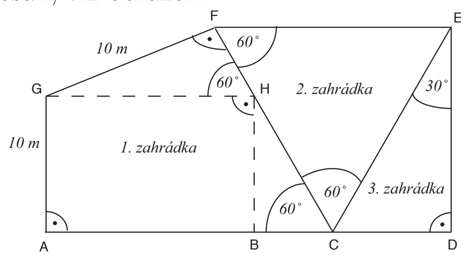
Řešení příkladů z minulého kola

1. Označme x počet místností. V každé místnosti bylo x skříní, celkový počet skříní ve všech místnostech byl x^2. V každé skříni bylo x zlaťáků, celkově tedy ve všech místnostech a všech skříních bylo x^3 zlaťáků.

Po odečtení jedné skříně pro holiče chceme ukázat, že $x^3 - x$ je dělitelné šesti (aby byl zbytek dědictví rozdělen rovným dílem mezi jeho 6 synů). Výraz $x^3 - x$ můžeme zapsat ve tvaru $(x-1)x(x+1)$. Jelikož se jedná o součin tří po sobě jdoucích čísel, právě jedno z nich musí být dělitelné třemi. V případě, že x je sudé číslo, je celý součin sudý. Pokud x je liché číslo, pak $x-1$ a $x+1$ jsou sudá. A tedy součin $(x-1)x(x+1)$ bude dělitelný dvěma. Celý výraz $(x-1)x(x+1)$ je tudíž dělitelný šesti.

Odpověď: Po odečtení jedné skříně zlaťáků pro holiče se podařilo zbývající část dědictví rozdělit rovným dílem mezi 6 králových synů.

2. Nejprve vypočítáme plochu zahrad, která se má osít. Obsah první zahrady dostaneme jako součet obsahu obdélníku $ABHG$ a trojúhelníků BCH a FHG, které mají stejný obsah, viz obrázek.



Užitím goniometrických funkcí vypočteme délku stran

$$|GH| = \frac{10}{\sin 60^\circ} = \frac{20}{\sqrt{3}} \quad \text{a} \quad |FH| = \frac{10}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{10}{\sqrt{3}}.$$

Pak obsah první zahrady je

$$S_1 = 10 \cdot \frac{20}{\sqrt{3}} + 2 \cdot 10 \frac{10}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} = 100\sqrt{3}.$$

Protože trojúhelník CEF je rovnostranný, délka strany CE je

$$|CE| = |CF| = \frac{20}{\sqrt{3}} + \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{30}{\sqrt{3}}.$$

Dopočítáme délky stran

$$|CD| = \frac{30}{\sqrt{3}} \sin 30^\circ = \frac{15}{\sqrt{3}} \quad \text{a} \quad |DE| = \frac{15}{\sqrt{3} \operatorname{tg} 30^\circ} = 15.$$

Pak obsah třetí zahrady je

$$S_3 = \frac{15}{\sqrt{3}} \cdot \frac{15}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2}.$$

Tedy celkový obsah je

$$S = 100\sqrt{3} + \frac{75\sqrt{3}}{2} = \frac{275\sqrt{3}}{2} \doteq 238,157m^2.$$

Protože jeden pytel travního semene vystačí na $50m^2$, je třeba koupit 5 pytlů, ty budou dohromady stát 900Kč. Poměr obsahů první a třetí zahrady, je

$$100\sqrt{3} : \frac{75\sqrt{3}}{2} \quad \text{což je} \quad 8 : 3.$$

Soused z první zahrádky tedy zaplatí

$$900\frac{8}{11} \doteq 654,5 \text{ Kč}$$

a soused z druhé zahrádky

$$900\frac{3}{11} \doteq 245,5 \text{ Kč}.$$

Odpověď: Soused z první zahrádky zaplatí 654,5 Kč a soused z druhé zahrádky zbylých 245,5 Kč.

3. Pokud bychom uvažovali, že v domácnosti žije 6 různých osob - Slávek, Jeník, Pepík, Slávkova dcera, Jeníkova manželka a Pepíkova neteř, byla by celková částka kterou přispívají všichni společně $6 \cdot 1375$ Kč, tedy 8250 Kč. Odečteme-li nájem 5180 Kč, dostaneme částku 3070 Kč, kterou si mají mezi sebou spravedlivým dílem rozdělit tak, aby každý dostal sudý počet desetikorun. Což v tomto případě není možné, tedy v domácnosti musí žít jiný počet lidí.

