Řešení příkladů z 1. kola

1. Nejstarší syn dostane 1/2 dědictví, tedy na matku a nově narozené děti zbývá druhá polovina dědictví, která se má rozdělit následujícím způsobem:

$$S : M = 1 : 2,$$

$$M : D = 1 : 3,$$

tedy

$$S : M : D = 1 : 2 : 6.$$

Tuto druhou polovinu dědictví rozdělíme na stejné části, tedy na devítiny $(1 + 2 + 6)$. Matka tedy z této poloviny dědictví dostane $\frac{2}{9}$, syn $\frac{1}{9}$ a dcera $\frac{6}{9}$. Celkové dědictví (po úpravě některých výrazů) bude násladující: nejstarší syn má $\frac{1}{2}$, matka $\frac{1}{9}$, a dvojčata - syn $\frac{1}{18}$ a dcera $\frac{1}{3}$ celkového dědictví.

2. Označme věk Máši x a Dášin věk $x - 2$. Budeme postupovat od konce: Výrok *"Máši bylo $\frac{1}{4}$-krát tolik, kolik bude Dáši za* 6 *let ."* vyjádříme výrazem:

$$\frac{1}{4}((x-2)+6).$$

Na tento výrok navazuje tvrzení *"... když Máši bylo* 3 *krát tolik, kolik bylo Dáši, když Máši bylo..."* (což jsme vyjádřili výše); tedy

$$3(\frac{1}{4}((x-2)+6)-2).$$

A nakonec vypočteme stávající věk Máši: *"Máša má* 2*-krát tolik let, kolik bylo Dáši, když Máši bylo..."*,

$$x = 2(3(\frac{1}{4}((x-2)+6)-2)-2). \tag{1}$$

Řešením rovnice (1) vzhledem k neznámé x obdržíme řešení

$$x = 20.$$

Máši je tedy 20 let a Dáši 18 let.

3. Hledáme tři přirozená čísla x, y, z, pro něž platí, že $x \cdot y \cdot z = 2004$ a číslo $x + y + z$ se čte stejně zprava doleva jako zleva doprava.
Číslo 2004 rozložíme na prvočísla

$$2004 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 167.$$

Tedy dělitelé čísla 2004 jsou

$$1, 2, 3, 4, 6, 12, 167, 334, 501, 668, 1002 \text{ a } 2004.$$

Sestavíme tabulku všech možností:

rozklad	součet	čteno pozadu	vyhovuje
$1 \cdot 1 \cdot 2004$	2006	6002	NE
$1 \cdot 2 \cdot 1002$	1005	5001	NE
$1 \cdot 3 \cdot 668$	672	276	NE
$1 \cdot 4 \cdot 501$	506	605	NE
$1 \cdot 6 \cdot 334$	341	143	NE
$1 \cdot 12 \cdot 167$	180	081	NE
$2 \cdot 2 \cdot 501$	505	505	ANO
$2 \cdot 3 \cdot 334$	339	933	NE
$2 \cdot 6 \cdot 167$	175	571	NE
$3 \cdot 4 \cdot 167$	174	471	NE

Hledaná čísla jsou $2, 2$ a 501.

4. Číslice hledaného telefonního čísla označíme postupně A, B, C, D, E a F. Má platit, že

$$A + B + C + D + E + F < 20,$$
$$F > A > B > C > D > E$$

a zároveň

$$\tfrac{AB}{EF} = A + B,$$
$$\tfrac{CD}{EF} = C + D.$$

Danou situaci opět nejlépe znázorníme tabulkou:

$ABCDEF$	součet	$\frac{AB}{EF} = A + B$	$\frac{CD}{EF} = C + D$	vyhovuje
432105	15	NE	NE	NE
432106	16	NE	NE	NE
432107	17	NE	ANO	NE
432108	18	NE	NE	NE
432109	19	NE	NE	NE
532106	17	NE	NE	NE
532107	18	NE	ANO	NE
532108	19	NE	NE	NE
542106	18	NE	NE	NE
542107	19	NE	ANO	NE
543106	19	ANO	NE	NE
632107	19	ANO	ANO	ANO

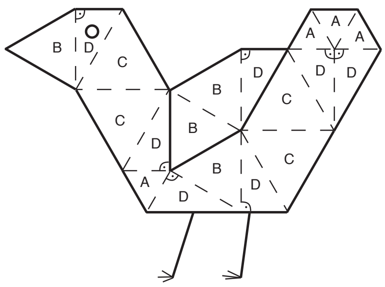
Hledané telefonní číslo je 632107.

5. Pastýř měl dostat za 1 rok práce 4 ovce a 4 kozy. Za 8 měsíců, což jsou $\frac{2}{3}$ roku, dostal 4 ovce a 2 kozy. Víme, že koza stojí 8 grošů. Cenu ovce si označíme x dopočítáme jednoduchou rovnici

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}(4x + 4 \cdot 8) &= 4x + 2 \cdot 8, \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Ovce stojí 4 groše.

