KOS
Matematický KOrespondenční Seminář

(Matematického ústavu Slezské univerzity v Opavě)

2. ROČNÍK

2002/2003

Vážení přátelé,

děkujeme vám za účast v 2. ročníku našeho korespondenčního semináře KOS. Těší nás váš vzrůstající zájem oproti minulému ročníku. Všem účastníkům zasíláme tuto brožurku, ze které se můžete dozvědět, jak jste uspěli v porovnání s ostatními soutěžícími. Součástí brožurky je také kompletní zadání a řešení všech tří kol letošního ročníku. Chceme jenom poznamenat, že mnohé příklady je možné řešit různými způsoby a my jsme uvedli pouze některá řešení.

Rozdíly mezi vámi byly minimální, proto nás mrzí, že nemůžeme věcnými cenami odměnit všechny, ale pouze první tři. Účastníci všech tří kol od nás dostali alespoň čestné uznání a blok s tužkou.

V letošním ročníku se stala jedna nemilá věc. Pošta ztratila minimálně jeden dopis. Všem, kterým tato skutečnost ovlivnila umístění, se moc omlouváme, i když jsme ji nemohli ovlivnit.

Doufáme, že i nadále budete mít dobrý vztah k matematice. A možná se také setkáme při nějaké další příležitosti, např. v příštím ročníku korespondenčního semináře.

Přejeme vám hodně úspěchů při studiu i v osobním životě.

Za organizátory

A. Haková
RNDr. D. Smetanová
RNDr. J. Šeděnková
Mgr. P. Volný

Výsledky 2. ročníku KOSa

Pořadí	Jméno	1. kolo	2. kolo	3. kolo	Součet
1.	Váňová	29	30	30	89
2.	Háková	28	29,5	30	87,5
3.	Unzeitig	27,5	29,5	27,5	84,5
4.	Motyčka	26,5	30	27,5	84
5.	Hotový	26,5	27	30	83,5
6.	Studničná	25	28	30	83
7.	Novotný	27,5	24	30	81,5
8.	Jedlička	24	29,5	26,5	80
9.	Žák	25	23	30	78
10.	Kaller	19	29,5	28	76,5
11.	Uhlířová	20,5	25	30	75,5
12.	Polčák	18	26,5	29,5	74
13.	Lukášek	19	29	25	73
14.-16.	Ćmielová	20	21	29,5	70,5
	Michalcová	18	25	27,5	70,5
	Pospíšilová	24	17,5	29	70,5
17.	Hradilová	25	21	24	70
18.	Legerský	25	20,5	24	69,5
19.-20.	Peikertová	22,5	18	28,5	69
	Šeděnka	26,5	12,5	30	69
21.	Horníčková	18	22,5	26	66,5
22.	Uchytilová	13,5	22,5	30	66
23.	Hudcová	13	20,5	28,5	62
24.	Kalužová	21,5	14,5	25	61
25.	Hauptová Z.	18	19	21,5	58,5
26.	Hauptová K.	18	16,5	23	57,5
27.	Procházka	15,5	15	26,5	57
28.	Šindelová	20	12	17,5	49,5
29.-31.	Bakalová	24,5	24,5	0	49
	Březinová	0	24,5	24,5	49
	Poledníková	14	15	20	49
32.-33.	Mohylová	18	0	30	48
	Nováková	13	20	15	48
34.	Pechová	22	23,5	0	45,5
35.	Ježowicz	22	21,5	0	43,5
36.	Cupal	13	15	15	43
37.	Zámečníková	20	7,5	15	42,5
38.-40.	Lokajová	14,5	14	13,5	42
	Michnová	13,5	7	21,5	42
	Mikita	13	10	19	42
41.-42.	Froněk	11	10,5	17,5	39
	Sotolářová	8,5	9	21,5	39
43.	Lepík	18,5	20	0	38,5

Pořadí	**Jméno**	**1. kolo**	**2. kolo**	**3. kolo**	**Součet**
44.-45.	Machala	13	22,5	0	35,5
	Pastor	13	22,5	0	35,5
46.-47.	Skoták	18,5	16,5	0	35
	Škutová	13	0	22	35
48.-50.	Juříčková	13	0	21,5	34,5
	Kabilová	14,5	20	0	34,5
	Luks	19,5	15	0	34,5
51.-54.	Bozděchová	13	20	0	33
	Dohnal	19	14	0	33
	Míček	13	20	0	33
	Šafář	18	15	0	33
55.	Melár	18	12,5	0	30,5
56.	Mikolášová	13	16,5	0	29,5
57.-61.	Butschleová	13	15	0	28
	Hapala	18	10	0	28
	Jeckelová	13	15	0	28
	Jírová	13	15	0	28
	Kočvarová	15,5	12,5	0	28
62.-63.	Demjen	17	10,5	0	27,5
	Kozubek	20	7,5	0	27,5
64.	Nowaková	27	0	0	27
65.	Nikendeiová	13	12,5	0	25,5
66.	Kramoliš	24,5	0	0	24,5
67.	Nakládal	23	0	0	23
68.	Šodková	13	7,5	0	20,5
69.	Mucha	20	0	0	20
70.	Kořený	18,5	0	0	18,5
71.	Režná	18	0	0	18
72.-73.	Michnová	16	0	0	16
	Pátková	16	0	0	16
74.	Šimíková	0	15,5	0	15,5
75.-81.	Chrobáková	0	15	0	15
	Chudoba	15	0	0	15
	Kavka	15	0	0	15
	Konečný	15	0	0	15
	Koucký	15	0	0	15
	Marenčoková	0	15	0	15
	Pecháček	0	15	0	15
82.	Klepková	14	0	0	14
83.	Závodský	13,5	0	0	13,5
84.	Ligocki	13	0	0	13
85.	Haladej	0	12,5	0	12,5
86.	Malá	10,5	0	0	10,5
87.-88.	Chlebková	0	8	0	8
	Poláčková	0	8	0	8
89.	Páleníčková	0	7	0	7

Jak měřit?

připravil Mgr. M. Pobořil

Uveďme pro zajímavost, že délková jednotka metr byla zavedena ve Francii až v době Velké francouzské revoluce (1799). Jejím základem se stal desetimilióntý díl čtvrtiny zemského poledníku. Metr byl přijat většinou zemí pro podstatnou přednost, jíž jsou převodní koeficienty rovné mocninám desítky.

V současné době se používá definice metru (základní jednotky SI) odvozená od rychlosti světla ve vakuu. **Metr** je délka trajektorie, kterou proběhne světlo ve vakuu za 1/299 792 458 sekundy.

Ovšem v dřívějších dobách se užívalo několik stovek různých jednotek délky (často se jednalo o části lidského těla). Dodnes se někde používá názvů „loket“, „stopa“ atd. Například v jižní Africe se mluví o kohoutím křiku a bučení krávy a myslí se tím vzdálenost, na kterou je tyto zvuky slyšet.

V době Přemysla Otakara II. se i u nás měřilo na lokte. Pražský loket měl 3 pídě, jedna píď 10 prstů a jeden prst 4 zrna ječmene. Větší jednotkou byl hon, který se dělil na 5 provazců, což bylo 210 pražských loktů. Loket měřil asi $53,4\,cm$.

Příklad: Pokuste se vypočítat délku jednoho zrna ječmene a délku jednoho honu.

Řešení: a)
1 loket .... 3 pídě
1 píď .... 10 prstů tzn. 1 loket = 3 · 10 prstů = 30 prstů

---

1 loket .... 30 prstů
1 prst .... 4 zrna ječmene tzn. 1 loket = 30 · 4 zrn ječmene = 120 zrn ječmene

---

Tedy: 1 loket ..... 120 zrn ječmene.

Jestliže známe délku 1 lokte, což je $53,4\,cm$, pak délku jednoho zrna ječmene vypočítáme tak, že délku 1 lokte vydělíme 120.

$$53,4\,cm : 120 = 0,445\,cm$$

Délka jednoho zrna ječmene byla asi $0,445\,cm$.

b) Podobně:

1 hon .... 5 provazců .... 210 loktů

Tedy: 1 hon .... $210 \cdot 53,4\,cm = 11\,214\,cm$

Délka jednoho honu byla asi $112,14\,m$.

Zadání a řešení 1. kola

1. Hlemýžď byl od vlaštovky pozván na svačinu ve vzdálenosti jedné galské míle. Hlemýžď však za den ušel jen jednu unci stopy. Za kolik dní hlemýžď dorazil k vlaštovce na svačinu? (1 galská míle = 1500 dvojkroků = asi $2,25\,km$, 1 dvojkrok = 5 stop, 1 stopa = 12 uncí)

Řešení 1. Využitím převodních vztahů dostáváme následující rovnosti:
1 galská míle = 1 500 dvojkroků = 5·1 500 stop = 12·5·1 500 uncí = 90 000 uncí = 90 000 dní.