Nyní předpokládejme, že v domácnosti žijí kromě Slávka, Jeníka a Pepíka pouze dvě ženy. Celková částka na domácnost by v tomto případě byla $5 \cdot 1375$ Kč, tedy 6875 Kč, která lze rozdělit na 5 stejných dílů, ale ne tak, aby každý dostal sudý počet desetikorun.

Žijí-li v domácnosti 4 osoby - Jeník, Slávek, Pepík a jedna žena, budou celkem přispívat $4 \cdot 1375$ Kč, tedy 5500 Kč. Odečteme-li nájem, zůstane 320 Kč. Tuto částku lze rozdělit stejným dílem mezi 4 osoby tak, že každý dostane 8 (tedy sudý počet) desetikorun.

Odpověď: V domácnosti žijí čtyři osoby - Jeník, Slávek, Pepík a jedna žena, která je Slávkova dcera, současně Jeníkova manželka a Pepíkova neteř. Každá osoba po zaplacení nájmu dostane ze společných peněz 8 desetikorun nazpět.

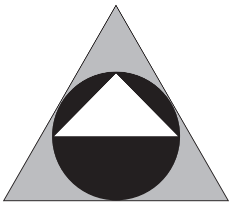
4. Označme x cenu dvou kilogramů jablek. Kupec navážil větší množství jablek, než 2 kg, které odpovídalo ceně $(x+10)$ Kč. Pan Novák chtěl z tohoto množství jen $\frac{2}{3}$ (tedy i $\frac{2}{3}$ ceny). Cena $\frac{2}{3}$ jablek pak byla o 5 Kč menší, než cena 2 kg jablek. Dostaneme tedy rovnici

$$\frac{2}{3}(x+10) = x - 5,$$

jejímž řešením je $x = 35$,- Kč. Pana Nováka stál nákup o pět korun méně, než byla cena dvou kilogramů jablek, tedy $(35 - 5)$,- Kč $= 30$,- Kč.

Odpověď: Pan Novák za jablka zaplatil 30,- Kč.

5.



Označme si:
r ... poloměr kruhu,
a ... stranu rovnostranného trojúhelníku,
S_1 ... obsah pravoúhlého trojúhelníku,
S_2 ... obsah rovnostranného trojúhelníku,
S_3 ... obsah kruhu (= obsah bílé části obrazce),
S_4 ... obsah šedé části obrazce,
S_5 ... obsah černé části obrazce.

Pro obsahy S_4 a S_5 platí vztahy:

$$S_4 = S_2 - S_3 \qquad \text{a} \qquad S_5 = S_3 - S_1.$$

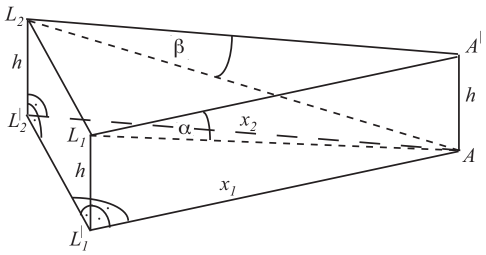
Pro poloměr kružnice vepsané do rovnostranného trojúhelníku a stranu tohoto trojúhelníku platí vztah:

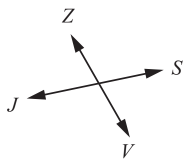
$$r = \frac{a}{6}\sqrt{3}.$$

Pak pro obsahy platí:
$S_1 = r^2$,
$S_2 = 3\sqrt{3}r$,
$S_3 = \pi r^2$,
$S_4 = (3\sqrt{3} - \pi)r^2$,
$S_5 = (\pi - 1)r^2$.

Odpověď: Poměr šedé ku černé ku bílé části je $(3\sqrt{3} - \pi) : (\pi - 1) : 1$.

6. Danou situaci si načtrneme.





h ... hledaná výška letadla,
A ... objekt A na zemském povrchu,
A' ... obraz objektu A ve výšce h,
L_1 ... pozice letce, ve které spatřil objekt A poprvé,
L_2 ... pozice letce, ve které spatřil objekt A podruhé,
L_1' ... obraz pozice L_1 na zemském povrchu,

L_2' ... obraz pozice L_2 na zemském povrchu,
x_1 ... vzdálenost bodů L_1 a A,
x_2 ... vzdálenost bodů L_2 a A,
$\alpha = 33°$ ... hloubkový úhel, při němž letec spatřil objekt A při prvním pohledu,
$\beta = 21°$ ... hloubkový úhel, při němž letec spatřil objekt A při druhém pohledu.