6. Obrázek "KOSa" je složen ze čtyř různých trojúhelníků, A, B, C a D. Příslušné obsahy si označíme S_A, S_B, S_C a S_D.



Trojúhelníky A, B a C se na obrázku vyskytují 4-krát a trojúhelník D 7-krát. Celkový obsah S tedy bude roven

$$S = 4 \cdot S_A + 4 \cdot S_B + 4 \cdot S_C + 7 \cdot S_D.$$

Ze zadání víme, že

$$\begin{aligned} S_C &= S_1, \\ S_D &= S_2. \end{aligned}$$

Rozšířená Pythagorova věta nám říká, že obsah rovnostranného trojúhelníku sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku se rovná součtu obsahů rovnostranných trojúhelníků sestrojených nad jeho odvěsnami.

Tedy

$$S_A + S_B = S_1.$$

Dostáváme, že celkový obsah "KOSa" je

$$\begin{aligned} S &= 4 \cdot S_1 + 7 \cdot S_2 + 4 \cdot S_1 \\ S &= 8 \cdot S_1 + 7 \cdot S_2. \end{aligned}$$

Obsah "KOSa" je $8 \cdot S_1 + 7 \cdot S_2$.

Řešení příkladů z 2. kola

1. Člun tedy jede jedním směrem 8 krát a druhým 7 krát. Při první jízdě pojedou např. dva táborníci - jeden zůstane na břehu a druhý se vrací se člunem zpět (což máme dvě cesty - tam a zpět). Do člunu se naloží např. batohy a jeden z táborníků s nimi pluje na druhý břeh k táboru, kde je odevzdá a jede zpátky (4 cesty). Na "táborovém" břehu je tedy jeden táborník a dva batohy. Takto budeme postupovat až k 15 cestě, při které z člunu vystoupí i převážející táborník. Zjistíme, že táborníků je 6.

2. Nejprve vyřešíme problém, kolik sukní, kalhot, šatů a košilí má paní Nováková. Řešení se dá vyjádřit pomocí těchto "rovnic":

$$\begin{aligned} \text{šaty} &= \frac{1}{3}(\text{sukně} + \text{kalhoty}) \\ \text{sukně} &= 5 \\ \text{košile} &= \text{kalhoty} \\ \text{šaty} + \text{košile} &= 15 \end{aligned}$$

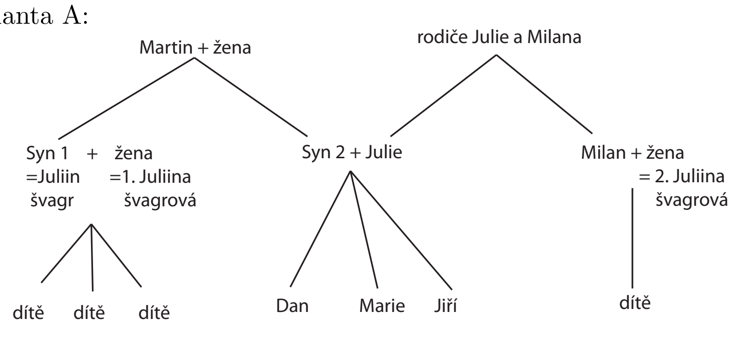
Postupným dosazením a úpravou dostaneme následující řešení:

$$\begin{aligned} \text{šaty} &= 5, \\ \text{sukně} &= 5, \\ \text{košile} &= 10, \\ \text{kalhoty} &= 10. \end{aligned}$$

Zbývá ukázat, kolika způsoby může paní Nováková dané oblečení nosit. Může jít pouze v šatech (5 možností), nebo může kombinovat košile a kalhoty ($10 \cdot 10$) nebo košile a sukně ($5 \cdot 10$). Celkově tedy existuje 155 možností, jak se může paní Nováková obléknout.

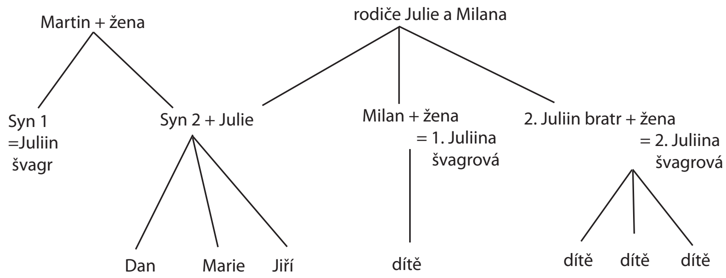
3. Předpokládáme, že každý ze synů, který má děti, je ženatý a mezi vnuky počítáme všechny jeho prapotomky. Sestavíme rodokmen této rodiny:

Varianta A:



Jak je z obrázku vidět, Martin má 6 vnuků.