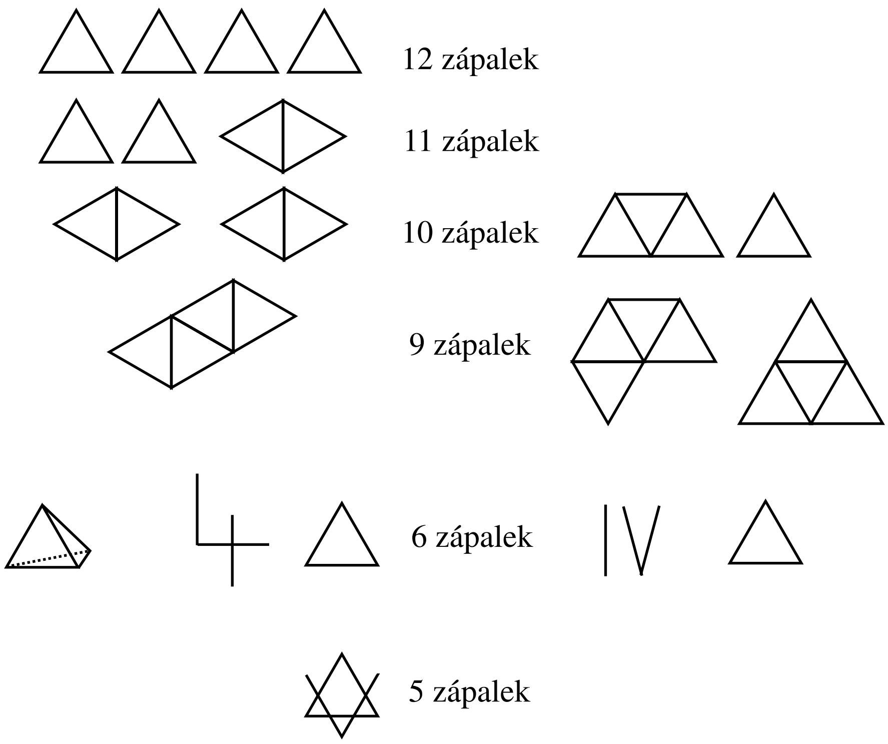
Hlemýžď by došel k vlaštovce za 90 000 dní. Ve skutečnosti by k vlaštovce asi nikdy nedorazil, protože jeho cesta by trvala přes 200 let a hlemýždi ani vlaštovky se takového věku nedožívají. (Ledaže bychom uvažovali jinou planetu, na které by to všechno mohlo být možné.)

2. Máme 12 zápalek, ze kterých můžeme poskládat čtyři rovnostranné trojúhelníky (viz. obrázek).

12 zápalek

Odebráním jedné zápalky nám zůstane 11 zápalek, ze kterých opět dokážeme poskládat 4 rovnostranné trojúhelníky. Nakreslete řešení, jestliže existuje, jak můžeme poskládat 4 rovnostranné trojúhelníky z 11, 10 a 9 zápalek. Lze utvořit 4 rovnostranné trojúhelníky z menšího počtu zápalek než z 9?

Řešení 2. Na následujících obrázcích vidíme, jak poskládat 4 rovnostranné trojúhelníky z 11, 10 a 9 zápalek (nemusí to být jediná řešení). Nejmenší počet zápalek, ze kterých poskládáme 4 rovnostranné trojúhelníky je 6 (nebo 5, pokud připustíme, že trojúhelníky mohou mít různou velikost). Pro 6 zápalek máme několik možností, buď prostorový obrázek čtyřstěnu, kde stěny tvoří 4 rovnostranné trojúhelníky, nebo plochý obrázek s využitím číslice 4 nebo IV.



3. Představte si, že rozřežeme krychlový metr na krychlové milimetry a z těchto malých kostiček vytvoříme souvislou rovnou řadu. Jak dlouho by vám trvala cesta od první krychličky k poslední krychličce, kdybyste šli rychlou chůzí (bez přestávky) $6\,km \cdot h^{-1}$.

Řešení 3. Nejdříve spočítáme, kolik krychlových milimetrů má krychlový metr

$$1\,m^3 = (1000)^3\,mm^3 = 10^9\,mm^3.$$

Řada z malých kostiček bude tedy dlouhá

$$10^9\,mm = 10^6\,m = 10^3\,km.$$

Vztah mezi dráhou $x = 10^3\,km$, rychlostí $v = 6\,km \cdot h^{-1}$ a časem t je dán rovnicí $x = v \cdot t$, ze které vyjádříme čas

$$t = \frac{x}{v} = \frac{1000}{6}\,h = 166,\bar{6}\,h.$$

Cesta od první k poslední kostičce by trvala 166 hodin a 40 minut, což je 6 dní 22 hodin a 40 minut.

4. Pro které hodnoty parametru $a \in R$ má systém rovnic

$$x^2 = y^2, \qquad (x-a)^2 + y^2 = 1$$

právě čtyři, právě tři, právě dvě, právě jedno nebo žádné řešení?

Řešení 4. Budeme hledat řešení systému rovnic

$$x^2 = y^2, \qquad (x-a)^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

Sečtením obou rovnic dostaneme kvadratickou rovnici

$$2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0 \tag{2}$$

Tato kvadratická rovnice může mít v závislosti na parametru a buď žádné řešení, jedno řešení nebo dvě řešení. Spočítáme diskriminant kvadratické rovnice (2)

$$D = 4a^2 - 4 \cdot 2 \cdot (a^2 - 1) = 4(2 - a^2).$$

Rovnice nemá řešení, je-li D je menší než 0,

$$D < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty).$$

Pro stejné hodnoty parametru a neexistuje žádné řešení ani pro zadaný systém rovnic (1).

Jedno řešení rovnice (2) existuje v případě, že D je roven nule,

$$D = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a \in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}.$$

Najdeme řešení rovnice (2) a pak i systému (1) (využijeme rovnost $x^2 = y^2$)

$$
\begin{array}{llll}
a = -\sqrt{2} & \Rightarrow \quad x = \dfrac{2a}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \Rightarrow & y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\
a = \sqrt{2} & \Rightarrow \quad x = \dfrac{2a}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \Rightarrow & y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}
\end{array}
$$

Snadno ověříme, že pro dvojice (x, y) jsou všechny čtyři nalezené dvojice $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$, $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$, $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ řešením systému (1). Právě jsme zjistili, že pro hodnoty $a = -\sqrt{2}$ nebo $a = \sqrt{2}$ má rovnice (2) jediné řešení a systém (1) má právě dvě řešení.

Dvě řešení rovnice (2) existují v případě, že D je větší než nula,

$$D > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right).$$

V tomto případě máme dvě řešení

$$x_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4(2 - a^2)}}{4} = \frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

Ke každému x máme z rovnosti $x^2 = y^2$ dvě řešení pro y, ve tvaru

$$y = \pm\sqrt{x^2} = \pm|x|,$$

kromě jedné výjimky. V případě, že $x = 0$, máme pouze jedno řešení $y = 0$. Najdeme parametr a, pro který je $x = 0$, protože pro tyto parametry bude mít systém (1) právě tři řešení, v ostatních případech bude mít právě čtyři řešení.

$$x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm\sqrt{2 - a^2} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 2 - a^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 1.$$

Řešení systému (1) jsou pak skutečně tři

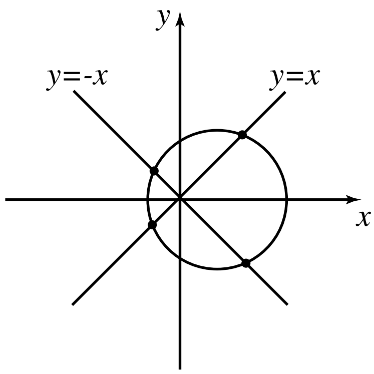
$$
\begin{array}{lllll}
a = -1 & \Rightarrow & (0, 0), & (-1, -1), & (-1, 1), \\
a = 1 & \Rightarrow & (0, 0), & (1, -1), & (1, 1).
\end{array}
$$

Vyčerpali jsme všechny možnosti, které mohou nastat a zjistili jsme, že nikdy (pro žádnou hodnotu parametru a) nenastane možnost, že má systém (1) právě jedno řešení.

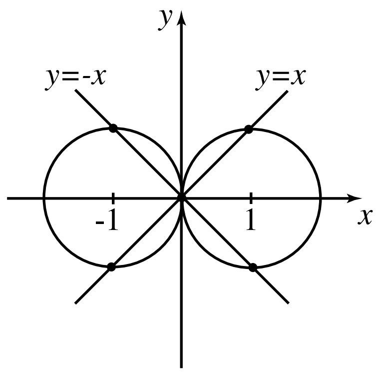
Shrneme celou předchozí úvahu do tabulky

Hodnoty parametru a	Počet řešení systému(1)
$(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$	0
$\emptyset$	1
$\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$	2
$\{-1, 1\}$	3
$\big(-\sqrt{2}, -1\big) \cup (-1, 1) \cup \big(1, \sqrt{2}\big)$	4

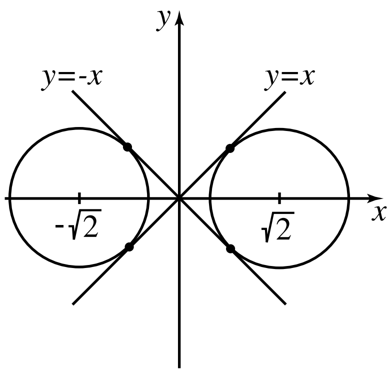
Tato úloha se dá řešit i graficky.



