Slezská univerzita v Opavě
Matematický ústav v Opavě

Matematika v ekonomii

Barbora Volná

a

Kristína Smítalová

Opava 2013

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Slezská univerzita v Opavě
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Hrazeno z prostředků projektu OPVK CZ.1.07/2.2.00/15.0174
Inovace bakalářských studijních oborů se zaměřením na spolupráci s praxí

Předmluva

Držíte v ruce skripta, která si kladou za cíl vysvětlit, jak používat matematiku v ekonomii. Nejedná se jen o jakýsi souhrn témat a ukázku příkladů, kde se matematika v ekonomii využívá (resp. o tzv. "kuchařku"), ale hlavně se snaží naučit čtenáře přemýšlet nad danou problematikou a matematiku používat správně. Matematika by se měla používat jako pomocník při řešení složitých ekonomických problémů. Je nutné znát ekonomický podtext a ne pouze algoritmus, dle kterého příklady počítáme bez toho, abychom chápali, proč a co nám vyjde.

Cílem těchto skript není vysvětlování teorie, ale jedná se spíše o jakousi cvičebnici dané problematiky na praktických příkladech s vysvětlením. Každá kapitola ale obsahuje základní teorii daného tématu. Teorie je vždy prokládána řešenými a vysvětlovanými příklady a na závěr každé kapitoly poskytujeme příklady k procvičení, kontrolní otázky k ověření pochopení látky a jeden problém k zamyšlení, který by vám měl pomoci danou látku důkladně pochopit a vstřebat.

Celá cvičebnice je po úvodních dvou kapitolách, zaměřených na matematické modelování a základní matematické prostředky používané v ekonomii, rozdělena do dvou tématických částí zaměřených na matematiku v mikroekonomii a matematiku v makroekonomii. V každé části je souhrn problematiky, kde můžeme vidět, kde a jak se matematika v mikro-, resp. makroekonomii využívá.

Pro četbu těchto skript je nutná předchozí znalost jak matematiky, tak ekonomie. Skripta nevysvětlují jednotlivé ekonomické teorie a modely, nebo matematické principy důkladně, ale ukazují spojitosti, soulad a součinnost těchto dvou věd. Budoucí čtenář těchto skript by jistě měl znát z oblasti matematiky diferenciální počet funkce jedné a více proměnných, integrální počet, teorii a metody řešení základních diferenciálních a diferenčních rovnic. V oblasti ekonomie by měl určitě mít znalosti odpovídající minimálně základnímu kurzu mikroekonomie a makroekonomie.

Nakonec bych chtěla upozornit na fakt, že jak pracuje matematika exaktně, tak ekonomické teorie exaktní nejsou. Nelze je brát vždy úplně doslova. Je to koneckonců společenská věda, která ve svých teoriích vychází z popisu chování lidí, kteří se často chovají neracionálně a nevyzpytatelně, tudíž nepopsatelně. Jedná se spíše o vodítko, jak přemýšlet. Každá ekonomická teorie, nebo model je založen na nějakých předpokladech, které neplatí vždy a je nutno si toto uvědomovat. Obvykle tyto teorie uvádí zjednodušenou realitu pro přehlednost a lepší pochopení. Cílem je naučit se přemýšlet jak matematicky analyticky, tak ekonomicky, a správným způsobem tyto přístupy kombinovat a využívat.

Barbora Volná

Obsah

Úvodní Část

KAPITOLA 1

Matematické modelování v ekonomii

Klíčová slova: matematické modelování v ekonomii, statické modely, dynamické modely, deterministické modely, stochastické modely, čtyři fáze modelování

Matematické modelování v jakémkoliv oboru může být velmi silný nástroj. Poskytuje široký matematický aparát pro řešení složitých fyzikálních, ekonomických, biologických problémů apod. Je třeba si ovšem dát pozor na samotnou podstatu problému. Odborník musí vytvořit model dostatečně odpovídající realitě, ale zase ne příliš složitý. Vždy je třeba dbát na zjednodušení a zanedbání nedůležitých skutečností pro řešený problém. Není možné například vytvořit takovou soustavu rovnic o tolika neznámých, kterou by nevyřešil ani nejvýkonnější počítač na světě. Takto vytvořený model by možná obsáhl všechny skutečnosti vyskytující se v daném problému, ale byl by zcela nepoužitelný a tudíž k ničemu. Na druhou stranu, pokud se unáhlíme příliš a některé důležité informace do modelu nezahrneme, pak je model rovněž špatný. A proto vždy mějme na paměti, že se jedná "pouze"o model, který je platný a poskytuje směrodatné výsledky pouze za určitých předem daných (a tudíž do modelu zahrnutých) podmínek. Když si tyto skutečnosti uvědomíme a správně matematický model využijeme, může nám být dobrým pomocníkem.

Matematické modelování v ekonomii je obor na rozhraní matematiky a ekonomie. Převedeme-li ekonomický problém, který se zdá být složitý, do "matematické řeči", často zjistíme, že takto popsaný problém již složitý být nemusí. Tedy, jednoduchým problémem matematickým vyřešíme složitý problém ekonomický. Matematika odděluje v samotném problému formu od obsahu a zabývá se pouze formou. Tudíž jeden matematický postup dokážeme aplikovat na mnoho ekonomických problémů a oblastí zájmu. A toto samozřejmě platí i pro všechny další obory, ve kterých můžeme matematiku použít (biologie, ekologie, fyzika atd.).

Na začátku je třeba si uvědomit, jaké modely můžeme mít a dle jakých kritérií je můžeme dělit. Prvním kritériem je časové hledisko. Ekonomická veličina se může v čase měnit (častější případ), pak časové hledisko do modelu zařadíme a řekneme, že máme *modely dynamické*. Nebo se ekonomická veličina v čase nemění, a tedy čas v modelu vůbec neuvažujeme. Pak takové modely označujeme jako *modely statické*. Budeme se zabývat oběma těmito typy modelů. Dalším možným kritériem dělení je charakter veličin. Pokud jsou prvky zkoumané veličiny a vztahy mezi nimi pevně dány, jedná se o *modely deterministické*. V opačném případě mají veličiny charakter náhodný a jedná se o *modely stochastické*. V této cvičebnici se budeme zabývat pouze modely deterministickými.

Matematické modelování v ekonomii má *čtyři fáze*:

(1) tvorba ekonomického modelu,
(2) tvorba matematického modelu,
(3) řešení matematického modelu,
(4) ekonomická interpretace.

Uvedeme si dva příklady matematického modelování, kde problém rozdělíme na čtyři fáze modelování.

Příklad 1.1. Budeme se zabývat oblastí teorie spotřebitele.

(1) Identifikujeme problém k řešení. Dle standardní ekonomické teorie se každý spotřebitel snaží maximalizovat svůj užitek, ovšem v závislosti na svých finančních možnostech. Tedy *ekonomický model je optimalizace užitku* (maximalizace užitku omezená finančními možnostmi spotřebitele).
(2) Vytvoříme matematický model a nalezneme metodu řešení. Spotřebitel se rozhoduje, jaký mix výrobků si koupí, aby uspokojil své potřeby a maximalizoval tak svůj užitek, ale je omezen penězi, které má "v kapse"či na účtě. Zde pro zjednodušení předpokládáme, že si vybírá mezi dvěma typy výrobků. Tedy řešíme *extremální (maximum) úlohu pro (užitkovou) funkci dvou proměnných (mix výrobků) s vazbou (množství peněz)*. Matematicky řekneme, že hledáme *vázané extrémy funkce*.
(3) Úlohu vyřešíme vhodnou matematickou metodou a nalezneme daný *extrém (maximum)*. Ověříme, zda se jedná o maximum.
(4) V této fázi si odpovíme na otázku: "Co znamenají výsledná čísla?". Výsledné maximum je bod o dvou souřadnicích. *Každá souřadnice nám udává počet kusů daného výrobku, které si máme koupit, abychom byli "co nejspokojenější"za nám dostupné peníze.*

Příklad 1.2. Budeme se zabývat hledáním rovnováhy na trhu statků a služeb a budeme předpokládat, že zkoumané veličiny se v čase mění.

(1) Jak si pamatujeme ze základního kurzu ekonomie, rovnováha na trhu daného typu statku či služby je dána rovností nabídky uvažovaného statku či služby a poptávkou po tomto statku a službě. Uvažujeme-li statický model, pak se podíváme, pro jakou hodnotu ceny a množství daného statku či služby se nabídka rovná poptávce. U dynamického modelu předpokládáme, že se stav ekonomiky v čase mění. Pak můžeme navíc zkoumat, *zda a kdy se ekonomika do rovnovážného stavu dostane či nikoliv.*
(2) Vytvoříme matematický model a nalezneme metodu řešení. Tedy nalezneme předpis pro funkce nabídky a poptávky, se zahrnutím položky času. Můžeme uvažovat časovou změnu skokovou nebo spojitou. Zkušený matematický ekonom ví, že takovýto typ modelu vede k vytvoření *diferenciální rovnice* při spojité časové změně a *diferenční rovnice* při skokové časové změně. Metodu řešení uvažovaných rovnic zvolíme dle typu rovnice, např. metodu variace konstant.
(3) Rovnici vyřešíme zvolenou metodou. Výsledkem je tedy nějaká *funkce* u diferenciální rovnice či *posloupnost* u rovnice diferenční.

(4) V této fázi matematického modelování se zamyslíme nad tím, co nám "oznamuje"výsledná funkce či posloupnost. *Podle průběhu dané funkce nebo posloupnosti (zda konverguje nebo diverguje k rovnovážnému bodu) poznáme, zda a také kdy se ekonomika v čase do rovnováhy dostane či nikoliv.*

V následující tabulce 1.1 přehledně znázorníme oba rozebrané příklady.