Varianta B:



Z obrázku je zřejmé, že Martin má 3 vnuky.

4. Při řešení tohoto příkladu využijeme pravidel pro počítání s mocninami. Nejdříve zjistíme, kolik je možných číselných kombinací.

1 kruh	6 kombinací
1 zámek = 6 kruhů	6^6 kombinací
1 trezor = 6 zámků	$6 \cdot 6^6$ kombinací = 6^7 kombinací
6 trezorů	$6 \cdot 6^7$ kombinací = 6^8 kombinací

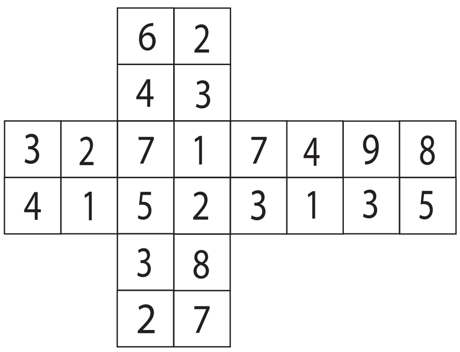
Dále spočítáme, kolik kombinací se stihne vyzkoušet za 1 měsíc.

1 minuta	$27 = 3^3$ kombinací
1 hodina = 60 minut	$60 \cdot 3^3 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5$ kombinací
1 den = 24 hodin	$24 \cdot 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 = 2^5 \cdot 3^5 \cdot 5$ kombinací
1 měsíc = 30 dní	$30 \cdot 2^5 \cdot 3^5 \cdot 5 = 2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^2 = 6^6 \cdot 5^2$ kombinací

Nyní budeme porovnávat čísla 6^8 a $6^6 \cdot 5^2$. Podělíme-li obě čísla stejným kladným číslem, nerovnost mezi nimi se nezmění. Můžeme je tedy podělit číslem 6^6 a poté budeme porovnávat čísla 6^2 a 5^2. Teď už je jasné, že $6^2 = 36 > 25 = 5^2$.

Není jisté, že pozůstalí stihnou otevřít trezor s dědictvím do 30 dnů.

5. Kostka může být doplněna následujícím způsobem:



6. Úlohu budeme řešit ve dvou krocích, zvlášť pro x sudé a x liché.

Varianta A: Nejprve předpokládejme, že číslo x je sudé.
Anička s Maruškou se střídají v počítání. Při každém kroku řekne Maruška číslo o jedno větší než Anička. Počítají-li až do čísla x, těchto kroků je $\frac{x}{2}$. Rozdíl součtu čísel, které řekne Anička a Maruška je tedy $\frac{x}{2}$. Počítají-li do čísla $2x$, rozdíl bude x. Víme, že rozdíl součtů je o 37 menší pokud počítají do čísla x než kdyby počítaly do $2x$. Dostáváme tedy jednoduchou rovnici

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + 37 &= x, \\ x &= 74. \end{aligned}$$

Varianta B: Nyní předpokládejme, že x je liché číslo.
Z předcházejícího už víme, že je-li x sudé číslo, pak rozdíl součtů čísel, které řekne Anička a součtu čísel, které řekne Maruška je $\frac{x}{2}$. Tedy pokud děvčata dopočítají až do čísla $x - 1$, které je sudé, součet čísel, které řekne Maruška je o $\frac{x-1}{2}$ větší, než součet čísel, které řekne Anička. Jako poslední ješte Anička řekne číslo x, rozdíl tedy bude $x - \frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{2}$. Nyní budeme počítat rozdíl součtů, počítají-li do $2x$. je zřejmé, že číslo $2x$ je opět sudé, rozdíl součtů tedy bude právě x. Danou situaci můžeme vyjádřit rovnicí

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2} + 37 &= x, \\ x &= 75. \end{aligned}$$

Anička s Maruškou dopočítaly do čísla 74 nebo 75.

Řešení příkladů z 3. kola

1. Budeme předpokládat, že účastníků tenisového utkání bude n. Každý účastník si podá ruku s ostatními právě jednou (nemůže si podat ruku sám se sebou). Sestavíme tedy rovnici:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 496,$$

jejíž řešení nám dá dva kořeny $x_1 = 32$ a $x_2 = -31$. Záporné číslo nám nevyhovuje, neboť nemůžeme mít záporný počet účastníků.
Nyní budeme počítat kola, kterých se zúčastní vítěz. V prvním kole bude hrát všech 32 tenistů. Jelikož uvažujeme jednoho vítěze, musí se hrát "dvouhra" a tedy první kolo znamená 16 zápasů. Vypadne při něm polovina hráčů - do druhého kola tedy nastupuje 16 hráčů v osmi zápasech, ve třetím kole bude jen 8 hráčů ve čtyřech zápasech a v předposledním čtvrtém kole se odehrají dva zápasy. Páté kolo je finálovým, v němž se utká vítěz a poražený finalista. Vítěz tedy odehraje 5 zápasů.