Z obrázku a znalostí goniometrických funkcí pro řešení pravoúhlého trojúhelníku dostáváme vztahy

$$\operatorname{tg} 33° = \frac{h}{x_1} \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg} 21° \frac{h}{x_2}. \tag{3}$$

Z Pythagorovy věty umíme určit vztah mezi vzdálenostmi x_1 a x_2

$$x_2 = \sqrt{x_1^2 + 9}.$$

Pak

$$x_1 = \frac{3 \cdot \operatorname{tg} 21°}{\sqrt{(\operatorname{tg} 33°)^2 - (\operatorname{tg} 21°)^2}}.$$

Pro hodnotu hledané výšky dostaneme

$$h = x_1 \cdot \operatorname{tg} 33° = \frac{3 \cdot \operatorname{tg} 21° \cdot \operatorname{tg} 33°}{\sqrt{(\operatorname{tg} 33°)^2 - (\operatorname{tg} 21°)^2}}.$$

Po vyčíslení $h \doteq 1,4277$ Km.

Odpověď: Letec tedy letěl ve výšce $1,4277$ Km.

Řešení příkladů z minulého kola

1. Krychle se stranou délky 5cm byla rozřezána na 125 malých krychliček. Každá z těchto krychliček má stranu délky 1cm. Hledáme krychličky, které mají obarvenou právě jednu stěnu. Jsou to právě ty, které ležely uprostřed stěny původní krychle. Ke stavbě nové krychle tedy máme k dispozici $6 \cdot 9 = 54$ krychliček. Platí

$$a^3 < 54, \ \ a < 3,779... \ \ \text{tedy} \ \ a = 3.$$

Povrch této nově vzniklé krychle bude

$$P = 6 \cdot (1 \cdot a)^2, \qquad \text{tedy} \qquad P = 54\text{cm}^2.$$

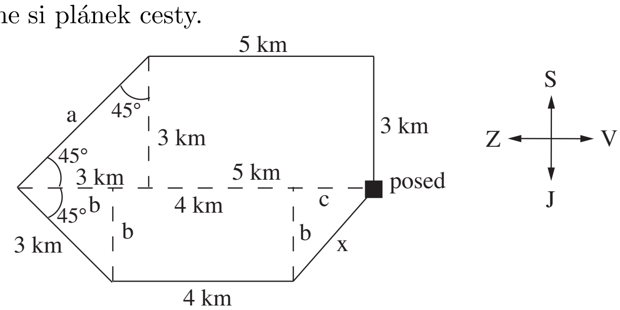
Odpověď: Povrch krychle vytvořené z krychliček s obarvenou právě jednou stěnou je 54cm^2.

2. Na vrcholu pyramidy stojí jedna sklenička, v patře pod ní pak $2^2 = 4$ skleničky, v následujícím patře pak $3^2 = 9$ skleniček atd. Celkový počet skleniček v pyramidě je pak

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 = 204.$$

Do každé skleničky se vejde 1dcl . K naplnění všech skleniček v pyramidě je tedy zapotřebí 20,4l šampaňského.
Odpověď: Hostitelka musí koupit 21 litrových lahví šampaňského.

3. Nakreslíme si plánek cesty.



Nejprve vypočítáme délku trasy, kterou kamarádi doposud urazili. Z obrázku je patrné, že tato vzdálenost je rovna

$$v = 3 + 5 + a + 3 + 4, \quad \text{přičemž} \ \ a = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2},$$

tedy

$$v = 15 + 3\sqrt{2} \doteq 19,24.$$

Abychom zjistili vzdálenost houbařů od posedu, musíme nejprve dopočítat vzdálenosti b a c. Dostáváme

$$b = 3 \sin 45^\circ = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

a z rovnosti

$$3 + 5 = b + 4 + c, \quad \text{plyne} \quad c = 4 - \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Nyní už můžeme pomocí Pythagorovy věty dopočítat vzdálenost houbařů od posedu

$$x = \sqrt{c^2 + b^2} = \sqrt{25 - 12\sqrt{2}} \doteq 2,83.$$

Odpověď: Houbaři jsou $2,83\,km$ od posedu a prozatím ušli $19,24\,km$.