	Oblast poznání	Ekonomický model	Matematický model	Interpretace výsledků
Příklad 1.1	Teorie spotřebitele	Optimalizace užitku	Vázaný extrém funkce dvou proměnných	Teorie spotřebitele
Příklad 1.2	Teorie trhu statků a služeb	Hledání rovnováhy na trhu daného statku či služby	Diferenciální nebo diferenční rovnice	Teorie trhu statků a služeb
Fáze		1.	2. a 3.	4.

TABULKA 1.1. Znázornění fází matematického modelování v příkladech 1.1 a 1.2

Příklady k procvičení 1.0

(1) Rozpracujte jednotlivé fáze matematického modelování v případě, kdy chce mít obuvnická firma co největší zisk z prodeje nové kolekce obuvi JARO/LÉTO.
(2) Rozpracujte jednotlivé fáze matematického modelování v případě, kdy chce mít kosmetická firma co nejnižší výrobní náklady nového produktu.
(3) Vymyslete alespoň další dva konkrétní ekonomické problémy k řešení a rozepište obsah čtyř fází matematického modelování.

Kontrolní otázky 1.0

(1) Vysvětlete, co znamená pojem matematické modelování v ekonomii.
(2) Jaký je rozdíl mezi dynamickým a statickým modelem?
(3) Jaký je rozdíl mezi deterministickým a stochastickým modelem?
(4) Vyjmenujte jednotlivé fáze matematického modelování a popište obsah těchto fází. Na jednoduchém příkladu tyto fáze matematického modelování demonstrujte.

Problém k zamyšlení 1.0

Zamyslete se nad důvody možného neúspěchu při tvorbě a řešení matematického modelu obecně a poté v nějakém konkrétním případě.

KAPITOLA 2

Základní matematické prostředky pro zkoumání ekonomických veličin

V každé oblasti ekonomie, kde využíváme matematiku, potřebujeme ekonomickou veličinu a její chování nějak matematicky popsat. Poté s ní můžeme pracovat a zkoumat ji využívaje širokého matematického aparátu. Účinný prostředek je popis pomocí nějaké funkce (jedné, nebo několika proměnných). Pro popis chování této *ekonomické funkce*, a tudíž i chování ekonomické veličiny, používáme tzv. *sklon*, pomocí kterého můžeme určitým způsobem charakterizovat průběh ekonomické funkce.

Dalším důležitým vodítkem pro zkoumání ekonomické veličiny, je tázat se, jakým způsobem se funkce chová celkově, jak v průměrném případě a jak při dalším dodatečném přidání jednotky závislé proměnné. Praxe ukázala, že tato tři hlediska jsou pro bádání nad chováním nějaké ekonomické veličiny velmi vhodné a vypovídající. Odborně uvedená hlediska nazýváme *veličinami celkovými, průměrnými a mezními.*

Poslední významný aspekt pohledu na chování dané ekonomické veličiny je tzv. *elasticita funkce.* U zkoumání elasticity se ptáme, jak relativně reaguje závislá proměnná na změnu nezávisle proměnné, zda vůbec, málo, jednotkově, extrémně prudce apod.

2.1. Ekonomická funkce a její sklon

Klíčová slova: ekonomická funkce, hladká křivka, mezní sklon, průměrný sklon, degresivní růst, progresivní růst

Pojem *funkce* by každý již měl znát a my jej zde budeme chápat jako předpis, který prvku z definičního oboru jednoznačně přiřadí prvek z oboru hodnot. *Ekonomická funkce* pak popisuje závislost ekonomických veličin. Ekonomické funkce jsou např. spotřební, úsporová, investiční, užitková apod. Graf nějaké funkce jedné proměnné budeme nazývat *křivkou.* Jedná se o jednorozměrný objekt. Řekneme, že křivka je *hladká* právě tehdy, když má spojitou derivaci.

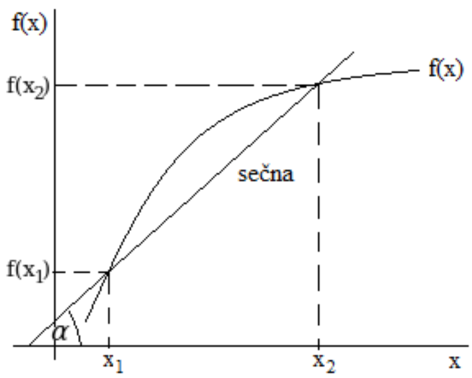
Sklon funkce vyjadřuje míru (rychlost, tempo) změny závislé proměnné v závislosti na změnách nezávislé proměnné. Máme dva typy sklonů funkce:

- průměrný sklon,
- mezní sklon.

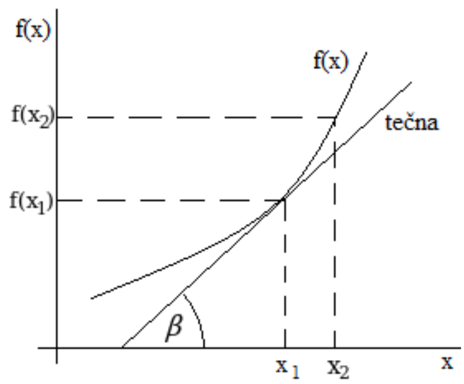
DEFINICE 2.1. Máme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a interval $[x_1, x_2]$. Pak

- *průměrný sklon* **na intervalu** $[x_1, x_2]$ je
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
.
- *mezní sklon* **v bodě** x_1 je
$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
.

Průměrný sklon funkce je tedy číslo týkající se sečny grafu funkce a mezní sklon je směrnicí tečny grafu funkce. Podrobně si to můžeme prohlédnout na obrázcích 2.1 a 2.2.



OBRÁZEK 2.1. Průměrný sklon funkce f je $tg\alpha$



OBRÁZEK 2.2. Mezní sklon funkce f je $tg\beta$

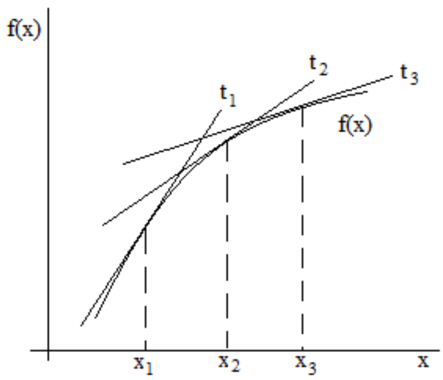
Mezní sklon funkce je přesnější a tudíž i více používaný. Průměrný sklon může dávat nejednoznačné výsledky. Proto i my budeme v dalších kapitolách používat zejména mezní sklon.

Pravidla pro poznávání mezního sklonu funkce:

- Rostoucí funkce má sklon kladný.
- Klesající funkce má sklon záporný.
- Lineární funkce má konstantní sklon.
- Konvexní funkce má rostoucí sklon.
- Konkávní funkce má klesající sklon.

Poznámka
Jak tedy poznáme rostoucí nebo klesající mezní sklon? Vezměte si papír a tužku a začněte si kreslit tečny ke grafu funkce, postupně pro body zleva doprava. Pokud budou tečny, které postupně kreslíte, čím dál více strmější (jako když "šplháte"do strmého kopce), pak se jedná o rostoucí sklon. Toto se týká samozřejmě rostoucí funkce, tedy funkce s kladným mezním sklonem.
Jak je to tedy se sklonem záporným, tedy se sklonem u klesající funkce (nyní se vydáváme z kopce)? Návod platí stejně (čím strmější tečna, tím strmější kopec dolů) s tím rozdílem, že si musíme uvědomit, že se pohybujeme v záporných číslech. Tedy čím strmější tečna, tím větší "číslo za mínusem", a tedy mezní sklon klesá.

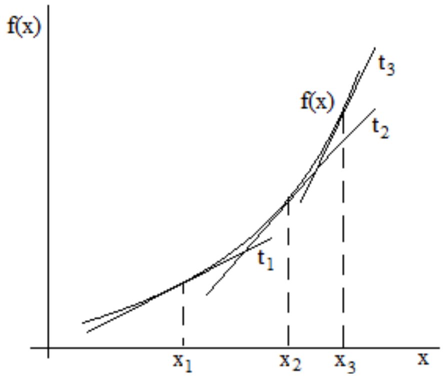
PŘÍKLAD 2.1. Ukážeme si příklad diferencovatelné funkce, která je rostoucí s klesajícím sklonem. Říká se, že taková funkce má tzv. *degresivní růst*. Graf takovéto funkce je zobrazen na obrázku 2.3.



OBRÁZEK 2.3. Degresivní růst v příkladě 2.1

Abychom ověřili, že se jedná o rostoucí funkci (tedy kladný sklon funkce) s klesajícím sklonem, budeme si postupně k bodům zleva doprava kreslit tečny. Vidíme, že "šplháme do kopce", jedná se tedy o kladný sklon. Dále vidíme, že tečny jsou čím dál, tím méně strmé. Z toho můžeme usoudit, že mezní sklon klesá. Rovněž si můžeme všimnou, že zobrazená funkce je konkávní, tudíž dle pravidel pro poznávání mezního sklonu funkce, rozhodneme, že funkce má klesající mezní sklon.

PŘÍKLAD 2.2. V tomto příkladě si naopak ukážeme diferencovatelnou funkci, která je rostoucí s rostoucím sklonem. Říká se, že taková funkce má tzv. *progresivní růst*. Graf takovéto funkce je zobrazen na obrázku 2.4.