2. Ze zadání vyplývá, že pokud si Petr koupil JABLKA, pak si koupil i BANÁNY a pokud si koupil BANÁNY, pak koupil i JAHODY. O Jardovi víme, že pokud si koupil POMERANČE, pak si koupil také JAHODY. Eliščin nákup měl tyto podmínky: Pokud si koupila POMERANČE, pak koupila také JAHODY a pokud koupila BANÁNY, pak koupila i JAHODY. Zbývající podmínky již neuvádíme.
Budeme uvažovat možnosti, kdy jeden z účastníků nákupu nekoupil banány. Situace budou vyjádřeny pomocí tabulek:

Banány nekoupí Petr:

Petr	Jarda	Eliška
-	banány	banány
jahody	-	jahody
pomeranče	-	pomeranče
-	jablka	jablka

Eliška nemůže mít 4 druhy ovoce.

Banány nekoupí Jarda:

Petr	Jarda	Eliška
banány	-	banány
jahody	-	jahody
pomeranče	-	pomeranče
-	jablka	jablka

Jablka může mít i Petr, ale výsledek by byl stejný - Jarda nemá minimálně dva druhy ovoce.

Banány nekoupí Eliška:

Petr	Jarda	Eliška
banány	banány	-
jahody	-	jahody
pomeranče	-	pomeranče
-	jablka	jablka

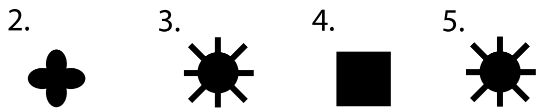
Banány si tedy nekoupila Eliška.

Poznámka: Nesprávných možností může být i více. My jsme si vybrali jen některé z nich.

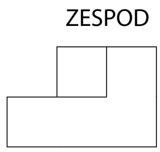
3. Ze zadání vidíme, že poslední cifra součtu písmen K musí být rovna 8, tedy $4\mathrm{K} = 8, 18, 28$ nebo 38. V prvním kroku odstraníme ta čísla, která nám nedají celou hodnotu K. Zbydou tedy čísla 8 a 28.
Nejprve budeme uvažovat číslo 8. Pokud $4\mathrm{K} = 8$, pak $\mathrm{K} = 2$. Nyní budeme již uvedený postup uvažovat pro součet písmen O, tedy $3\mathrm{O} = 8$, což nám nevyhovuje, neboť O by nebylo celé číslo.
Pokud by bylo $3\mathrm{O} = 18$, pak by $\mathrm{O} = 6$, a pro S bychom dostali rovnici $2\mathrm{S}+1 = 8$, nebo $2\mathrm{S}+1 = 18$, z nichž ani jedna nemá celý kořen. Nakonec vyloučíme možnost $3\mathrm{O} = 28$, jejíž kořen není opět celý.
Teď budeme uvažovat situaci, kdy $4\mathrm{K} = 28$. Pak $\mathrm{K} = 7$. Pro O pak dostáváme rovnice $3\mathrm{O} + 2 = 8$, $3\mathrm{O} + 2 = 18$ a $3\mathrm{O} + 2 = 28$, z nichž nám vyhovuje pouze první z nich. A tedy dostáváme, že $\mathrm{O} = 2$.
V posledním kroku uvažujeme velikost cifry S - $2\mathrm{S} = 8$ nebo $2\mathrm{S} = 18$. Obě možnosti nám vyhovují a stačí tedy dopočítat příslušné hodnoty pro S a I. V prvním kroku je $\mathrm{S} = 4$ a $\mathrm{I} = 8$, v druhém kroku bude $\mathrm{S} = 8$ a pro I dostaneme rovnost $\mathrm{I} + 1 = 8$, tedy $\mathrm{I} = 7$.

Slovo KOS může být vyjádřeno pomocí dvou čísel: 724 a také 729.

4. Symboly na kostce doplníme takto:



5. Daný útvar se skládá z šesti kostek. Pohled zespod vypadá následovně:



6. Na stromě sedí celkem $5 + 6 + 3 = 14$ ptáků, z toho 3 jsou kosi. Tedy v případě, že Honzík bude mířit přesně, je pravdepodobnost, že trefí kosa $\frac{3}{14}$. Avšak Honzíkova úspěšnost střelby je $\frac{1}{4}$. Pak celková pravděpodobnost, že hned napoprvé trefí kosa, je

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{14} = \frac{3}{56}.$$

Pravděpodobnost, že Honzík hned napoprvé trefí kosa je $\frac{3}{56}$.