4. Označíme si váhy mužů písmeny A, B, C, D, E. Předpokládejme, že platí

$$A \leq B \leq C \leq D \leq E.$$

Součet dvou nejnižších vah bude $A + B = 128$, dvou nejvyšších $D + E = 161$. Obdobnými úvahami dostaneme rovnosti $A + C = 132$ a $C + E = 158$. Protože každý se vážil čtyřikrát a součet všech vah je 1444, dostaneme

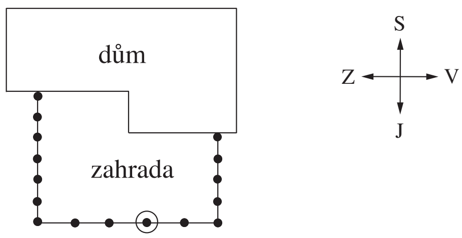
$$A + B + C + D + E = \frac{1444}{4}. \tag{1}$$

Dosazením předchozích rovností do (1) vypočteme jednotlivé váhy

$$A = 60, \quad B = 68, \quad C = 72, \quad D = 75, \quad E = 86.$$

Odpověď: Váhy jednotlivých mužů byly 60, 68, 72, 75 a 86 kilogramů.

5. Načrtněme si obrázek.



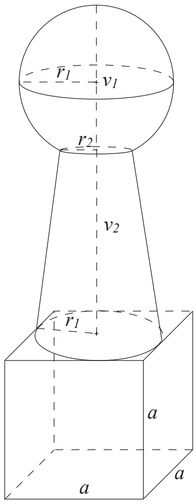
Na západní straně je 7 sloupků, na jižní 6 a východní 5 sloupků. Protože sloupky v rozích jsou započteny vždy dvakrát, dohromady má plot

$$7 + 6 + 5 - 2 = 16 \text{ sloupků.}$$

Při cestě od jedné strany plotu ke straně druhé tedy napočítáme 16 sloupků. Při zpáteční cestě již však poslední sloupek nezapočítáváme, mineme tedy pouze 15 další sloupků. V prvním kole tak napočítáme právě 31 sloupků. Stejně tak v každém dalším kole nezapočteme první sloupek a mineme tak právě 30 sloupků. Odečteme-li od tisíce 31 sloupků za první kolo a pak vydělíme třiceti za každé následující kolo, zjistíme, že zahradu budeme muset obejít právě třicet dvakrát a ještě musíme přičíst další 9 sloupků. Jelikož ve chvíli, kdy napočítáme oněch

$32{\cdot}30{+}31 = 991$ sloupků, budeme stát u prvního sloupku, zbylých devět sloupků tak musíme začít počítat od sloupku druhého.
Odpověď: Poklad je zakopán pod desátým sloupkem.

6.



Popis obrázku:

$r_1 = 5$cm .... poloměr koule (také poloměr dolní podstavy rotačního kužele),
r_2 .... poloměr hrany vrchlíku (také poloměr horní podstavy rotačního kužele),
$v_1 = 7$cm .... výška kruhového vrchlíku,
v_2 .... výška rotačního kužele,
$a = 2r_1 = 10$cm ... strana krychle.

Pro určení objemu tohoto tělesa musíme vypočítat hodnoty r_2 a v_2. Poloměr r_2 získáme použitím Pythagorovy věty

$$r_1^2 = (v_1 - r_1)^2 + r_2^2 \Longrightarrow r_2 = \sqrt{2v_1r_1 - v_1^2},$$

tedy

$$r_2 = \sqrt{21}\text{cm}.$$

Výška rotačního kužele v_2 spolu s výškou krychle a výškou kulového vrchlíku tvoří výšku celého tělesa, v_2 je pak 13cm.
Ze vzorců pro objem kulového vrchlíku

$$V_1 = \frac{\pi v_1}{6}(3r_2^2 + v_1^2),$$

rotačního válce

$$V_2 = \frac{\pi v_2}{3}(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$$

a krychle

$$V_3 = a^3$$

určíme celkový objem tělesa

$$V = V_1 + V_2 + V_3,$$

po dosazení $V \doteq 2348,65\text{cm}^3$.
Odpověď: Objem tělesa je $2348,65\text{cm}^3$.

KOS
Matematický KOrespondenční Seminář
(Matematického ústavu Slezské univerzity v Opavě)

Milí přátelé,

v letošním roce se uskuteční již 5. ročník matematického korespondenčního semináře KOS pořádaného Matematickým ústavem Slezské univerzity v Opavě. Seminář je určený především studentům středních škol.

Účast v tomto semináři Vám může napomoci při rozvíjení Vašeho logického myšlení a schopností řešení zadaných problémů (nemusí jít pouze o problémy matematické). Navíc některé univerzity při přijímacích pohovorech kladně hodnotí účast na akcích tohoto druhu.

