně. Přitom uletí stejně dlouhou dráhu délky a. Druhou mocninu délky dráhy a si vyjádříme z obou pravoúhlých trojúhelníků (viz. obrázek) pomocí Pythagorovy věty:

$$a^2 = x^2 + 30^2,$$
$$a^2 = (50-x)^2 + 20^2.$$

Z této soustavy rovnic již snadno dostáváme:

$$x^2 + 30^2 = (50 - x)^2 + 20^2$$
$$100x - 2000 = 0$$
$$x = 20.$$

Ryba se tedy objevila ve vzdálenosti 20 m od vyšší palmy.

PŘÍKLAD 5.

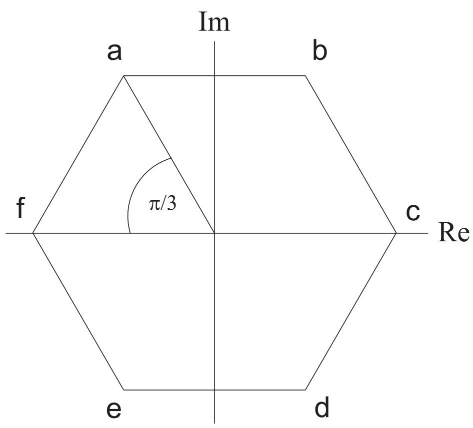
Komplexní číslo $a = -3 + 3\sqrt{3}i$ si vyjádříme v goniometrickém tvaru. K tomu si musíme spočítat jeho absolutní hodnotu a argument:

$$|a| = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6,$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \arg a = \alpha = \frac{2}{3}\pi.$$

Odtud

$$a = -3 + 3\sqrt{3}i = 6\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right).$$



Protože čísla b, c, d, e, f tvoří společně s číslem a vrcholy pravidelného šestiúhelníku se středem v nule, musí mít všechny stejně jako číslo a absolutní velikost rovnu 6 a rozdíl argumentů dvou čísel spojených hranou tohoto šestiúhelníku bude $\frac{\pi}{3}$. Odtud již přímo dostáváme:

$$b = 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 3 + 3\sqrt{3}i,$$
$$c = 6\left(\cos 0 + i\sin 0\right) = 6,$$
$$d = 6\left(\cos -\frac{\pi}{3} + i\sin -\frac{\pi}{3}\right) = 3 - 3\sqrt{3}i,$$

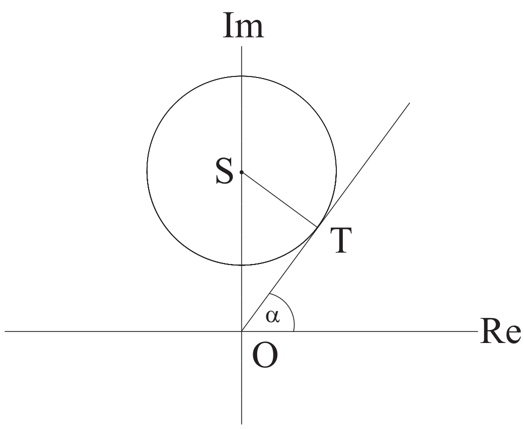
$$e = 6\left(\cos -\frac{2}{3}\pi + i\sin -\frac{2}{3}\pi\right) = -3 - 3\sqrt{3}i,$$
$$f = 6\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -6.$$

PŘÍKLAD 6.

Komplexní číslo x zapíšeme v algebraickém tvaru jako $x = a + bi$ a dosadíme do nerovnosti $|25i - x| \leq 15$. Po úpravách dostaneme:

$$|25i - x| = |x - 25i| = |a + (b - 25)i| \leq 15$$
$$\sqrt{a^2 + (b-25)^2} \leq 15$$
$$a^2 + (b-25)^2 \leq 225.$$

Poslední nerovnost v komplexní rovině zadává kruh se středem v bodě $S = (0, 25)$ a poloměrem $r = 15$. Hledaným komplexním číslem x s nejmenším argumentem goniometrického tvaru je pak bod dotyku T tečny tohoto kruhu procházející počátkem (viz. obrázek níže).



Trojúhelník OTS je pravoúhlý, přičemž $|OS| = 25$ a $|TS| = 15$. Pomocí Pythagorovy věty můžeme snadno spočítat, že

$$|OT| = |x| = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20.$$

Odtud již snadno můžeme vyjádřit

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{|TS|}{|OS|} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5},$$

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{|OT|}{|OS|} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5},$$

a následně můžeme vyjádřit i hledané komplexní číslo x:

$$x = |x|\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right) = 20\left(\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}\right) = 12 + 16i.$$