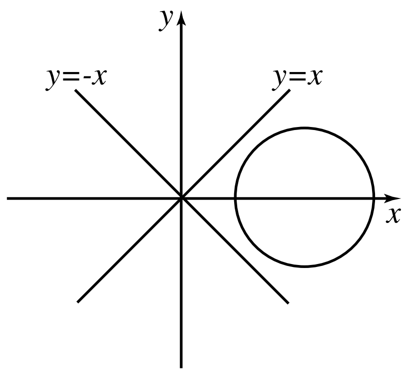
4 řešení soustavy



3 řešení soustavy



2 řešení soustavy

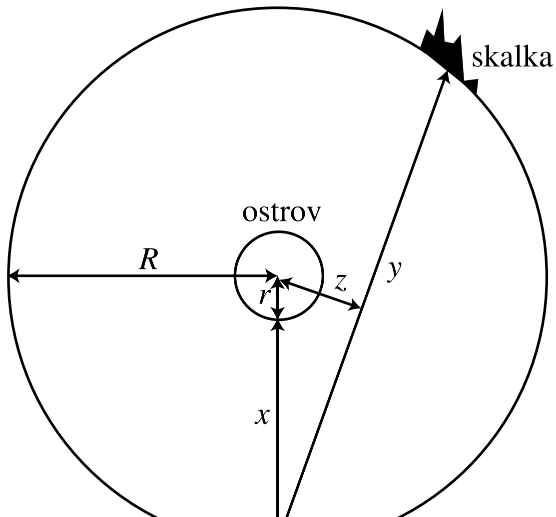


0 řešení soustavy

Grafickým řešením první rovnice je dvojice přímek (osa 1. a 3. kvadrantu a osa 2. a 4. kvadrantu), grafickým řešením druhé rovnice je kružnice se středem na ose x (v bodě $(a, 0)$) a poloměrem 1. Změníme-li parametr a, posune se kružnice. Řešením systému (1) jsou průsečíky dvojice přímek a kružnice. Na předchozích obrázcích je vidět, kdy existují 4 průsečíky, kdy 3 průsečíky, kdy dva průsečíky, kdy žádný průsečík. (Z obrázku se dají spočítat i odpovídající hodnoty parametru a, které vycházejí stejně jako při předchozím způsobu řešení.)

5. Uprostřed kruhového rybníka je maličký kruhový ostrůvek, ke kterému Hanka doplave o jednu minutu a šest sekund dříve než ze stejného místa ke skalce na druhém břehu. Při přímočaré plavbě ke skalce míjí střed ostůvku o 24 metrů. Jaká je rozloha rybníka, jestliže Hanka plave stále rovnoměrným tempem $3,6\,km \cdot h^{-1}$?

Řešení 5. Označme si t_1 čas, který Hanka potřebuje k tomu, aby doplavala k ostrůvku, x vzdálenost k ostrůvku, t_2 čas, který Hanka potřebuje k doplavání ze stejného místa ke skalce, y vzdálenost ke skalce, v rychlost, kterou Hanka plave, R poloměr rybníka, r poloměr ostrůvku, z vzdálenost, ve které míjí střed ostrůvku (viz. obr.). (Poloměr ostrůvku r můžeme zanedbat, pokud to neuděláme, bude nám vystupovat jako parametr, na kterém závisí řešení.)



Všechny zadané hodnoty si převedeme do stejných jednotek (metry a sekundy):

$$\begin{aligned}&t_2 - t_1 = 1\,min\,6\,s = 66\,s,\\&v = 3,6\,km \cdot s^{-1} = 1\,m \cdot s^{-1},\\&x = 24\,m.\end{aligned}$$

Ze vztahů $x = t_1 \cdot v$, $y = t_2 \cdot v$ získáme vztah mezi x a y

$$y - x = (t_2 - t_1)v = 66\,m.$$

Z obrázku vidíme, že nám vzniká pravoúhlý trojúhelník s přeponou $R = x + r$ a odvěsnami 24 a $y/2$. Využijeme Pythagorovu větu:

$$R^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + z^2,$$

$$(x + r)^2 = \left(\frac{x + 66}{2}\right)^2 + 24^2,$$

$$3x^2 + (8r - 132)x + 4r^2 - 6660 = 0.$$

Vyřešíme tuto kvadratickou rovnici s neznámou x a parametrem r. (Ze zadání úlohy vyplývá, že poloměr ostrůvku je menší než $24\,m$. Při větším poloměru by Hanka nemohla plavat přímočaře ke skalce.)

$$D = (8r - 132)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (4r^2 - 6660) = 16r^2 - 2112r + 97344 > 0.$$

($D > 0$ protože rovnice $D = 0$ nemá pro r řešení, pro $r = 0$ je $D = 97344 = 312^2 > 0$, ze spojitosti kvadratické funkce pak vyplývá, že $D > 0$ všude.)

$$x_{1,2} = \frac{132 - 8r \pm \sqrt{D}}{6}$$

Rovnice má tedy vždy dvě řešení $x_{1,2}$. Ukážeme, že jedno z těchto řešení je záporné a není tedy řešením naší úlohy, protože pracujeme s kladnými hodnotami pro vzdálenost.

Ověřujeme platnost následující nerovnosti:

$$132 - 8r < \sqrt{D} = \sqrt{16r^2 - 2112r + 97344}.$$

Na pravé straně máme vždy kladné číslo, na levé může být kladné i záporné. Pro zápornou levou stranu je nerovnost splněna triviálně. Předpokládejme, že $132-8r$ je kladné číslo. V tomto případě můžeme obě strany umocnit na druhou a nerovnost zůstane zachována

$$17424-2112r+64r^2<16r^2-2112r+97344.$$

Po úpravě dostáváme

$$r^2<1665.$$

Tato nerovnost je vždy splněna, protože z předpokladu, že $132-8r$ je kladné číslo plyne podmínka, že $r<16,5$ ($r^2<272,25<1665$).

Zůstává nám jediné řešení

$$x=\frac{132-8r+\sqrt{16r^2-2112r+97344}}{6}.$$

Rozlohu rybníka spočítáme jako obsah kruhu

$$S=\pi R^2=\pi(x+r)^2=\pi\left(\frac{132-8r+\sqrt{16r^2-2112r+97344}}{6}+r\right)^2.$$

Jestliže budeme rozlohu ostrůvku zanedbávat, dosadíme

$$r=0$$

a dostaneme

$$x=74\,m$$

a

$$S=5476\pi\,m^2\doteq 17203,4\,m^2.$$

6. a) Nalezněte funkci f jedné reálné proměnné, která je sudá a splňuje rovnici

$$f(x)+f(y)-f(x+y)+6xy=-2.$$

b) Nalezněte funkci g jedné reálné proměnné, která splňuje rovnici

$$g(x+y)+g(x-y)-2g(y)=6x^2$$

a funkční hodnota v bodě -1 je rovna 1.

Řešení 6.

a) Budeme za x a za y dosazovat různé hodnoty tak, abychom získávali nové údaje. Zkusíme nejdříve dosadit $x = 0$, $y = 0$

$$f(0) + f(0) - f(0+0) + 6 \cdot 0 \cdot 0 = -2.$$

Po úpravě dostáváme funkční hodnotu v bodě 0

$$f(0) = -2.$$

Pokračujeme dál, zkusíme dosadit $x = x$, $y = -x$

$$f(x) + f(-x) - f(x + (-x)) + 6 \cdot x \cdot (-x) = -2.$$

Dosadíme $f(-x) = f(x)$ (funkce f je sudá), $f(x + (-x)) = f(0) = -2$ a upravíme

$$\begin{aligned} 2f(x) + 2 - 6x^2 &= -2, \\ f(x) &= 3x^2 - 2. \end{aligned}$$

Nakonec ještě provedeme zkoušku dosazením řešení do zadání a ověřením, že f je sudá funkce.

$$\begin{aligned} L &= f(x) + f(y) - f(x+y) + 6xy = 3x^2 - 2 + 3y^2 - 2 - (3(x+y)^2 \\ &- 2) + 6xy = 3x^2 + 3y^2 - 3x^2 - 6xy - 3y^2 - 2 + 6xy = -2, \\ P &= -2, \\ L &= P \qquad \Rightarrow \qquad f \text{ je řešením funkcionální rovnice.} \end{aligned}$$

$$f(-x) = 3(-x)^2 - 2 = 3x^2 - 2 = f(x) \qquad \Rightarrow \qquad f \text{ je sudá funkce.}$$

Funkcionální rovnice má jediné řešení $f(x) = 3x^2 - 2$.