Studenti, kteří se umístí na čelních místech obdrží věcné ceny. Každý účastník alespoň dvou kol obdrží certifikát potvrzující účast v tomto semináři.

V průběhu školního roku 2005/2006 Vám ve třech kolech zašleme sérii matematických úloh. Zadání se skládá z teoretické části a z příkladů k řešení. Za správné řešení každého příkladu získáte 5 bodů (tzn. v každém kole maximálně 30 bodů). Řešení posílejte včetně postupu, nestačí pouze výsledek. Na každý list napište své jméno, kontaktní adresu, název školy a ročník, ve kterém studujete. Řešení pošlete poštou na adresu:

KOS
Matematický ústav
Slezská univerzita v Opavě
Na Rybníčku č. 1
746 01 Opava

nebo e-mailem:

KOS@math.slu.cz

Dodržujte, prosím, termín odeslání. Rozhodující je datum na poštovním razítku. My Vaše řešení opravíme a spolu se zadáním dalšího kola a průběžným pořadím účastníků Vám zašleme zpět. Spolu s opraveným třetím kolem Vám obdržíte výsledné pořadí a vítěze oceníme.

Hodně štěstí přejí organizátoři.

Řešení příkladů z minulého kola

1. Automobil jede konstantní rychlostí v_A po trase dlouhé $s_A = 300\text{km}$ v čase t_A. Letadlo letí rychlostí $v_L = 4v_A$ v čase $t_L = \frac{1}{3}t_A$. Přímá vzdálenost mezi místy A a B se tedy vypočítá ze vztahu

$$
\begin{aligned}
s_L &= v_L \cdot t_L, \\
s_L &= \frac{4}{3} v_A \cdot t_A,
\end{aligned}
$$

přičemž víme, že $s_A = v_A \cdot t_A$, tedy

$$
\begin{aligned}
s_L &= \frac{4}{3} \cdot 300, \\
s_L &= 400\text{km}.
\end{aligned}
$$

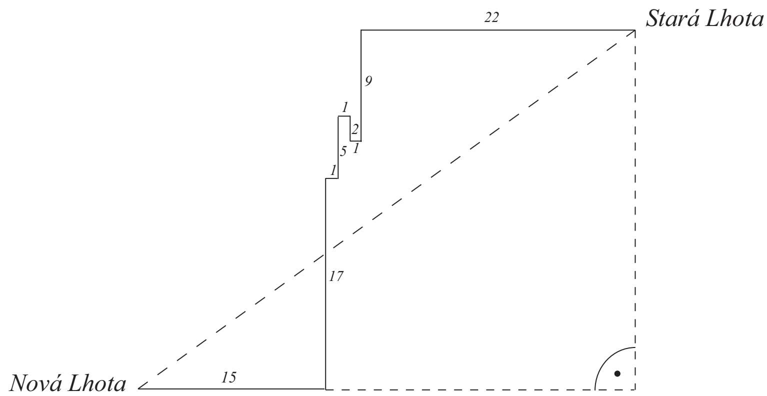
Odpověď: Dráha letadla (přímá vzdálenost mezi místy A a B) nemůže být delší než dráha automobilu, příklad tedy nemá řešení.

2. Řešení tohoto příkladu se dá vyjádřit rovnicí

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}(24 - x) = x.$$

Dostaneme tedy $x = \frac{48}{5} = 9,6$ hodin, což je 9 hodin a 36 minut.
Odpověď: Nyní je tedy 9 hodin a 36 minut.

3. Nejdříve vypočítáme dráhu autobusu s_A a dráhu vlaku s_V.



Z obrázku je patrné, že platí

$$
\begin{aligned}
s_A &= 15 + 17 + 1 + 5 + 1 + 2 + 1 + 9 + 22 = 73\text{km}, \\
s_V &= \sqrt{(15 + 1 + 1 + 1 + 22)^2 + (17 + 5 - 2 + 9)^2} \\
&= \sqrt{40^2 + 29^2} = \sqrt{2441} \doteq 49,4\text{km}.
\end{aligned}
$$

Nyní dopočítáme čas, za který vlak dorazí do Staré Lhoty.

$$t_V = \frac{s_V}{v_V} = \frac{\sqrt{2441}}{45} \doteq 1\text{hod } 6\text{min}.$$

Protože autobus má dorazit o pět minut dříve, cesta mu musí trvat 1 hodinu a 1 minutu, což je přibližně $1,015$ hodin. Jeho rychlost je pak

$$v_A = \frac{s_V}{t_V} \doteq \frac{73}{1,015} \doteq 72\text{km/hod}.$$

Odpověď: Autobus musí jet průměrnou rychlostí přibližně 72km/hod.