OBRÁZEK 2.4. Progresivní růst v příkladě 2.2

Abychom ověřili, že se jedná o rostoucí funkci (tedy kladný sklon funkce) s rostoucím sklonem, budeme si opět postupně k bodům zleva doprava kreslit tečny. Vidíme, že "šplháme do kopce", jedná se tedy o kladný sklon. Dále vidíme, že tečny jsou čím dál, tím více strmé. Z toho můžeme usoudit, že mezní sklon roste. Nebo si můžeme všimnou, že zobrazená funkce je konvexní, tudíž dle pravidel pro poznávání mezního sklonu funkce, rozhodneme, že funkce má rostoucí mezní sklon.

Příklady k procvičení 2.1

(1) Nakreslete graf diferencovatelné funkce (hladkou křivku):
  (a) s kladným konstantním sklonem,
  (b) se záporným konstantním sklonem,
  (c) se záporným klesajícím sklonem,
  (d) se záporným rostoucím sklonem,
  (e) se stále rostoucím sklonem,
  (f) se stále klesajícím sklonem,
  (g) s kladným nejdříve klesajícím a poté rostoucím sklonem.
(2) Jaká funkce má nulový mezní i průměrný sklon? Situaci znázorněte graficky.
(3) Máme funkci $f : \mathbb{R} \to [-1, 1], f(x) = sinx$. Určete charakter sklonu (rostoucí, klesající atd.) funkce f.

Kontrolní otázky 2.1

(1) Jak byste vysvětlili pojmy ekonomická funkce a hladká křivka?
(2) Vysvětlete, co je mezní a průměrný sklon funkce. Jaký je mezi nimi rozdíl?
(3) Pomocí čeho znázorňujeme v grafu funkce její průměrný a její mezní sklon?
(4) Jak byste vlastními slovy popsali progresivní a degresivní růst?

Problém k zamyšlení 2.1

Zamyslete se nad tím, proč je průměrný sklon funkce nejednoznačný, nepřesný. Uveďte konkrétní příklad takové nejednoznačnosti a případ graficky znázorněte.

2.2. Veličiny celkové, průměrné a mezní

Klíčová slova: veličina celková, veličina průměrná, veličina mezní, marginální analýza, zlaté pravidlo maximalizace zisku

DEFINICE 2.2. Nechť $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ (vždy budeme uvažovat, že definiční obor funkce je $\mathbb{R}^+$, protože záporné hodnoty z ekonomického hlediska nemají smysl, nemůžeme vyrábět např. "-5"jednotek daného výrobku nebo služby). Pak

- funkce *celkových veličin*, značíme Tf (z angličtiny *total*), je
$$Tf = f(x)$$
.
- funkce *průměrných veličin*, značíme Af (z angličtiny *average*), je
$$Af = \frac{f(x)}{x}$$
.
- funkce *mezních veličin*, značíme Mf (z angličtiny *marginal*), je
$$Mf = \frac{df}{dx} = f'(x)$$
.

V následujícím tvrzení je popsán vztah mezi veličinami celkovými, průměrnými a mezními. Všechny vlastnosti plynou z definic těchto veličin a pravidel diferenciálního počtu.

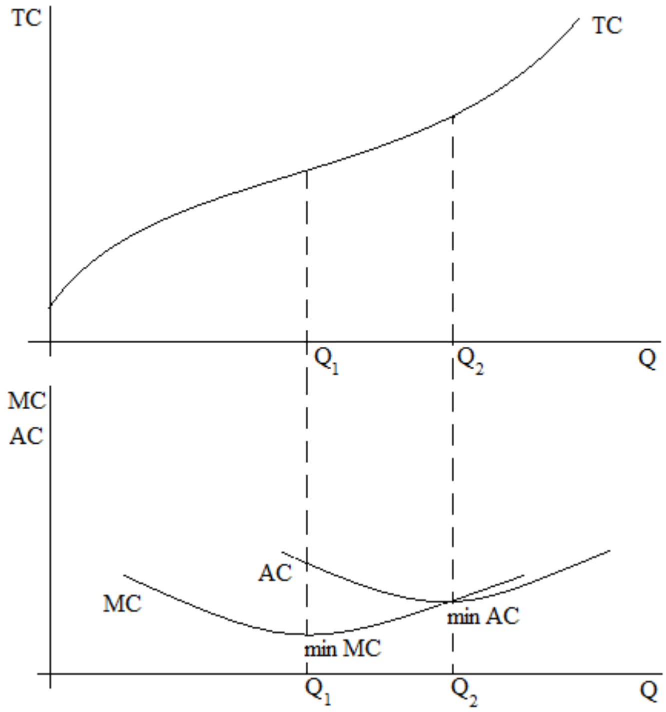
TVRZENÍ 2.1. *Uvažujeme pouze kladné hodnoty nezávislé proměnné ($x > 0$).*

(1) *Lokálnímu extrému Tf odpovídá nulový bod Mf.*
(2) *Inflexnímu bodu TF odpovídá lokální extrém Mf.*
(3) *TF je konvexní právě tehdy, když Mf roste.*
(4) *TF je konkávní právě tehdy, když Mf klesá.*
(5) *Af má lokální extrém právě v bodě, kde graf Mf protíná graf Af.*
(6) *Af roste právě v oblasti, kde graf Mf leží nad grafem Af.*
(7) *Af klesá právě v oblasti, kde graf Mf leží pod grafem Af.*
(8) *Af je konstantní právě tehdy, když $Mf = Af$.*

Uvedené vlastnosti si demonstrujeme na následujících dvou příkladech pro konkrétní nákladové a příjmové funkce nějaké společnosti. Pro ilustraci postačí grafické znázornění. Neuvádíme konkrétní předpisy funkcí.

PŘÍKLAD 2.3. Jak jistě víte ze základního kurzu ekonomie, náklady obvykle označujeme symbolem C (z angličtiny *cost*). Celkové náklady tedy značíme TC, průměrné AC a mezní MC. Uvažovaná závislost je mezi náklady a množstvím daného výrobku nebo služby (výstupu), značíme Q. Tudíž máme funkci celkových nákladů $TC = TC(Q)$, průměrných nákladů $AC = AC(Q)$ a mezních nákladů $MC = MC(Q)$.

Na obrázku 2.5 vidíme grafy těchto funkcí i jejich vzájemný vztah v konkrétním případě. Tento případ popisuje tzv. *degresivně-progresivní růst* celkových nákladů.



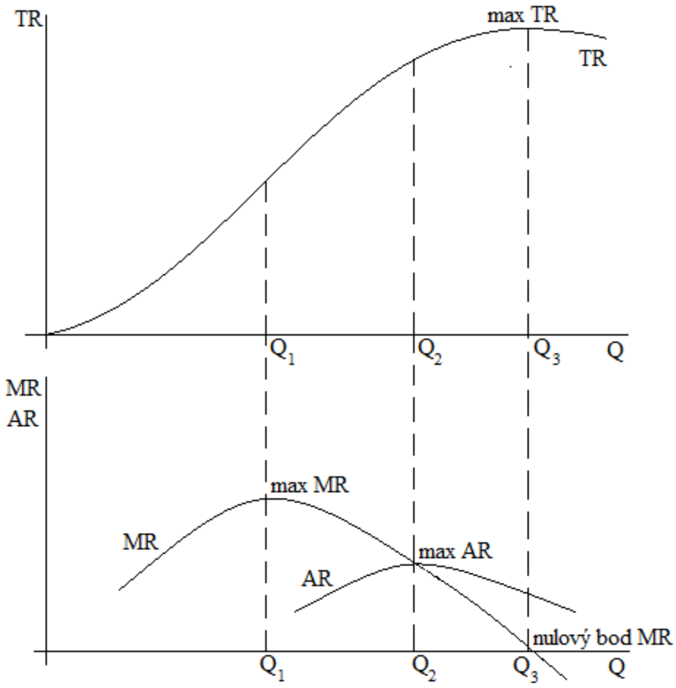
Obrázek 2.5. Funkce celkových, průměrných a mezních nákladů v příkladě 2.3

Všimněme si minima funkce MC a minima funkce AC. Minimum funkce MC odpovídá inflexnímu bodu funkce TC, viz bod Q_1. Funkce TC je konkávní právě v oblasti, kde je funkce MC klesající, a konvexní právě v oblasti, kde je funkce MC rostoucí. Graf funkce MC protíná graf funkce AC v bodě minima funkce AC, viz bod Q_2. Dále si všimněme, že funkce AC klesá v oblasti, kde je její graf nad grafem funkce MC, a naopak roste v oblasti, kde je její graf pod grafem funkce MC.

Příklad 2.4. Příjmy obvykle označujeme symbolem R (z angličtiny *revenue*). Celkové příjmy tedy značíme TR, průměrné AR a mezní MR. Uvažovaná závislost je mezi příjmy a množstvím daného výrobku nebo služby (výstupu), značíme Q. Tudíž máme funkci celkových příjmů $TR = TR(Q)$, průměrných příjmů $AR = AR(Q)$ a mezních příjmů $MR = MR(Q)$.

Na obrázku 2.6 vidíme grafy těchto funkcí i jejich vzájemný vztah v konkrétním případě. Tento případ popisuje tzv. *progresivně-degresivní růst* celkových příjmů.

Všimněme si maxima funkce MR, AR i TR. Maximum funkce MR odpovídá inflexnímu bodu funkce TR, viz bod Q_1. Funkce TR je konvexní právě v oblasti, kde je funkce MR rostoucí, a konkávní právě v oblasti, kde je funkce MR klesající. Vidíme, že maximum funkce TR odpovídá nulovému bodu funkce MR, viz bod Q_3. Graf funkce MR protíná graf funkce AR v bodě maxima funkce AR, viz bod Q_2. Dále si všimněme, že funkce AR



OBRÁZEK 2.6. Funkce celkových, průměrných a mezních příjmů v příkladě 2.4

roste v oblasti, kde je její graf pod grafem funkce MR, a naopak klesá v oblasti, kde je její graf nad grafem funkce MR.