b) Budeme za x a za y dosazovat různé hodnoty tak, abychom získávali nové údaje. Zkusíme nejdříve dosadit $x = 0$, $y = 0$

$$g(0+0) + g(0-0) - 2g(0) = 6 \cdot 0^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = 0.$$

nezískali jsme nic nového. Pokračujeme dál, zkusíme dosadit $x = x$, $y = 0$,

$$\begin{aligned} g(x+0) + g(x-0) - 2g(0) &= 6x^2, \\ 2g(x) - 2g(0) &= 6x^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Do této rovnice dále dosadíme $x = -1$, protože známe funkční hodnotu v bodě -1 (ze zadání $g(-1) = 1$), a upravíme

$$\begin{aligned} 2g(-1) - 2g(0) &= 6 \cdot (-1)^2 \\ 2 - 2g(0) &= 6 \\ g(0) &= -2. \end{aligned}$$

Tento výsledek $g(0) = -2$ dosadíme do rovnice (3) a upravíme

$$\begin{aligned} 2g(x) - 2 \cdot (-2) &= 6x^2 \\ 2g(x) &= 6x^2 - 4 \\ g(x) &= 3x^2 - 2. \end{aligned}$$

Nakonec ještě provedeme zkoušku dosazením řešení do zadání a ověřením, že funkční hodnota v bodě -1 je rovna 1.

$$\begin{aligned} L &= g(x+y) + g(x-y) - 2g(y) = 3(x+y)^2 - 2 + 3(x-y)^2 - 2 \\ &- 2(3y^2 - 2) = 3x^2 + 6xy + 3y^2 + 3x^2 - 6xy + 3y^2 - 6y^2 - 4 + 4 = 6x^2, \\ P &= 6x^2, \\ L &= P \qquad \Rightarrow \qquad g \text{ je řešením funkcionální rovnice.} \end{aligned}$$

$$g(-1) = 3(-1)^2 - 2 = 3 \cdot 1 - 2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad g(-1) = 1.$$

Funkcionální rovnice má jediné řešení $g(x) = 3x^2 - 2$.

Číselné soustavy v historii a příkladech aneb Proč právě desítka?

připravila A. Haková

Protože nejčastěji používáme vyjádření čísel v desítkové soustavě, většinou si neuvědomujeme, že to není jediný způsob vyjádření čísla. Nejprve si ukážeme, jak vypadají zápisy téhož čísla v desítkové a dvojkové soustavě a pak si řekneme o historii vývoje používání různých číselných soustav.

Tedy například číslo 348 se dá zapsat následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
348 &= 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 = 300 + 40 + 8 \\
348 &= (348)_{10} \\
348 &= 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\
&= 256 + 0 + 64 + 0 + 16 + 8 + 4 + 0 + 0 \\
348 &= (101011100)_2
\end{aligned}$$

$(348)_{10}$ (resp. $(101011100)_2$) značí zápis čísla 348 v desítkové (resp. dvojkové) soustavě. Podobným způsobem můžeme převést číslo 348 i do soustav o jiném základu. Tedy obecně platí, že číslo a v soustavě o základu k se dá vyjádřit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
a &= a_n \cdot k^n + a_{n-1} \cdot k^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^1 + a_0 \cdot k^0 \\
a &= (a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0)_k
\end{aligned}$$

kde $a_0, \ldots, a_n \in \{0, \ldots, k-1\}$ a k^{n+1} nedělí a.

Vytvoření vhodného zápisu čísla je završením cesty od chápaní „množství“ k pojmu čísla. Charakter zápisu čísla podstatně ovlivňuje možnosti rozvoje aritmetiky. Ještě v 15. století bylo možné získat pověst rychlopočtáře vypočítáním součinu $15 \cdot 10$ zpaměti. Když si ale uvědomíme, že až do 16. století převládal v Evropě římský způsob zápisu čísel, není to až tak překvapující. Stačí porovnat tyto dva zápisy:

$$15 \cdot 10 = 150$$

$$\mathrm{XV} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{CL}$$

Už ve starší době kamenné vyjadřoval člověk množství pomocí „zápisu“ - vroubkování. Důkazem je vlčí kost s 55 vroubky nalezená ve Věstonicích.

Od seskupování značek vede cesta k utvoření osobitého znaku pro celou skupinu. Například namísto IIIII se napíše znak Z. Potom množství IIIII II je možné zapsat jako Z II ale také IZI. Není rozhodující, v jakém pořadí znaky píšeme. Podstatné je pouze to, že každý znak má dohodnutou hodnotu. Číselné soustavy s takovýmto způsobem zápisu čísla nazýváme **aditivní nepoziční soustavy**. Takovéto soustavy se používali např. v Egyptě.

Ve starém Řecku se prosadil tzv. **jónský zápis** . Jónský zápis čísla se délkou v podstatě neliší od našeho zápisu. Písmeny abecedy se daly vyjádřit čísla od 1 až po 999. Tisíce se označovaly přidáním čárky před znakem, desetitisíce přidáním písmena M.

První poziční soustava je doložená u starých Sumerů. Původně se tam používala nepoziční desítková soustava, která měla dva znaky.
V dalším vývoji se přestalo rozlišovat mezi velikostí znaků a řád se namísto velikosti začal označovat polohou. Poziční soustavu s nulou používali také Mayové, byla to soustava pětkovo-dvacítková.

Nejstarší homogenní poziční soustava spadá asi do 6. až 8. století, jde o **desítkovou indickou soustavu**. Tento systém se rozšířil prakticky po celém světě. Podle národa, který přispěl k rozšíření této soustavy do Evropy, se lidově nazývá **arabské číslice**. Arabské slovo „as sifra" = prázdno označuje nejnápadnější, nulu. Do slovníku evropských jazyků přešlo jako cifra. Nula dostala jméno podle latinského „nulla figura", což se dá přeložit jako „žádný tvar". Arabské číslice do Evropy pronikly asi v polovině 10. stolení, ale trvalo 600 let než je lidé ovládli. To bylo způsobeno tím, že mezi praktiky, kterým stačilo pro jejich potřeby počítadlo - abakus, se výhody poziční soustavy a písemného počítání neprojevovaly tak markantně.

Otevřenou otázkou zůstává, co rozhodlo o **volbě** základu soustavy. Desítková soustava se nám zdá samozřejmá, protože jsme na ni od od malička zvyklí. Ale číselné soustavy s jiným základem nebyly v minulosti výjimkou. Vzpomeňme třeba už zmíněnou Babylonskou šedesátkovou soustavu nebo dvacítkovou soustavu Mayů. Dvacítková soustava Keltů se zachovala dokonce ve francouzské terminologii, například 80 se řekne quatre - vingts, tedy čtyři dvacítky. Dvanáctková soustava Velké Británie se u nás projevila počítáním na tucty. Na přelomu 20. století se u primitivních národů amerického kontinentu podařilo objevit 307 číselných systémů, ze kterých jen 146 bylo desítkových. Jisté je, že důležitou roli při volbě základu číselné soustavy sehrála skutečnost, že člověk má deset prstů. Vždyť byly po tisíciletí nejpřirozenější pomůckou při počítání. Další výhodou desítkové soustavy je přijatelný počet cifer.

Příklad: Nalezněte všechna řešení rovnice

$$17_x + 32_y = 52_z,$$

kde $x, y, z < 10$.

Řešení: Ze zápisu 17_x plyne, že základ x musí být větší než 7 a ze zadání musí být menší než 10. Obdobnou úvahou dostáváme nerovnosti pro x, y, z: $8 \leq x \leq 9$, $4 \leq y \leq 9$ a $6 \leq z \leq 9$. Rovnici si můžeme zapsat ve tvaru

$$x + 7 + 3y + 2 = 5z + 2,$$

tedy

$$x + 3y - 5z + 7 = 0. \tag{4}$$

I. Předpokládejme, že $x = 8$, dosazením do rovnice (4) a jejím upravením získáme

$$y = \frac{5z}{3} - 5.$$

Protože $6 \leq z \leq 9$ a y musí být přirozené číslo (bez nuly), vyhovuje pouze řešení $\boldsymbol{x = 8}$, $\boldsymbol{y = 5}$, $\boldsymbol{z = 9}$.

II. Předpokládejme, že $x = 9$, dosazením do rovnice (4) a jejím upravením získáme

$$y = \frac{5z - 16}{3}.$$

Protože $6 \leq z \leq 9$ a y musí být přirozené číslo (bez nuly), vyhovuje pouze řešení $\boldsymbol{x = 9}$, $\boldsymbol{y = 8}$, $\boldsymbol{z = 8}$.

Zadání a řešení 2. kola

1. Jak se v trojkové soustavě pozná, že je číslo dělitelné 2?

Řešení 1. V desítkové soustavě platí, že libovolné číslo je dělitelné 2, jestliže poslední číslice je dělitelná 2 (jinak řečeno, poslední číslice je 0, 2, 4, 6, nebo 8). Zkusíme se podívat, zda neplatí obdobné pravidlo pro dělitelnost dvěma v trojkové soustavě.