4. Označme váhu zavazadel jednoho cestujícího x a druhého cestujícího y. Platí tedy

$$x + y = 65\text{kg}. \tag{1}$$

Základní váhu zavazadel (za kterou cestující nemusí platit) označíme z. Dále víme, že cena za nadváhu jednoho ze zavazadel (řekněme o váze x) je 250Kč, druhého (o váze y) je 500Kč. Pokud by všechna zavazadla patřila pouze jednomu z cestujících, doplácel by 2000Kč. Předchozí tvrzení lze zapsat vztahy

$$\begin{aligned} (x - z)\text{kg} &\quad \ldots 250 \text{ Kč}, \\ (y - z)\text{kg} &\quad \ldots 500 \text{ Kč}, \\ (65 - z)\text{kg} &\quad \ldots 2000 \text{ Kč}. \end{aligned} \tag{2}$$

Využijeme-li přímou úměrnost, dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{x - z}{65 - z} &= \frac{250}{2000}, & \frac{y - z}{65 - z} &= \frac{500}{2000}, \\ x &= \frac{65 + 7z}{8}, & y &= \frac{65 + 4z}{5}. \end{aligned} \tag{3}$$

Dosadíme-li do (1), obdržíme rovnici

$$\frac{65 + 7z}{8} + \frac{65 + 3z}{4} = 65,$$

jejíž řešení je $z = 25$kg.
Dosazením do (3) zjistíme váhy jednotlivých zavazadel, $x = 30$kg a $y = 35$kg. A ze vztahu (2) zjistíme cenu za kilogram nadváhy, tedy 50Kč/kg.
Odpověď: Základní váha zavazadla (tzn. za kterou nemusí cestující platit) je 25kg, za každý koligram navíc se doplácí 50Kč. Zavazadlo prvního cestujícího váží 30kg, druhého 35kg.

5. Označme množství cihel na první hromadě x, na druhé y a množství cihel na třetí hromadě z. Celkovou situaci můžeme znázornit následující tabulkou.

	1. hromada	2. hromada	3. hromada
na počátku	x	y	z
po 1. přenesení	x-y	2y	z
po 2. přenesení	x-y	2y-z	2z
po 3. přenesení	2(x-y)	2y-z	2z-(x-y)

Protože nakonec na každé hromadě zůstalo právě 640 cihel, dostáváme následující tři rovnice

$$\begin{aligned} 2(x-y) &= 640, \\ 2y-z &= 640, \\ 2z-(x-y) &= 640. \end{aligned}$$

Tato soustava má řešení

$$x = 880, \ y = 560 \ \text{ a } \ z = 480.$$

Odpověď: Původně bylo na první hromadě 880 cihel, na druhé 560 a na třetí 480 cihel.

6. Označme s dráhu, jakou mohou výletníci urazit při své cestě než se budou muset vrátit zpátky domů. Dále označme s_B resp. s_P, s_K a s_A dráhu, kterou ujedou na bruslích resp. půjdou pěšky, pojedou na kole či autobusem. Pak

$$s_B = s_P = s_K = \frac{1}{3}s \ \text{ a } \ s_A = s.$$

Analogicky označme jednotlivé rychlosti v_B, v_P, v_K, v_A a časy t_B, t_P, t_K a t_A. Platí

$$\begin{aligned} v_A &= 60\text{km/h}, \\ v_B &= \frac{1}{6}v_A = 10\text{km/h}, & t_B &= \frac{s}{3\cdot 10} = \frac{s}{30}\text{h}, \\ v_P &= \frac{1}{5}v_B = 2\text{km/h}, & t_P &= \frac{s}{3\cdot 2} = \frac{s}{6}\text{h}, \\ v_K &= 12v_P = 24\text{km/h}. & t_K &= \frac{s}{3\cdot 24} = \frac{s}{72}\text{h}. \end{aligned}$$

Navíc víme, že celý výlet má trvat právě dest hodin, tedy

$$t_A = 10 - (t_B + t_P + t_K).$$

Potom dráhu s vypočítáme z následující rovnice

$$\begin{aligned} s &= s_A = v_A t_A = 60(10 - \frac{s}{30} - \frac{s}{6} - \frac{s}{72}) \\ s &\doteq 43,4\text{km} \end{aligned}$$

Odpověď: Výletníci se mohou vydat nejdále 43,4km.