Každý podnik se snaží maximalizovat svůj zisk, značíme π (angličtiny *profit*). Celkový zisk firmy je rozdíl mezi celkovými příjmy a celkovými náklady, tedy $T\pi = TR - TC$. Hledáním optimálního rozsahu výroby, který poskytuje maximální zisk se zabývá tzv. *marginální analýza*. Pokud jste pozorně studovali základní kurz ekonomie, jistě jste se setkali s tzv. *zlatým pravidlem maximalizace zisku*. Toto pravidlo nám říká, že podnik maximalizuje svůj zisk v rozsahu výroby, kdy mezní příjmy se rovnají mezním nákladům, tedy

$$MR(Q) = MC(Q).$$

Mezní příjem nám udává příjem z prodeje dodatečné jednotky výstupu. Obdobně mezní náklad je náklad vzniklý při výrobě dodatečné jednotky výstupu.

Zlaté pravidlo maximalizace zisku vyplývá z procesu hledání extrému (maxima) funkce $T\pi$, proto je třeba vždy ověřit, že se skutečně jedná o maximum.

PŘÍKLAD 2.5. Ekonomický útvar podniku stanovil funkci celkových příjmů a celkových nákladů.

$$TR(Q) = 1400Q - 7,5Q^2$$

$$TC(Q) = Q^3 - 6Q^2 + 140Q + 750$$

Použitím zlatého pravidla maximalizace zisku nalezněte optimální množství výstupu Q, při kterém podnik maximalizuje svůj zisk. (Nezapomeňte ověřit, že se jedná o maximum!)
Řešení.
Nejdříve vypočítáme $MR(Q)$ a $MC(Q)$.

$$MR(Q) = \frac{dTR}{dQ} = TR' = 1400 - 15Q$$

$$MC(Q) = \frac{dTC}{dQ} = TC' = 3Q^2 - 12Q + 140$$

Dále použijeme zlaté pravidlo maximalizace zisku.

$$\begin{aligned} MR(Q) &= MC(Q) \\ 1400 - 15Q &= 3Q^2 - 12Q + 140 \end{aligned}$$

Vyřešíme kvadratickou rovnici.

$$\begin{aligned} 3Q^2 + 3Q - 1260 &= 0 \\ Q^2 + Q - 420 &= 0 \\ Q_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-420)}}{2} \\ Q_{1,2} &= \frac{-1 \pm 41}{2} \\ Q_1 &= 20 \\ Q_2 &= -21 \end{aligned}$$

Řešení Q_2 je záporné a tudíž z ekonomického hlediska pro nás nezajímavé. Nemůžeme vyrábět "-21"jednotek výrobků nebo služeb, proto toto řešení zanedbáváme. Máme tedy jediné řešení $Q_1 = 20$. Dále vypočítáme celkový zisk pro množství Q_1.

$$TR(20) = 1400 \cdot 20 - 7,5 \cdot 20^2 = 25000$$

$$TC(20) = 20^3 - 6 \cdot 20^2 + 140 \cdot 20 + 750 = 9150$$

$$T\pi(20) = 25000 - 9150 = 15850$$

Pro množství 20 jednotek daného statku nebo služby dosáhne podnik maximálního zisku 15850 peněžních jednotek. Nyní ověříme, že se jedná o maximum (dle pravidel diferenciálního počtu, přesněji průběhu funkce).

$$T\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = 1400Q - 7,5Q^2 - Q^3 + 6Q^2 - 140Q - 750$$

$$\frac{dT\pi(Q)}{dQ} = T\pi'(Q) = 1400 - 15Q - 3Q^2 + 12Q - 140$$

$$\frac{d^2T\pi(Q)}{dQ^2} = T\pi''(Q) = -15 - 6Q + 12 = -6Q - 3$$

$$T\pi''(20) = -6 \cdot 20 - 3 = -123 < 0$$

Potvrdili jsme, že bod $Q_1 = 20$ je maximem (protože $T\pi''(20) < 0$).

Příklady k procvičení 2.2

(1) Je dána funkce celkových veličin Tf. Určete funkci průměrných a mezních veličin (Af a Mf). Situaci rovněž znázorněte graficky.
 (a) $Tf(x) = 2x + 5$
 (b) $Tf(x) = x^2$

(2) Je dána funkce celkových veličin:

$$Tf(x) = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x < 3 \\ 6 - x & \text{pro} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

 (a) Určete funkci průměrných a mezních veličin (Af a Mf). Situaci rovněž znázorněte graficky.
 (b) Jaká je funkce mezních veličin Mf (spojitá nebo nespojitá)? Co z této skutečnosti můžeme vyvodit pro vlastnosti funkce celkových veličin Tf?

(3) Ekonomický útvar podniku stanovil funkci celkových příjmů a celkových nákladů.

$$TR(Q) = 2500Q - 9Q^2$$

$$TC(Q) = 2Q^3 - 5Q^2 + 260Q + 1000$$

Použitím zlatého pravidla maximalizace zisku nalezněte optimální množství výstupu Q, při kterém podnik maximalizuje svůj zisk. (Nezapomeňte ověřit, že se jedná o maximum!)

(4) Ekonomický útvar podniku stanovil funkci celkových příjmů a celkových nákladů.

$$TR(Q) = 113000Q - 220Q^2$$

$$TC(Q) = 40Q^3 - 160Q^2 + 1400Q + 17800$$

 (a) Stanovte předpis pro ziskovou funkci $T\pi(Q)$.
 (b) V jakém intervalu je zisková funkce rostoucí?
 (c) V jakém intervalu je zisková funkce klesající?
 (d) Určete, kdy je zisková funkce maximální. (Použijte pravidel pro vyšetřování průběhu funkce, nikoliv zlatého pravidla maximalizace zisku.)
 (e) Ověřte typ extrému.
 (f) Určete, jaká je výnosnost (tj. poměr zisku na jednu vyrobenou jednotku) pro maximální zisk.

Kontrolní otázky 2.2

(1) Uveďte definici funkce celkových, průměrných a mezních veličin.
(2) Uveďte alespoň tři tvrzení popisující vztah mezi veličinami celkovými, průměrnými a mezními. Z čeho tato tvrzení vyplývají?
(3) Čím se zabývá marginální analýza?
(4) Co ekonomové označují jako zlaté pravidlo maximalizace zisku.

Problém k zamyšlení 2.2

Zamyslete se nad tím a zkuste vysvětlit, proč platí zlaté pravidlo maximalizace zisku.

2.3. Elasticita funkce

Klíčová slova: elasticita funkce, funkce elastická, funkce neelastická, funkce jednotkově elastická, cenová elasticita poptávky

Elasticita funkce vyjadřuje míru (rychlost, tempo) relativní změny závislé proměnné v závislosti na relativních změnách nezávislé proměnné. Takto položená definice se zdá být stejná, jako definice sklonu. Veliký zásadní rozdíl je ve slůvku "relativní", což uvidíme dále.

DEFINICE 2.3. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $y = f(x)$. *Elasticita funkce* f je

$$E_f = E_{yx} = \frac{Mf(x)}{Af(x)} = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$$

Jak si můžeme všimnout, z definice plyne, že elasticita je bezrozměrné číslo (nemá žádnou jednotku, proto i ono slovo "relativní"). Také je zřejmé, že elasticitu vždy určujeme v bodě.

Pokud je

- $|E_f| > 1$, pak řekneme, že je *funkce elastická.*
- $|E_f| = 1$, pak řekneme, že je *funkce jednotkově elastická.*
- $|E_f| < 1$, pak řekneme, že je *funkce neelastická.*

Jestliže budeme určovat elasticitu v nějakém bodě graficky, pak budeme porovnávat dva úhly. První značíme α_M a svírá jej tečna ke grafu funkce v daném bodě a osa x. Druhý pak značíme α_A a svírá ho spojnice daného bodu s počátkem a osa x. Při určování druhu elasticity se pak řídíme následujícími pravidly.

- $\alpha_M > \alpha_A$, pak je funkce elastická v daném bodě.
- $\alpha_M < \alpha_A$, pak je funkce neelastická v daném bodě.
- $\alpha_M = \alpha_A$, pak je funkce jednotkově elastická v daném bodě.

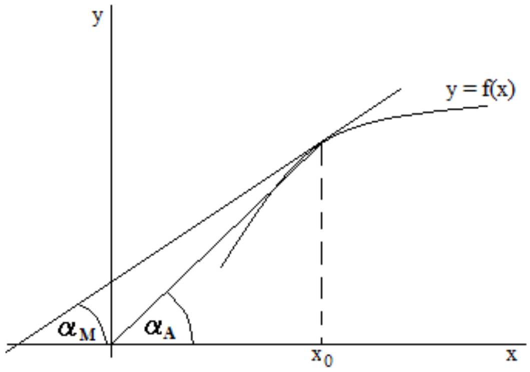
V následujících dvou příkladech si ukážeme, jak takové grafické vyjádření elasticity funkce vypadá.

PŘÍKLAD 2.6. Máme příklad kladně skloněné konkávní křivky, viz obrázek 2.7. Určujeme elasticitu v bodě x_0.