Přepíšeme si do trojkové soustavy několik prvních čísel. Tedy čísla **0**, 1, **2**, 3, **4**, 5, **6**, 7, **8**, 9, **10**, 11, **12**, 13, **14** mají v trojkové soustavě toto vyjádření **0**, 1, **2**, 10, **11**, 12, **20**, 21, **22**, 100, **101**, 102, **110**, 111, **112**. Tučně jsou zvýrazněna čísla dělitelná dvěma. Snadno vidíme, že čísla dělitelná 2 končí na všechny číslice trojkové soustavy, takže nemůžeme najít ani kritérium pro dělitelnost v závislosti na poslední číslici. Toto kriterium nelze najít ani v závislosti na posledním dvojčíslí (srovnej např. $(3)_{10} = (10)_3$ a $(\mathbf{12})_{\mathbf{10}} = (\mathbf{110})_{\mathbf{3}}$).

U všech napsaných čísel platí:

Číslo zapsané v trojkové soustavě je dělitelné 2, je-li jeho ciferný součet dělitelný 2.

Tímto jsme získali hypotézu pro dělitelnost 2, která může, ale nemusí platit. Pokud se nám ji podaří dokázat, máme hledané kritérium.

Využitím binomické věty pro kladné celočíselné exponety dostáváme

$$\begin{aligned} 3^n &= (2+1)^n = \\ &= 2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} + \binom{n}{2} 2^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} 2 + 1. \end{aligned}$$

Tedy 3^n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ je vždy liché číslo a můžeme ho zapsat ve tvaru

$$3^n = 2k_n + 1, \tag{5}$$

kde k_n je nějaké přirozené číslo (včetně 0). Připomeňme si zápis čísla a ve trojkové soustavě

$$\begin{aligned} a &= a_n \cdot 3^n + a_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3^1 + a_0 \cdot 3^0 \qquad (6) \\ a &= (a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0)_3. \end{aligned}$$

Dosadíme (5) do (6):

$$\begin{aligned} a &= a_n \cdot (2k_n + 1) + a_{n-1} \cdot (2k_{n-1} + 1) + \cdots + a_2 \cdot (2k_2 + 1) \\ &\quad + a_1 \cdot (2k_1 + 1) + a_0 = \\ &= a_n \cdot 2k_n + a_{n-1} \cdot 2k_{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 2k_2 + a_1 \cdot 2k_1 \qquad (7) \\ &\quad + a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0. \end{aligned}$$

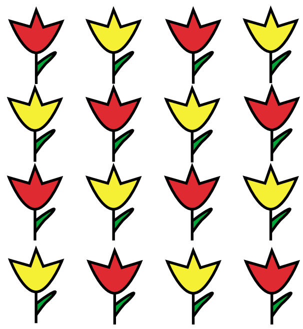
Dělitelnost dvojkou čísla a závisí pouze na tom, zda je dvěma dělitelný součet

$$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0,$$

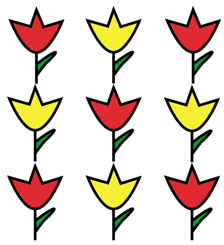
což je ciferný součet čísla a. Hypotézu jsme tedy dokázali.

2. Zahradník má čtvercový záhon o rozměrech $n \times n$ decimetrů, kde n je přirozené číslo. K osázení tohoto záhonu chce použít dva různé druhy tulipánů. Jeden druh kvete červeně a druhý žlutě. Záhon chce osázet těmito druhy tulipánů tak, aby každé dva sousední tulipány měly po vykvetení různou barvu. Cibulky tulipánů se vysazují do řádků nebo do sloupců tak, že každé dvě sousední cibulky jsou od sebe vzdáleny 1 dm. Kolik cibulek červených a kolik cibulek žlutých tulipánů zahradník potřebuje?

Řešení 2.



n=3



n=2

V zadání je řečeno, že sousední tulipány jsou od sebe vzdáleny $10\,cm$. To znamená, že k dané cibulce sousední tulipány musí ležet ve stejném řádku nebo sloupci. Zahradník bude sázet cibulky od kraje záhonu ke druhému kraji. To znamená, že na záhonu o délce $2\,dm$ jsou v řádku 3 tulipány. Příklad rozdělíme na dva případy:

a) n je liché číslo.
Záhon je vždy osázen stejným počtem tulipánů červené barvy a žluté barvy (viz obr.). Nejmenší záhon $a_1 = 1dm$ osázíme dvěma červenými a dvěma žlutými tulipány. Další záhon $a_2 = 3dm$ má počet tulipánů červené barvy $s_2 = 2 + 6 = 8$. Pro $a_3 = 5dm$ je počet tulipánů červené barvy $s_3 = 8 + 10 = 18$. Všimněte si, že pro r-tý záhon platí $a_r = n\,dm$ a součet jeho červených tulipánů je $s_r = s_{r-1} + 2n$.

Počet tulipánů jedné barvy vypočteme jako

$$s_r = 2 + 6 + 10 + 14 + 18 + \cdots + 2n. \tag{8}$$

Počet členů v posloupnosti (8) je r a jedná se o aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 4$. Než provedeme součet této posloupnosti, musíme znát vztah mezi n a r. Protože n je liché číslo platí $n = 2k + 1,\ k = 0, 1, 2, \ldots$ a zároveň platí $r = k + 1$, tedy $r = (n + 1)/2$ ($a_{(n+1)/2} = n\,dm$). Výše uvedené dosadíme do vzorce pro součet n členů aritmetické posloupnosti $s_r = (r/2)(b_1 + b_r)$, kde r počet sčítanců, b_1 první člen řady, b_r poslední člen řady:

$$s_{(n+1)/2} = \frac{n+1}{4}\,(2 + 2n) = \frac{(n+1)^2}{2}. \tag{9}$$

Jestliže n je liché číslo, potřebujeme $(n + 1)^2/2$ cibulek žlutých tulipánů a $(n + 1)^2/2$ cibulek červených tulipánů.

b) n je sudé číslo
Záhon je osázen jiným počtem červených a jiným počtem žlutých tulipánů, jeden druh musí mít jeden tulipán navíc (viz obr.). Budeme uvažovat, že červených tulipánů je více.

Nejmenší záhon $a_1 = 2\,dm$ osázíme pěti červenými a čtyřmi žlutými tulipány. Další záhon $a_2 = 4\,dm$ má počet tulipánů žluté barvy $s_2 = 4 + 8 = 12$. Pro $a_3 = 6\,dm$ je počet žlutých tulipánů $s_3 = 12 + 12 = 24$. Všimněte si, že pro r-tý záhon platí $a_r = n\,dm$ a součet jeho žlutých tulipánů je $s_r = s_{r-1} + 2n$. Vztah mezi r a n je tento: $r = n/2$.

Počet žlutých tulipánů:

$$s_{n/2} = \frac{n}{4}\,(4 + 2n) = \frac{n(n+2)}{2}. \tag{10}$$

Jestliže n je sudé číslo, potřebujeme $n(n + 2)/2$ cibulek žlutých tulipánů a $n(n + 2)/2 + 1$ cibulek červených tulipánů nebo $n(n + 2)/2 + 1$ cibulek žlutých tulipánů a $n(n + 2)/2$ cibulek červených tulipánů.

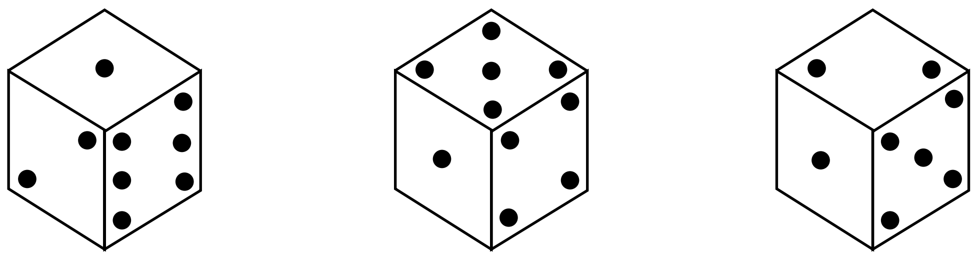
Poznámka:

Úloha může být chápána dvěmi dalšími způsoby.

I. Zahradník nesází tulipány od kraje záhonu, první tulipán je od kraje vzdálený $1\,dm$ a poslední je od druhého kraje vzdálený také $1\,dm$. Je-li n

sudé, zasadí $(n^2-1)/2$ žlutých, červených $(n^2+1)/2$ nebo naopak. Pro n liché potřebuje $n^2/2$ červených tulipánů a stejný počet žlutých.
II. Zahradník sází tulipány takto: do každého čverce o rozměrech $1\,dm^2$ sází jeden tulipán do jeho středu, takže ve čverci o straně $n\,dm$ je n^2 tulipánů. Je-li n sudé, pak červených tulipánů je $n^2/2$, žlutých je stejně. Pro n liché je červených $(n^2-1)/2$, žlutých $(n^2+1)/2$ nebo naopak.

3. Na hracích kostkách jsou vždy očka rozmístěna tak, aby dvě protilehlé strany dávaly součet 7. Jestliže je na horní straně kostky šestka, dole musí být jednička, protože $6+1=7$.
a) Představte si, že chcete vyrobit kostku, která toto pravidlo splňuje. Kolik různých takových kostek můžete vyrobit? (Za různá řešení považujeme ty, které se nedají získat pootočením kostky.)
b) Na obr. je nakreslena jediná kostka v různých pozicích, která toto pravidlo nesplňuje. Kolik oček je vždy na dolní plošce?