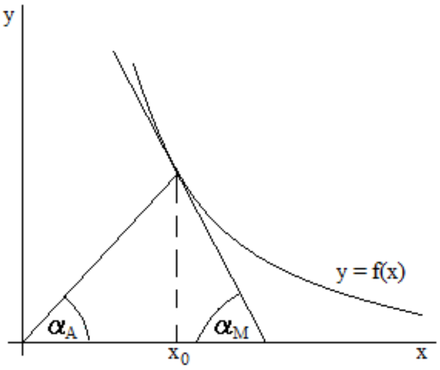
Uvažujeme pouze ostré úhly mezi osou x a tečnou, nebo spojnicí s počátkem. Úhel α_M je pro bod x_0 menší než α_A, tudíž funkce $y = f(x)$ je dle předchozích pravidel v tomto bodě neelastická.

PŘÍKLAD 2.7. Máme příklad záporně skloněné konvexní křivky, viz obrázek 2.8. Určujeme elasticitu v bodě x_0.

Uvažujeme pouze ostré úhly mezi osou x a tečnou, nebo spojnicí s počátkem. Úhel α_M je pro bod x_0 větší než α_A, tudíž funkce $y = f(x)$ je dle předchozích pravidel v tomto bodě elastická.



Obrázek 2.7. Grafické určení elasticity pro kladně skloněnou křivku v př. 2.6



Obrázek 2.8. Grafické určení elasticity pro záporně skloněnou křivku v př. 2.7

Hojně v ekonomii využívaným případem užití vlastnosti elasticity funkce je tzv. *cenová elasticita poptávky*. Cenovou elasticitu poptávky značíme E_{DP}, kde $D = Q(P)$ značí poptávku po daném statku nebo službě a P jako obvykle značí cenu daného statku či služby. Cenová elasticita poptávky je kvantitativní vyjádření reakce spotřebitelů na změnu ceny zboží.

Definice 2.4. Cenová elasticita poptávky je

- pro diskrétní (skokové) změny proměnných

$$E_{DP} = \left| \frac{\frac{Q_2 - Q_1}{\frac{Q_2 + Q_1}{2}}}{\frac{P_2 - P_1}{\frac{P_2 + P_1}{2}}} \right|$$

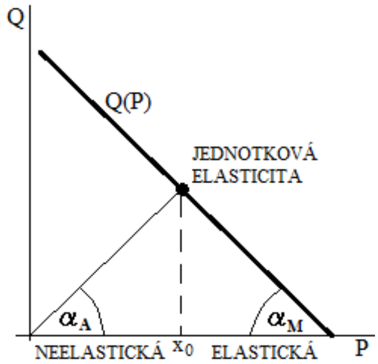
- pro spojité změny proměnných

$$E_{DP} = \left| \frac{\frac{dQ}{dP}}{\frac{Q}{P}} \right| = \left| \frac{MQ(P)}{AQ(P)} \right|$$

Poznámka
Neformálně můžeme psát, že

$$\textit{cenová elasticita poptávky} = \frac{\%\textit{-ní změna poptávaného množství}}{\%\textit{-ní změna ceny}}$$

PŘÍKLAD 2.8. Uvažujeme standardně skloněnou a lineární křivku poptávky po daném statku nebo službě $D = Q(P)$, viz obrázek 2.9. Zabýváme se cenovou elasticitou poptávky a zkoumáme, v jakém bodě je jaká elasticita.



OBRÁZEK 2.9. Cenová elasticita poptávky v příkladu 2.8

Protože se jedná o lineární funkci, úhel α_M je stále stejný (tečna k různým bodům je stejná). V bodě x_0 se úhly α_M a α_A rovnají, tudíž v tomto bodě je elasticita poptávky jednotková. Vlevo od tohoto bodu je úhel α_M menší než úhly α_A, tedy poptávka je v těchto bodech neelastická. Vpravo od tohoto bodu je úhel α_M větší než úhly α_A, tedy poptávka je v těchto bodech elastická.

PŘÍKLAD 2.9. Určete intervaly, ve kterých je funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 4 - x$ elastická, neelastická a jednotkově elastická. Situaci znázorněte rovněž graficky.
Řešení.
Stanovíme si předpis pro elasticitu této funkce E_f.

$$Mf = -1$$
$$Af = \frac{4-x}{x}$$
$$E_f = \frac{Mf(x)}{Af(x)} = \frac{-1}{\frac{4-x}{x}} = \frac{-x}{4-x} = \frac{x}{x-4}$$

Dále budeme zkoumat, kdy je funkce elastická, neelastická a jednotkově elastická, tzn. kdy je $|E_f| > 1$, $|E_f| < 1$ a kdy $|E_f| = 1$. Řešíme tedy dvě nerovnice a jednu rovnici.

$$\left|\frac{x}{x-4}\right| > 1, \quad \left|\frac{x}{x-4}\right| < 1, \quad \left|\frac{x}{x-4}\right| = 1$$

Pro řešení těchto rovnice/nerovnic s absolutní hodnotou využijeme metodu nulových bodů, viz tabulka 2.1. Nulové body jsou 0 a 4.

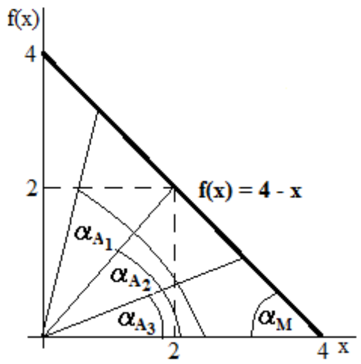
	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

TABULKA 2.1. Metoda nulových bodů v příkladě 2.9

Protože z ekonomického hlediska mají význam jenom kladné hodnoty, zajímá nás jen interval $(0, 4)$, kdy se funkce f nachází v prvním kvadrantu. Vyřešíme příslušné ne/rovnice.

$$\begin{array}{rcl} -\frac{x}{x-4} & > & 1 \\ x & > & 4-x \\ 2x & > & 4 \\ x & > & 2 \\ x & \in & (2,4) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} -\frac{x}{x-4} & < & 1 \\ x & < & 4-x \\ 2x & < & 4 \\ x & < & 2 \\ x & \in & (0,2) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} -\frac{x}{x-4} & = & 1 \\ x & = & 4-x \\ 2x & = & 4 \\ x & = & 2 \end{array}$$

Funkce je elastická v intervalu $(2, 4)$, neelastická $(0, 2)$ a jednotkově elastická pro $x = 2$, viz obrázek 2.10.



OBRÁZEK 2.10. Znázornění elasticity funkce $f(x) = 4 - x$ v příkladu 2.9

V intervalu $(0, 2)$ je $\alpha_{A_1} > \alpha_M$, v intervalu $(2, 4)$ je $\alpha_{A_3} < \alpha_M$ a v bodě $x = 2$ je $\alpha_{A_2} = \alpha_M$.

Příklady k procvičení 2.3

(1) Nacházíme se v otevřené ekonomice. Máme dovozy (import), které značíme M, vývozy (export), které značíme X a agregátní důchod (HDP, HNP), který značíme Y. Platí vztahy $M = f(Y)$ a $X = g(Y)$, tedy dovozy i vývozy jsou funkcí agregátního důchodu. Vyjádřete vzorec pro (důchodovou) elasticitu importu E_{MY} a (důchodovou) elasticitu exportu E_{XY}.

(2) Při ceně daného výrobku 10 Kč je poptáváno 200 ks tohoto výrobku. Pokud zvýšíme cenu o 5 Kč za daný výrobek, dojde k poklesu poptávky po tomto výrobku o 50 ks.
   (a) Vypočítejte cenovou elasticitu poptávky po tomto výrobku v této situaci.
   (b) Rozhodněte, co se stane s tržbami podniku při tomto zvýšení ceny.
(3) Určete intervaly, ve kterých je funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$ elastická, neelastická a jednotkově elastická. Situaci znázorněte rovněž graficky.
(4) Je dána funkce poptávky po daném statku nebo službě
$$Q(P) = \frac{20}{1+P}.$$
   (a) Jaká bude cenová elasticita poptávky při ceně $P = 3$ za jednotku daného statku nebo služby?
   (b) Jak se změní tržba podniku ($TR = P \cdot Q$), zvýší-li se cena daného statku nebo služby o 1.
(5) Cenová elasticita poptávky po určitém typu prstenů je $0,67$. Cena prstenu se zvýší o 20%.
   (a) Určete procentuální změnu v poptávaném množství prstenů.
   (b) Jaký bude toto zvýšení ceny mít vliv na tržby ($TR = P \cdot Q$) výrobců prstenů?

Kontrolní otázky 2.3

(1) Co je to elasticita funkce a jak ji vypočteme?
(2) Jaký je rozdíl mezi elasticitou funkce a sklonem funkce?
(3) Pomocí čeho vyjadřujeme graficky elasticitu funkce v daném bodě?
(4) Co je to cenová elasticita poptávky a jak ji můžeme vypočítat v daném bodě pro diskrétní i pro spojité změny proměnných?

Problém k zamyšlení 2.3

Existuje funkce, která má jednotkovou elasticitu v každém bodě? Pokud ano, jaká to je a proč?

Matematika v Mikroekonomii

KAPITOLA 3

Matematické modelování dynamické rovnováhy na dílčím trhu zboží

Klíčová slova: pavučinový model, dynamický pavučinový model, diskrétní dynamický pavučinový model, spojitý dynamický pavučinový model, „pavučina“

V této kapitole se budeme zabývat matematickým modelováním hledání rovnováhy na dílčím trhu zboží. Hledání rovnováhy na dílčím trhu zboží je základní otázka mikroekonomie a znamená to v podstatě hledání rovnováhy mezi nabídkou a poptávkou na jednom trhu konkrétního zboží. Modely zabývajícími se tímto problémem nazýváme *pavučinovými modely*.