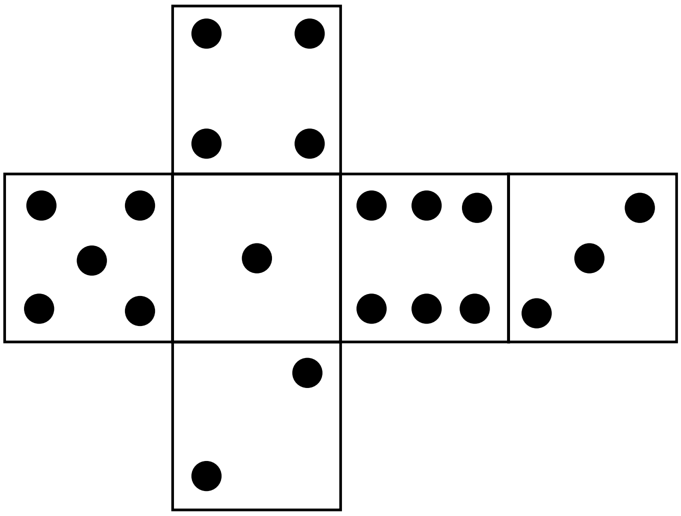


Řešení 3.

a) Protože nezávisí na pootočení kostky, můžeme ji nastavit do libovolné pozice. Nastavme si ji třeba takto: Kostka leží na stole jedničkou (tzn. nahoře je šestka) a zepředu mějme dvojku (tzn. vzadu je pětka). Takto lze nastavit libovolnou kostku splňující dané pravidlo. Na zbývajících stěnách kostky už mohou být pouze trojka a čtyřka, ovšem ve dvou různých pozicích. To znamená, že takové kostky mohou být **dvě**.

Úlohu lze řešit i tak, že si vypíšeme všechny možné sítě takovýchto kostek. Vyloučíme všechna pootočení a máme jako možné řešení pouze dvě nezávislé kostky.

b) Na dolní ploše jsou postupně zleva doprava tři očka, šest oček a čtyři očka. Výsledek si můžete ověřit, když si z následující sítě postavíte kostku.



4. Řešte v oboru reálných čísel rovnici

$$(x-2)(x+7)(x+1)(x+4) = 19.$$

Řešení 4. Částečně roznásobíme závorky (1. s 2. a 3. se 4.), máme upravenou rovnici

$$(x^2+5x-14)\cdot(x^2+5x+4) = 19. \tag{11}$$

Zvolíme substituci $t = x^2+5x$ (lze volit i jiné substituce, což závěrečné řešení neovlivní) a rovnici (11) přepíšeme

$$t^2 - 10t - 75 = 0$$

a vyřešíme $t_1 = -5$, $t_2 = 15$. Vrátíme se k původním proměnným, přičemž získáme dvě kvadratické rovnice

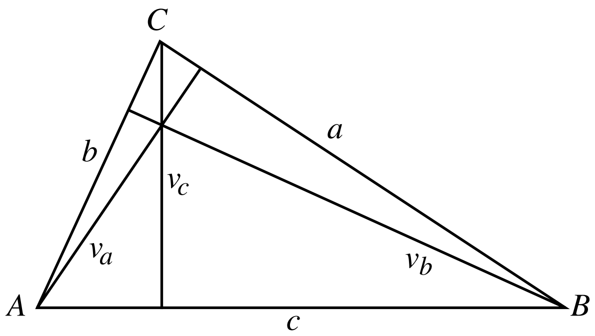
$$x^2+5x = -5, \quad x^2+5x = 15,$$

které mají stejná řešení jako původní rovnice. Vyřešením těchto rovnic získáme 4 řešení:

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{85}}{2}, \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{85}}{2}, \quad x_3 = \frac{-5-\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{5}}{2}.$$

5. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li velikosti všech tří výšek $v_a = 10\,cm$, $v_b = 7,5\,cm$, $v_c = 5,5\,cm$.

Řešení 5. Trojúhelník lze sestrojit několika způsoby, uvedeme si pouze dva z nich. Nakresleme si obecný trojúhelník



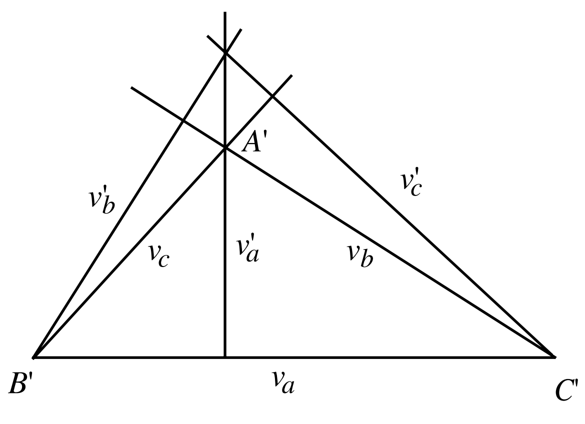
Využijeme vztahů pro obsah trojúhelníka

$$S = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}bv_b = \frac{1}{2}cv_c,$$

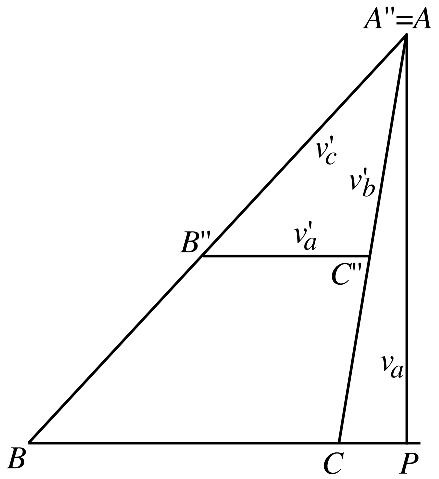
ze kterých vyplývají poměry pro strany a výsky $b/c = v_c/v_b$ nebo

$$a : b : c = \frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_c}.$$

I. Narýsujeme pomocný trojúhelník A', B', C' se stranami o velikostech zadaných výšek $a' = v_a,\ b' = v_b,\ c' = v_c$ (viz. obr.).



V něm najdeme jeho výšky v'_a, v'_b, v'_c. Narýsujeme druhý trojúhelník se stranami o velikostech výšek v'_a, v'_b, v'_c. Tento trojúhelník je podobný našemu hledanému trojúhelníku (v'_a je podobná a, v'_b je podobná b, v'_c je podobná c). Využijeme podobnost a snadno dorýsujeme trojúhelník, jehož výšky jsou zadané.



Jedná se o nepolohovou úlohu, trojúhelník je jednoznačně určen, proto je **PRÁVĚ JEDNO ŘEŠENÍ**.

II. Toto řešení využívá doplnění na rovnoběžník $ABCD$. Nejprve narýsujeme přímku p (na ní budou ležet body C, B, nevíme přesně kde). Na přímce p si vyznačíme bod C libovolně. Uděláme rovnoběžku p' ve vzdálenosti v_a (na ní bude lež bod A). Nyní máme narýsováno p, p', C. Vedeme kužnici k se středem C a poloměrem $2v_c$. Nalezneme pomocný bod D, kerý je průnikem p' a k. Spojíme bod D s bodem C a úsečku CD rozpůlíme a v polovině si označíme bod S. V bodě S narýsujeme kolmici k CD, kterou označíme q. Bod A je průnik q, p', bod B je průnik q, p. Trojúhelník ABC stačí dorýsovat.

6. Vyřešte následující Algebrogramy. Za jednotlivá písmena dosaďte číslice od 0 do 9 tak, aby uvedená sčítání dávala smysl.

a)

	P	S	I	C	I
	P	S	I	C	I
	P	S	I	C	I
H	A	F	A	N	I

b)

	P	O	Š	L	I
	I	H	N	E	D
P	E	N	I	Z	E

Řešení 6.

a)

$$\begin{array}{rrrrrr} & 7 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ & 7 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ & 7 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 9 & 1 & 8 & 0 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rrrrrr} & 1 & 9 & 5 & 6 & 8 \\ & 8 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 8 & 7 & 0 \end{array} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{array}{rrrrrr} & 1 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ & 8 & 9 & 3 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 8 & 7 & 0 \end{array}$$

Předpokládáme, že různá písmena značí různé číslice a že žádné písmeno na začátku není nula. Pak má úloha a) právě jedno řešení, úloha b) právě dvě řešení.

Algebrogramy se obvykle řeší tak, že se najdou všechny vazby v příkladu (např. u a) $I = 0$ nebo $I = 5$ atd.) a pak se dosazují číslice, které vazbám vyhovují.

Relace ekvivalence

připravila D. Smetanová

Relace: *1. (vzájemný) vztah, poměr*
2. možina (třída) všech uspořádaných dvojic (trojic ap.) objektů (prvků) (vázaných daných vztahem). [7]

Takto je vysvětlen pojem relace ve slovníku cizích slov. My budeme chápat pod pojmem relace vztah mezi dvěma prvky určité množiny. Přesné matematické vyjádření je toto:
Každou podmnožinu množiny $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ nazýváme relací v množině $\mathcal{A}$.[1]

Příklady:

A) Je dána množina všech kružnic.