Zajímavé je zabývat se hledáním rovnováhy mezi nabídkou a poptávkou na dílčím trhu zboží měnící se v čase. Takový model nazýváme *dynamickým pavučinovým modelem* a budeme se jím dále zabývat. Kdybychom vzali v úvahu změny ekonomiky, měnila by se i nabídka a poptávka. Ty však v tomto modelu zůstávají stejné. Pokud bychom se zaměřili pouze na takovýto model bez položky času, pak bychom našli "pouze"bod rovnosti nabídky a poptávky a dokázali bychom zjistit, zda se nacházíme nebo nenacházíme v rovnováze. My však kromě bodu rovnováhy a informace, zda v rovnováze jsme či nejsme, dokážeme určit, zda vývojem v čase se do rovnovážného bodu dostaneme či nikoliv.

Pokud budeme předpokládat, že se čas mění skokově, pak se jedná o *diskrétní dynamický pavučinový model*. Jestliže naopak předpokládáme spojitou změnu času, pak se model nazývá *spojitým dynamickým pavučinovým modelem*.

Poptávku značíme písmenem D (z anglického *demand*) a jedná se o nějaký funkční vztah mezi množství Q a cenou P, tedy $D: \quad Q = f_1(P)$. Obdobně nabídku značíme písmenem S (z anglického *supply*) a jedná se rovněž o nějaký (jiný) funkční vztah mezi množství Q a cenou P, tedy $S: \quad Q = f_2(P)$. Hledáme-li rovnováhu, pak musí platit obě rovnice dohromady, tedy řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Řešením je potom nějaký bod (o dvou souřadnicích $[P, Q]$), průsečík křivek nabídky a poptávky.

V dynamickém modelu přidáváme položku času t, čili proměnné jsou diskrétní funkce, tedy posloupnosti, při nespojitých změnách času, nebo spojité funkce při spojitých změnách času. Poptávka je potom dána funkcí $D: \ Q = f_1(P(t))$ a nabídka funkcí $D: \ Q = f_2(P(t))$. Hledáme-li rovnováhu, pak porovnáme nabídku s poptávkou a získáme diferenční nebo diferenciální rovnici. Řešením je pak (ne)spojitá funkce času P (nezávislá proměnná), tzv. *„pavučina“*.

Kontrolní otázky 3.0

(1) Co v (mikro)ekonomii modelujeme, když máme pavučinový model?
(2) Co všechno dokážeme zjistit pomocí dynamického pavučinového modelu?
(3) Jaký je rozdíl mezi diskrétním a spojitým dynamickým pavučinovým modelem?
(4) Jaký je matematický model statického pavučinového modelu? A co je jeho řešením?
(5) Jaký je matematický model dynamického pavučinového modelu? A co je jeho řešením?

3.1. Diskrétní dynamický pavučinový model

Klíčová slova: diskrétní dynamický pavučinový model se zpožděním na straně nabídky, diskrétní dynamický pavučinový model se zpožděním na straně poptávky

Tak abychom si to zopakovali, v této části se zabýváme modelováním rovnováhy mezi nabídkou S a poptávkou D na dílčím trhu zboží s diskrétními časovými změnami. Pro jednoduchost předpokládáme lineární závislosti a standardně skloněné funkce poptávky a nabídky. Poptávka je klesající funkcí a nabídka funkcí rostoucí.

Existují dva typy modelů:

- *diskrétní dynamický pavučinový model se zpožděním na straně nabídky*
$$D: \ Q_{D_t} = a - bP_t$$
$$S: \ Q_{S_t} = -c + dP_{t-1}$$
kde $a, b, c, d > 0$ a $t = 1, 2, 3, ...,$
- *diskrétní dynamický pavučinový model se zpožděním na straně poptávky*
$$D: \ Q_{D_t} = a - bP_{t-1}$$
$$S: \ Q_{S_t} = -c + dP_t$$
kde $a, b, c, d > 0$ a $t = 1, 2, 3, ...$

Všimněme si, že zpoždění je dáno "výskytem"P_{t-1} v dané rovnici, tzn. zpoždění ceny o jedno období na straně nabídky, nebo poptávky.

Nyní si napíšeme algoritmus, jak postupovat při řešení uvedených modelů.

(1) Vyřešíme statickou rovnováhu, tzn. zanedbáme faktor času. Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.
$$D: \ Q = a - bP$$
$$S: \ Q = -c + dP$$
Získáme statické, nebo též tzv. partikulární řešení $[P^*, Q^*]$.
(2) Vyřešíme dynamickou rovnováhu, tzn. porovnáme nabídku s poptávkou $Q_{D_t} = Q_{S_t}$. Získáme diferenční nehomogenní rovnici prvního řádu, kterou vyřešíme a dostaneme obecné řešení.
(Zcela neformálně je postup následovný. Všechny výrazy s P_t a P_{t-1} převedeme na levou stranu rovnice, zbytek na pravou. Dále řešíme tzv, homogenní část, tj. bez pravé strany, a to tak, že P_t nahradíme

$\lambda^1 = \lambda$ a P_{t-1} nahradíme $\lambda^0 = 1$. Nalezneme "λ". Obecné řešení je pak $P_t = c \cdot (\lambda)^t + P^*$, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta.)

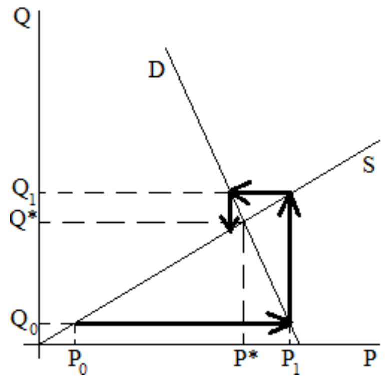
(3) Zahrneme počáteční podmínku a nalezneme konečné řešení naší rovnice.
(Řečeno neformálně, do obecného řešení dosadíme $P_0 = P(0)$ a získáme konstantu c, kterou dosadíme do obecného řešení.)

Nezapomeňme a znovu si uvědomme, že řešením tohoto modelu je nějaká posloupnost vývoje ceny (jako nezávislé proměnné) v čase.

Již jsme se zmínili o tom, že dle řešení uvedené diferenční rovnice poznáme, zda se ekonomika v průběhu času do rovnovážného bodu dostane, či nikoliv. Z matematického pohledu se jedná o otázku konvergence. Ptáme se, zda výsledná posloupnost konverguje k rovnovážné ceně či se od rovnovážné ceny vzdaluje.

Ukážeme si pomocí ilustrativního příkladu křivky nabídky a poptávky tuto konvergenci a divergenci.

Příklad 3.1. Nejdříve budeme uvažovat případ zpoždění na straně nabídky v tomto konkrétním případě sklonu křivek nabídky a poptávky, viz následující obrázek 3.1.



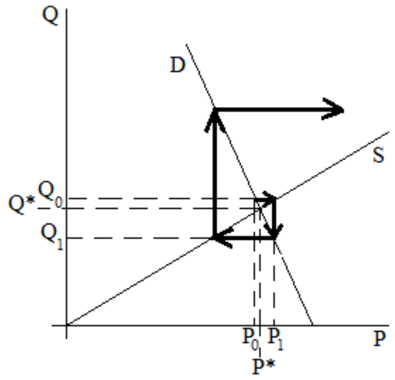
Obrázek 3.1. „Pavučina“ při zpoždění na straně nabídky v příkladě 3.1

Na počátku jsme v bodu $[P_0, Q_0]$, čili za cenu P_0 nabízíme množství Q_0. Začínáme na křivce nabídky, protože nabídka je zpožděna. Při nabízeném množství Q_0 a ceně P_0 je poptávka vyšší. Nelze ovšem zvednout výrobu tak rychle (nabídka se zpožďuje), proto se zvýší cena na P_1. Při ceně P_1 se ale zvýší výroba na množství Q_1. Ovšem při tomto množství spotřebitelé nejsou ochotní platit cenu P_1 a tudíž cena klesne atd.

Všimněme si, že „pavučina“ začíná na křivce nabídky S a pokračuje zleva doprava (stejným směrem jak píšeme), resp. proti směru hodinových ručiček. Dále můžeme vidět, že se „pavučina“ k rovnovážnému bodu $[P^*, Q^*]$ blíží, tudíž řešení k němu konverguje.

Pokud bychom dále naopak předpokládali, že v tomto příkladě křivky nabídky a poptávky existuje zpoždění na straně poptávky, pak situace vypadá následovně.

Zde si všimněme (obrázek 3.2), že „pavučina“ začíná na křivce poptávky D v bodě $[P_0, Q_0]$, pokračuje zleva doprava (stejným směrem jak píšeme), resp. ve směru hodinových



OBRÁZEK 3.2. „Pavučina“ při zpoždění na straně poptávky v příkladě 3.1

ručiček. Podobným mechanismem, jak bylo popsáno v případě zpoždění na straně nabídky, se dále posouváme do bodu $[P_1, Q_0]$, potom do $[P_1, Q_1]$ atd. Rovněž vidíme, že se „pavučina“ od rovnovážného bodu $[P^*, Q^*]$ vzdaluje, tudíž řešení diverguje.

Pozorný čtenář si jistě všiml, že konvergence/divergence řešení závisí na typu zpoždění (na straně nabídky či poptávky) a rovněž na sklonech křivky nabídky a poptávky. Nebudeme zde uvádět konkrétní pravidla, dle kterých konvergenci/divergenci poznáme, vše plyne z pravidel konvergence posloupností.

Na následujícím příkladě si ukážeme, jak se takovýto diskrétní dynamický pavučinový model řeší, a jak poznáme, zda řešení konverguje či diverguje.