$\mathbf{A_1}$) Kružnice $k_1(S_1, r_1)$ je v relaci s kružnicí $k_2(S_2, r_2)$, jestliže se rovnají jejich poloměry (tzn. $r_1 = r_2$).

$\mathbf{A_2}$) Kružnice $k_1(S_1, r_1)$ je v relaci s kružnicí $k_2(S_2, r_2)$, když mají stejný střed (tzn. $S_1 = S_2$). (Kružnice je v relaci s libovolnou soustřednou kružnicí.)

B) Je dána množina reálných čísel $\mathbb{R}$.

$\mathbf{B_1}$) Číslo $a \in \mathbb{R}$ dělitelné 5 je v relaci s číslem $b \in \mathbb{R}$, jestliže je také dělitelné 5. (To znamená, že libovolně vybrané $a \in \mathbb{R}$ je v relaci s každým reálnými čísly i se sebou samým. Dělíme-li reálné číslo pěti, vždy budeme mít reálný výsledek.)

$\mathbf{B_2}$) Číslo $a \in \mathbb{R}$ je v relaci s číslem $b \in \mathbb{R}$, jestliže platí $d(a, b) \leq 1$ (vzdálenost čísel je menší nebo rovna 1). (Např. $5,795$ je v relaci se všemi čísly ležícími v uzavřeném intervalu $\langle 4,795; 6,795 \rangle$.)

$\mathbf{B_3}$) Číslo $a \in \mathbb{R}$ je v relaci s číslem $b \in \mathbb{R}$, jestliže platí $[a] = [b]$. ($[a]$ označuje celou část čísla a, např. $[-10,521985] = -10$. Snadno si můžete ověřit, že 3 je v relaci např. s čísly π; $22/7$; $\sqrt{10}$; $3,14$; $399/100$; $3,\bar{9}$. Číslo $r \in \mathbb{R}$ je v relaci se všemi čísly z intervalu $\langle [r], [r] + 1)$.)

$\mathbf{B_4}$) Číslo $a \in \mathbb{R}$ je v relaci s číslem $b \in \mathbb{R}$, jestliže platí $a/b \in \mathbb{Q}$ (racionální číslo). (Např. $\sqrt{3}$ je v relaci s $\sqrt{12}$, protože platí $\sqrt{3}/\sqrt{12} = 1/2$.)

C) Je dána množina celých čísel $\mathbb{Z}$.

$\mathbf{C_1}$) Číslo $a \in \mathbb{Z}$ je v relaci s číslem $b \in \mathbb{Z}$, jestliže $a - b$ je číslo sudé. (Je-li a číslo sudé, bude v relaci pouze ze sudými čísly. Je-li liché, bude v relaci pouze s lichými čísly.)

C_2) Číslo $a \in \mathbb{Z}$ je v relaci s číslem $b \in \mathbb{Z}$, jestliže platí $b = 7k$, $k \in \mathbb{Z}$.

D) Je dána množina všech lidí.

D_1) Člověk A je v relaci s člověkem B, jestliže mají společné oba rodiče.

D_2) Člověk A je v relaci s člověkem B, jestliže mají společného alespoň jednoho rodiče.

Označme si relaci symbolem $\sim$. To znamená, že sousloví „prvek a je v relaci s prvkem b“ budeme označovat takto: $a \sim b$.

Speciálním typem relace na množině M je **relace ekvivalence** na množině M. Relace $\sim$ je relací ekvivalence, jestliže pro libovolné prvky $a, b, c \in M$ splňuje následující tři podmínky:

$$a \sim a \tag{12}$$

$$a \sim b \Rightarrow b \sim a \tag{13}$$

$$a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c \tag{14}$$

Podmínka (12) znamená, že relace je *reflexívní*, (13) relace je *symetrická*, (14) relace je *tranzitivní*.

Příklad: Dokažte, že relace **A_1**) je relace ekvivalence.

Řešení: Musíme ověřit, zda-li jsou splněny všechny tři podmínky (12) - (14).
(12): Platí $k(S, r) \sim k(S, r)$, protože $r = r$.
(13): Předpokládejme, že platí $k_1(S_1, r_1) \sim k_2(S_2, r_2)$ (tzn. $r_1 = r_2$). Ovšem zároveň platí $r_2 = r_1$ a tedy musí platit $k_2(S_2, r_2) \sim k_1(S_1, r_1)$.
(14): Předpokládejme, že platí $k_1(S_1, r_1) \sim k_2(S_2, r_2)$ (tzn. $r_1 = r_2$) a zároveň $k_2(S_2, r_2) \sim k_3(S_3, r_3)$ (tzn. $r_2 = r_3$). Z rovností $r_1 = r_2$ a $r_2 = r_3$ plyne $r_1 = r_3$, tedy $k_1(S_1, r_1) \sim k_3(S_3, r_3)$.

Z uvedených příkladů *nejsou relace ekvivalence* pouze relace **B_2**), **B_4**), **C_2**) a **D_2**).
B_2): Podmínky (12), (13) platí. (14) neplatí. Stačí vzít body $a, b, c \in \mathbb{R}$, pro než platí $d(a, b) = 1$, $d(b, c) = 1$, $a \neq c$. Z toho plyne, že $d(a, c) = 2$, tedy a není v relaci s c.

B$_4$): (12), (14) platí. (13) neplatí. $0 \sim 5$, protože $0/5 = 0 \in \mathbb{Q}$, ovšem zlomek $5/0$ není definován, tudíž není racionální číslo. Tedy 5 není v relaci s 0.
C$_2$): (14) platí. (12), (13) neplatí, protože existuje $a \neq 7k$, $k \in \mathbb{Z}$.
D$_2$): Neplatí pouze (14). Zamyslete se proč.

Zadání a řešení 3. kola

1. Je dána relace na množině $\mathbb{Z}$. $a \sim b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, jestliže $a|b$. Ověřte všechny podmínky (12) - (14) (viz. teoretická příprava) a zjistěte, zda tato relace je relace ekvivalence.
Nápověda: $a|b$ (čteme a dělí b, nebo b je dělitelné a) znamená, že existuje $c \in \mathbb{Z}$ tak, že $b = c \cdot a$. Dále 0 je dělitelná všemi celými čísly včetně 0, ale 0 dělí pouze 0.

Řešení 1. Ověříme podmínky:
(12): $a \sim a \quad \Leftrightarrow \quad a|a$
Platí, protože $a = 1 \cdot a$.
(13): $(a \sim b \quad \Rightarrow \quad b \sim a) \quad \Leftrightarrow \quad (a|b \quad \Rightarrow \quad b|a)$
Uvedená podmínka neplatí. Např. pro $a = 1$, $b = 2$ máme $a|b$, protože $b = 2 \cdot a$, ale už neplatí $b|a$, protože nenajdeme $c \in \mathbb{Z}$ tak, aby $1 = c \cdot 2$.
(14): $(a \sim b \wedge b \sim c \quad \Rightarrow \quad a \sim c) \quad \Leftrightarrow \quad (a|b \wedge b|c \quad \Rightarrow \quad a|c)$
Platí. Předpokládejme, že $a|b$, $b|c$, tj. existují čísla $u, v \in \mathbb{Z}$ tak, že $b = u \cdot a$, $c = v \cdot b$. Dosazením první rovnosti do druhé dostaneme $c = uv \cdot a$, kde $uv \in \mathbb{Z}$, to ale znamená, že $a|c$ a to jsme chtěli ukázat.
Závěr: Uvedená relace není ekvivalence, nesplňuje druhou podmínku.

2. Na hostině se sešlo 26 osob. Celá útrata byla 8 800,- Kč. Přičemž poplatky za osobu byly stanoveny takto: muž platil 600,- Kč, žena 400,- Kč a dítě 200,- Kč. Kolik bylo na hostině mužů žen a dětí?

Řešení 2. Označme si x počet mužů, y počet žen a z počet dětí na hostině. Ze zadání vyplývá, že platí následující dvě rovnosti

$$x + y + z = 26, \qquad 600x + 400y + 200z = 8800.$$

Vyjádříme-li z první rovnice $z = 26 - x - y$ a dosadíme-li do druhé rovnice, dostaneme po úpravách vztah pro y, který nám zjednoduší vyjádření z

$$y = 18 - 2x, \qquad z = 8 + x.$$

Podařilo se nám vyřešit soustavu dvou rovnic tak, že pro každou volbu x dostaneme právě jedno y a z. V našem případě všechny tři hodnoty x, y, z musí být přirozená čísla nebo nuly. Budeme postupně dosazovat za x tak dlouho, dokud některá z hodnot y nebo z nezačne být záporná. Dostaneme následujících deset řešení

x (muži)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y (ženy)	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0
z (děti)	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Dosazením do původních rovnic můžeme provést zkoušku, že skutečně všech deset možností je řešením.