PŘÍKLAD 3.2. Uvažujme diskrétní dynamický pavučinový model s následující nabídkovou a poptávkovou funkcí.

$$D: \; Q_{D_t} = 24 - 3P_t$$
$$S: \; Q_{S_t} = -1 + 2P_{t-1}$$

Cena v počátečním stavu P_0 je na úrovni 3 peněžní jednotky. Identifikujte, zda se jedná o model se zpožděním na straně nabídky či poptávky. Nalezněte řešení a určete zda ekonomika k rovnovážnému bodu $[P^*, Q^*]$ konverguje či nikoliv. Situaci znázorněte rovněž graficky.

Řešení.

Protože člen P_{t-1} (tzn. zpoždění ceny o jedno období) se nachází v rovnici nabídky S, jedná se o zpoždění na straně nabídky.

Nejdříve hledáme statickou rovnováhu (tzn. porovnáme nabídku s poptávkou se zanedbáním faktoru času).

$$\begin{aligned} 24 - 3P &= -1 + 2P \\ 5P &= 25 \\ P^* &= 5 \\ Q^* &= 24 - 3 \cdot 5 = 9 \\ &= -1 + 2 \cdot 5 = 9 \end{aligned}$$

Dále řešíme dynamickou rovnováhu (tzn. porovnáme nabídku s poptávkou bez zanedbání faktoru času).

$$\begin{aligned} 24 - 3P_t &= -1 + 2P_{t-1} \\ 3P_t + 2P_{t-1} &= 25 \end{aligned}$$

Nalezli jsme výchozí podobu diferenční rovnice prvního řádu, jedná se o nehomogenní rovnici. Nás nyní zajímá pouze homogenní část této rovnice, tedy "vynulujeme"pravou stranu a rovnici řešíme standardní metodou.

$$\begin{aligned} 3P_t + 2P_{t-1} &= 0 \\ 3\lambda^1 + 2\lambda^0 &= 0 \\ 3\lambda + 2 &= 0 \\ \lambda &= -\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Obecné řešení získáme dle vzorce $P_t = c \cdot (\lambda)^t + P^*$, kde $c \in \mathbb{R}$.

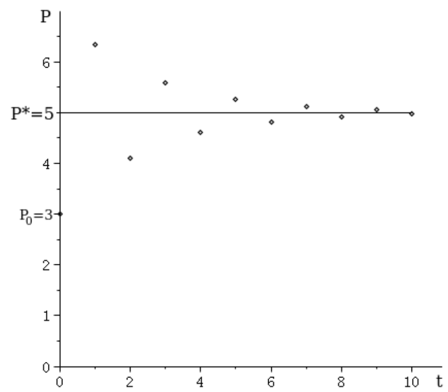
$$P_t = c \cdot (-\frac{2}{3})^t + 5$$

Nakonec zahrneme do řešení počáteční podmínku $P_0 = 3$.

$$\begin{aligned} P_0 = 3 &= c \cdot (-\tfrac{2}{3})^0 + 5 \\ 3 &= c \cdot 1 + 5 \\ c &= -2 \end{aligned}$$

Dosadíme $c = -2$ do obecného řešení a získáme celkové řešení.

$$P_t = -2 \cdot (-\frac{2}{3})^t + 5$$

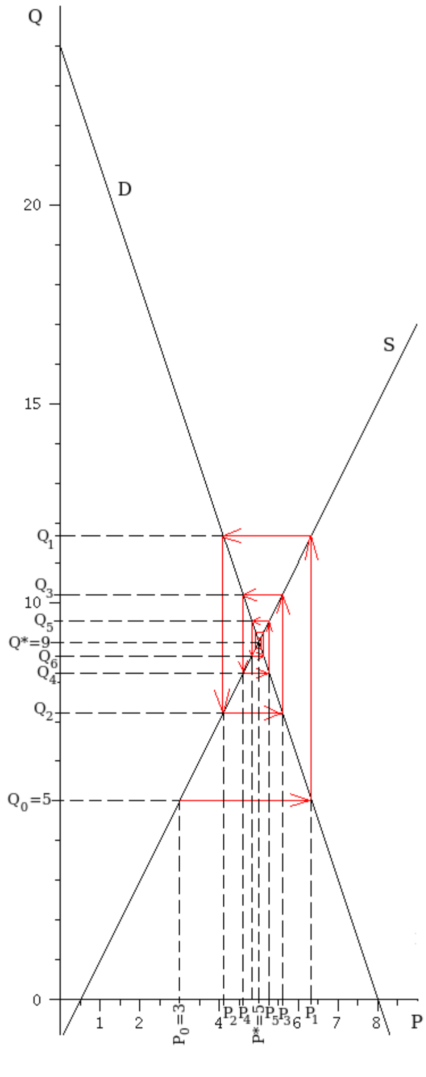


OBRÁZEK 3.3. Graf posloupnosti P_t pro hodnoty $t = 0..10$ - řešení příkladu 3.2

Nyní je čas se zamyslet nad tím, zda posloupnost konverguje, či diverguje. Pokud $t \to \infty$ $(t = 1, 2, 3, ...)$, pak výraz $(-\frac{2}{3})^t \to 0$ (umocňujeme-li nějaký výraz v absolutní hodnotě menší než 1 stále na větší a větší číslo, pak se tento výraz stále zmenšuje a zmenšuje), a tedy $P_t \to P^*(= 5)$. Vidíme, že řešení k rovnovážné úrovni ceny $P^* = 5$ konverguje. Pro ilustraci si znázorníme průběh ceny a množství v čase v následující tabulce 3.1. Z obrázku 3.3 je rovněž zřejmé, že cena v čase sice osciluje, ale konverguje k rovnovážné ceně $P^* = 5$. Nakonec si graficky znázorníme výslednou „pavučinu“ a uvidíme, jak konverguje k rovnovážnému bodu $[P^*, Q^*] = [5, 9]$, viz obrázek 3.4.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_t	3	6,33	4,11	5,59	4,6	5,26	4,82	5,12	4,92	5,05	4,97
Q_t	5	11,66	7,22	10,19	8,21	9,53	8,56	9,23	8,84	9,1	8,93

TABULKA 3.1. Průběh ceny a množství v čase v příkladě 3.2



OBRÁZEK 3.4. Znázornění „pavučiny“ v příkladě 3.2

Příklady k procvičení 3.1

(1) Uvažujme diskrétní dynamický pavučinový model s následující nabídkovou a poptávkovou funkcí.

$$D: \ Q_{D_t} = 15 - 4P_t$$
$$S: \ Q_{S_t} = -6 + 3P_{t-1}$$

Cena v počátečním stavu P_0 je na úrovni 4 peněžní jednotky. Identifikujte, zda se jedná o model se zpožděním na straně nabídky či poptávky. Nalezněte řešení a určete zda ekonomika k rovnovážnému bodu $[P^*, Q^*]$ konverguje či nikoliv. Situaci znázorněte rovněž graficky.

(2) Uvažujme diskrétní dynamický pavučinový model s následující nabídkovou a poptávkovou funkcí.

$$D: \ Q_{D_t} = 18 - 2P_t$$
$$S: \ Q_{S_t} = -2 + 3P_{t-1}$$

Cena v počátečním stavu P_0 je na úrovni 3 peněžní jednotky. Identifikujte, zda se jedná o model se zpožděním na straně nabídky či poptávky. Nalezněte řešení a určete zda ekonomika k rovnovážnému bodu $[P^*, Q^*]$ konverguje či nikoliv. Situaci znázorněte rovněž graficky.

(3) Uvažujme diskrétní dynamický pavučinový model s následující nabídkovou a poptávkovou funkcí.

$$D: \ Q_{D_t} = 16 - 4P_t$$
$$S: \ Q_{S_t} = -8 + 4P_{t-1}$$

Cena v počátečním stavu P_0 je na úrovni 1 peněžní jednotky. Identifikujte, zda se jedná o model se zpožděním na straně nabídky či poptávky. Nalezněte řešení a určete zda ekonomika k rovnovážnému bodu $[P^*, Q^*]$ konverguje či nikoliv. Situaci znázorněte rovněž graficky.

(4) Uvažujme diskrétní dynamický pavučinový model s následující nabídkovou a poptávkovou funkcí.

$$D: \ Q_{D_t} = 15 - 4P_{t-1}$$
$$S: \ Q_{S_t} = -6 + 3P_t$$

Cena v počátečním stavu P_0 je na úrovni 4 peněžní jednotky. Identifikujte, zda se jedná o model se zpožděním na straně nabídky či poptávky. Nalezněte řešení a určete zda ekonomika k rovnovážnému bodu $[P^*, Q^*]$ konverguje či nikoliv. Situaci znázorněte rovněž graficky.

(5) Uvažujme diskrétní dynamický pavučinový model s následující nabídkovou a poptávkovou funkcí.

$$D: \ Q_{D_t} = 18 - 2P_{t-1}$$
$$S: \ Q_{S_t} = -2 + 3P_t$$

Cena v počátečním stavu P_0 je na úrovni 3 peněžní jednotky. Identifikujte, zda se jedná o model se zpožděním na straně nabídky či poptávky. Nalezněte řešení a určete zda ekonomika k rovnovážnému bodu $[P^*, Q^*]$ konverguje či nikoliv. Situaci znázorněte rovněž graficky.

(6) Uvažujme diskrétní dynamický pavučinový model s následující nabídkovou a poptávkovou funkcí.

$$D: \; Q_{D_t} = 16 - 4P_{t-1}$$

$$S: \; Q_{S_t} = -8 + 4P_t$$

Cena v počátečním stavu P_0 je na úrovni 1 peněžní jednotky. Identifikujte, zda se jedná o model se zpožděním na straně nabídky či poptávky. Nalezněte řešení a určete zda ekonomika k rovnovážnému bodu $[P^*, Q^*]$ konverguje či nikoliv. Situaci znázorněte rovněž graficky.