Jestliže budeme chtít, aby na hostině byl alespoň jeden muž, alespoň jedna žena a alespoň jedno dítě, dostaneme pouze osm řešení, které snadno nalezneme v předchozí tabulce.

3. V každém roce, kromě přestupného, je den, který napíšeme-li jeho datum a vynecháme tečky, současně uvádí, kolikátým je dnem v roce (např. 19. 3. není 193. dnem v roce). Najděte tento den.

Řešení 3. Jestliže si jako x označíme den a jako y označíme měsíc, hledáme řešení rovnice

$$10x + y = x + S(y-1), \quad \text{resp.} \quad 100x + y = x + S(y-1) \quad \text{pro } y = 10, 11, 12,$$

kde $S(z)$ označuje součet všech dnů v měsících od ledna až do měsíce z. Můžeme si uvedenou rovnost rozepsat pro jednotlivé měsíce a vyřešit.

$$\begin{array}{llcllcll}
y=1: & 10x+1 & = & x+0 & \Rightarrow & x & = & -\frac{1}{9} & \text{(nevyhovuje)} \\
y=2: & 10x+2 & = & x+31 & \Rightarrow & x & = & \frac{29}{9} & \text{(nevyhovuje)} \\
y=3: & 10x+3 & = & x+31+28 & \Rightarrow & x & = & \frac{56}{9} & \text{(nevyhovuje)} \\
y=4: & 10x+4 & = & x+59+31 & \Rightarrow & x & = & \frac{86}{9} & \text{(nevyhovuje)} \\
y=5: & 10x+5 & = & x+90+30 & \Rightarrow & x & = & \frac{115}{9} & \text{(nevyhovuje)} \\
y=6: & 10x+6 & = & x+120+31 & \Rightarrow & x & = & \frac{145}{9} & \text{(nevyhovuje)} \\
y=7: & 10x+7 & = & x+151+30 & \Rightarrow & x & = & \frac{174}{9} & \text{(nevyhovuje)} \\
y=8: & 10x+8 & = & x+181+31 & \Rightarrow & x & = & \frac{204}{9} & \text{(nevyhovuje)} \\
y=9: & 10x+9 & = & x+212+31 & \Rightarrow & x & = & \frac{234}{9} = 26 & \text{(vyhovuje)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
y = 10: & 100x + 10 & = & x + 243 + 30 \Rightarrow x = \frac{263}{9} \text{ (nevyhovuje)} \\
y = 11: & 100x + 11 & = & x + 273 + 31 \Rightarrow x = \frac{293}{9} \text{ (nevyhovuje)} \\
y = 12: & 100x + 12 & = & x + 304 + 30 \Rightarrow x = \frac{322}{9} \text{ (nevyhovuje)}
\end{array}$$

Hledaným dnem je 26.9., protože je to 269. den v nepřestupném roce.

4. Ověřte, že pro reálná čísla a, b platí následující rovnost:

$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 + (a-b)^3} = \frac{a+b}{2a-b}.$$

Řešení 4. Využitím vzorečku $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ upravíme levou stranu

$$\begin{aligned}
L &= \frac{a^3 + b^3}{a^3 + (a-b)^3} = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{(a + a - b)(a^2 - a(a-b) + (a-b)^2)} \\
&= \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{(2a-b)(a^2 - a^2 + ab + a^2 - 2ab + b^2)} = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{(2a-b)(a^2 - ab + b^2)} \\
&= \frac{a+b}{2a-b}, \\
P &= \frac{a+b}{2a-b}, \\
L &= P.
\end{aligned}$$

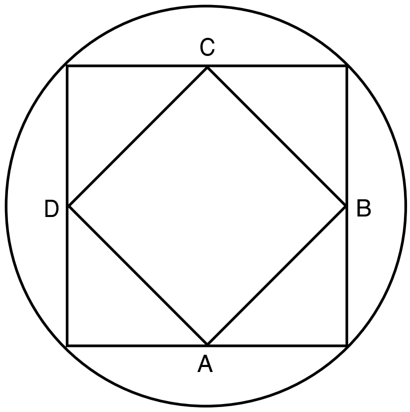
Nyní musíme zjistit, pro která čísla a, b zadané výrazy dávají smysl. Ve jmenovateli obou zlomků nesmí být nula. Podmínky:

$$a^3 + (a-b)^3 = (2a-b)(a^2 - ab + b^2) \neq 0, \qquad 2a - b \neq 0.$$

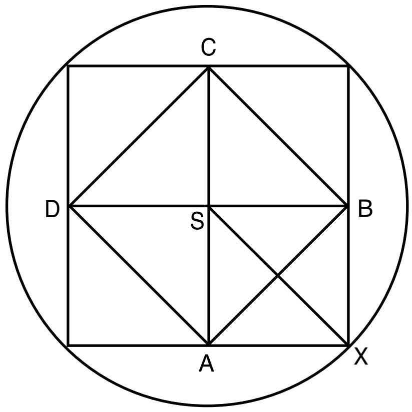
Také nesmí být nula vše, čím jsme krátili, ale podmínku $a^2 - ab + b^2 \neq 0$ máme již zahrnutou v první podmínce. Navíc, když se na ni podíváme podrobněji a pokusíme se ji vyřešit jako kvadratickou rovnici $a^2 - ab + b^2 = 0$ s neznámou a a parametrem b, zjistíme, že její diskriminant $D = b^2 - 4b^2 = -3b^2 \leq 0$. Kvadratická rovnice má tedy reálné řešení pouze v případe $b = 0$, tím řešením je číslo $a = 0$. Toto řešení ovšem vylučuje podmínka $2a - b \neq 0$, takže ho nemusíme vypisovat zvlášť.

Rovnost platí pro všechna reálná čísla a, b, která splňují podmínku $a \neq b/2$.

5. Je-li průměr kružnice na obrázku $100\,mm$, jaký je obsah menšího čtverce $ABCD$ v kružnici?



Řešení 5. Spojíme-li body A a C a body B a D, získáme rozdělení většího čtverce na čtyři stejné čtverečky.



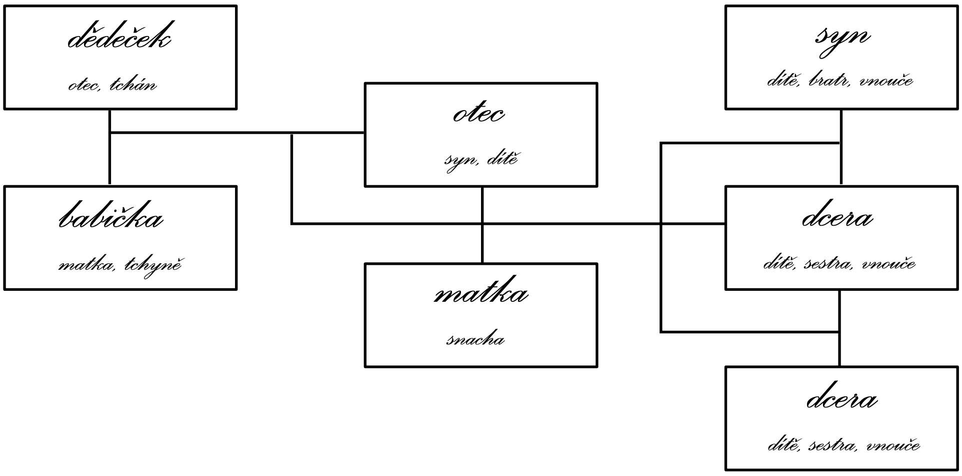
Podíváme-li se podrobněji třeba na čtvereček $AXBS$, zjistíme, že jeho úhlopříčka AB je stejně velká jako úhlopříčka SX, ale SX je poloměr zadané kružnice, tj. $50\,mm$. Obsah čtverce $ABCD$ pak vypočítáme ze známého vztahu, víme-li, že $|AB| = 50\,mm$.

$$S = |AB|^2, \quad S = 2500\,mm^2$$

Obsah menšího čtverce je tedy $2500\,mm^2$.

6. Na rodinném večírku se setkali: 1 dědeček, 1 babička, 2 otcové, 2 matky, 4 děti, 3 vnoučata, 1 bratr, 2 sestry, 2 synové, 2 dcery, 1 tchán, 1 tchyně, 1 snacha. Přitom tam bylo pouze 7 osob. Jak je to možné?

Řešení 6. Řešení je znázorněno v následujícím diagramu



Reference

[1] H. J. Bartsch, *Matematické vzorce*, Mladá Fronta, Praha (1996).

[2] Barták, J., Bojtár, Š.: *Matematika I*, 3. vyd., SPN, Praha (1998).

[3] Hejný, M.a kol., *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava, SPN (1990).

[4] Herman, J., Kučera, R., Šimša, J., *Metody řešení matematických úloh I*, 2. vyd.(přepracované), Masarykova univerzita v Brně, Brno (1996).

[5] Kuřina, F., *Umění vidět v matematice*, 1. vyd., SPN, Praha (1990).

[6] Mačák, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh*, 1. vyd., Prometheus, Praha (2001).

[7] V. Petráčková a J. Kraus a kol., *Akademický slovník cizích slov II., díl L–Ž*, Academia, Praha (1995).