Kontrolní otázky 3.1

(1) Co je to diskrétní dynamický pavučinový model?
(2) Jaké máme dva typy těchto modelů? A jak je rozeznáme?
(3) Zkuste vlastními slovy popsat postup řešení takovéhoto modelu.
(4) Co je řešením diskrétního dynamického pavučinového modelu?
(5) Jak poznáme z grafu, že řešení diskrétního dynamického pavučinového modelu konverguje (resp. diverguje) k (resp. od) rovnovážnému (resp. rovnovážného) bodu v modelech s oběma typy zpoždění?
(6) Jak poznáme z předpisu řešení, že konverguje (resp. diverguje) k (resp. od) rovnovážnému (resp. rovnovážného) bodu?

Problém k zamyšlení 3.1

Jaký vliv má malá změna nabídky a poptávky na řešení modelu? Lze o tom něco jednoznačně říct?

3.2. Spojitý dynamický pavučinový model

Klíčová slova: spojitý dynamický pavučinový model se zpožděním na straně nabídky, spojitý dynamický pavučinový model se zpožděním na straně poptávky

Nyní se zabýváme stejným modelem jako v předchozí kapitole s tím rozdílem, že předpokládáme časové změny spojité. Tedy modelujeme rovnováhu mezi nabídkou S a poptávkou D na dílčím trhu zboží se spojitými časovými změnami. Pro jednoduchost předpokládáme lineární závislosti a standardně skloněné funkce poptávky a nabídky (tzn. poptávka klesající, nabídka rostoucí).

Obdobně jako v předchozím existují dva typy modelů:

- *spojitý dynamický pavučinový model se zpožděním na straně nabídky*

$$D: \; Q_D(t) = m - nP(t) \pm \alpha \frac{dP(t)}{dt}$$

$$S: \; Q_S(t) = -r + sP(t)$$

kde $m, n, r, s, \alpha > 0$ a $t = 1, 2, 3, ...,$

- *spojitý dynamický pavučinový model se zpožděním na straně poptávky*

$$D: \ Q_D(t) = m - nP(t)$$

$$S: \ Q_S(t) = -r + sP(t) \pm \alpha \frac{dP(t)}{dt}$$

kde $m, n, r, s, \alpha > 0$ a $t = 1, 2, 3, ...,$

Všimněme si, že zpoždění je dáno tím, že ta strana (poptávka nebo nabídka), na které existuje zpoždění, neobsahuje člen $\frac{dP(t)}{dt}$. Strana, která tento člen obsahuje je "napřed".

Nyní si napíšeme algoritmus, jak postupovat při řešení uvedených modelů.

(1) Vyřešíme statickou rovnováhu, tzn. zanedbáme faktor času. Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$D: \ Q = m - nP$$

$$S: \ Q = -r + sP$$

Získáme statické, nebo též tzv. partikulární řešení $[P^*, Q^*]$.

(2) Vyřešíme dynamickou rovnováhu, tzn. porovnáme nabídku s poptávkou $Q_D(t) = Q_S(t)$. Tento typ modelů vede k nehomogenní diferenciální rovnici prvního řádu, kterou řešíme metodou separace proměnných a dostaneme obecné řešení.

(Zcela neformálně je postup následovný. Všechny členy s výrazy P a $\frac{dP}{dt}$ převedeme na levou stranu rovnice, zbytek na pravou. Dále řešíme tzv. homogenní část, tj. bez pravé strany, metodou separace proměnných. Všechny výrazy, kde se vyskytuje P, převedeme na jednu stranu, a ostatní výrazy s t převedeme na druhou stranu rovnice. Obě strany rovnice zintegrujeme - dle P jednu stranu a dle t druhou stranu a vyjádříme P, čímž získáme obecné řešení homogenní části rovnice. Obecné řešení rovnice je potom součet obecného řešení homogenní části rovnice a partikulárního řešení P^*.)

(3) Zahrneme počáteční podmínku a nalezneme konečné řešení naší rovnice.

(Řečeno neformálně, do obecného řešení dosadíme $P_0 = P(0)$ a získáme konstantu c, kterou dosadíme do obecného řešení.)

Nezapomeňme a znovu si uvědomme, že řešením tohoto modelu je nějaká spojitá funkce vývoje ceny (jako nezávislé proměnné) v čase.

Již jsme se zmínili o tom, že dle řešení uvedené diferenciální rovnice poznáme, zda se ekonomika v průběhu času do rovnovážného bodu dostane, či nikoliv. Z matematického pohledu se jedná o otázku konvergence. Ptáme se, zda výsledná funkce konverguje k rovnovážné ceně či od rovnovážné ceny diverguje.

To, zda řešení konverguje nebo diverguje, vyplývá z obecných pravidel konvergence/divergence funkce. Pro lepší orientaci a vhled do situace (rozumějme situace se standardně skloněnými křivkami D (klesající) a S (rostoucí)) vám můžeme prozradit, že konvergence/divergence tohoto řešení není závislá na konkrétních sklonech funkce nabídky S a poptávky D, jak tomu bylo u diskrétního modelu. To nám situaci značně zjednodušuje. To, co "rozhodne"o konvergenci je "znaménko"u symbolu α v uvedených rovnicích. Pokud toto "znaménko"je stejné jako u symbolu $P(t)$ (tzn. u modelu se zpožděním na straně nabídky $-\alpha$, u modelu se zpožděním na straně poptávky $+\alpha$), pak řešení konverguje.

Na následujícím příkladě si ukážeme, jak se takovýto spojitý dynamický pavučinový model řeší, a jak poznáme, zda řešení konverguje či diverguje.

PŘÍKLAD 3.3. Uvažujme spojitý dynamický pavučinový model s následující nabídkovou a poptávkovou funkcí.

$$D: \; Q_D(t) = 24 - 3(P(t) + \frac{dP(t)}{dt})$$
$$S: \; Q_S(t) = -1 + 2P(t)$$

Cena v počátečním stavu P_0 je na úrovni 3 peněžní jednotky. Identifikujte, zda se jedná o model se zpožděním na straně nabídky či poptávky. Nalezněte řešení a určete zda ekonomika k rovnovážnému bodu $[P^*, Q^*]$ konverguje či nikoliv. Situaci znázorněte rovněž graficky.

Řešení.

Protože člen $\frac{dP(t)}{dt}$ se nenachází v rovnici nabídky S, jedná se o zpoždění na straně nabídky. Nejdříve hledáme statickou rovnováhu (tzn. porovnáme nabídku s poptávkou se zanedbáním faktoru času).

$$\begin{aligned} 24 - 3P &= -1 + 2P \\ 5P &= 25 \\ P^* &= 5 \\ Q &= 24 - 3 \cdot 5 \\ &= -1 + 2 \cdot 5 \\ Q^* &= 9 \end{aligned}$$

Dále řešíme dynamickou rovnováhu (tzn. porovnáme nabídku s poptávkou bez zanedbání faktoru času).

$$\begin{aligned} 24 - 3(P(t) + \tfrac{dP(t)}{dt}) &= -1 + 2P(t) \\ 24 - 3P(t) - 3\tfrac{dP(t)}{dt} &= -1 + 2P(t) \\ 5P(t) + 3\tfrac{dP(t)}{dt} &= 25 \end{aligned}$$

Nalezli jsme výchozí podobu diferenciální rovnice prvního řádu, jedná se o nehomogenní rovnici. Nás nyní zajímá pouze homogenní část této rovnice, tedy "vynulujeme"pravou stranu a rovnici řešíme metodou separace proměnných.

$$\begin{aligned} 5P(t) + 3\tfrac{dP(t)}{dt} &= 0 \\ 3\tfrac{dP(t)}{dt} &= -5P(t) \\ \tfrac{dP(t)}{P} &= -\tfrac{5}{3}dt \\ \int \tfrac{dP(t)}{P} &= -\int \tfrac{5}{3}dt \\ \ln(P(t)) &= -\tfrac{5}{3}t + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ P(t) &= e^{-\frac{5}{3}t+c} \\ P(t) &= e^{-\frac{5}{3}t} \cdot e^c \\ P(t) &= k \cdot e^{-\frac{5}{3}t}, \quad k = e^c, \; k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Obecné řešení získáme součtem tohoto obecného řešení homogenní části rovnice a partikulárního řešení P^*.

$$P(t) = k \cdot e^{-\frac{5}{3}t} + 5, \quad k \in \mathbb{R}$$

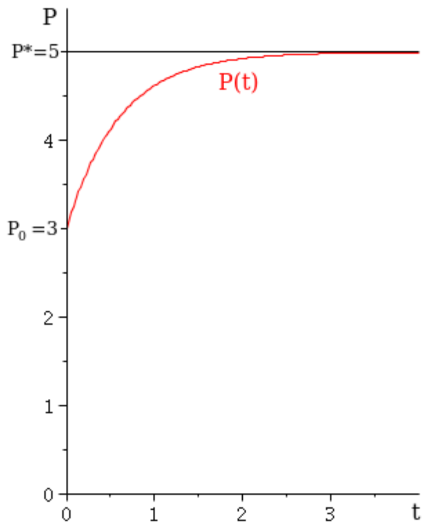
Nakonec zahrneme do řešení počáteční podmínku $P_0 = 3$.

$$\begin{array}{rcl} P(0) = 3 & = & k \cdot e^{-\frac{5}{3} \cdot 0} + 5 \\ 3 & = & k \cdot e^0 + 5 \\ 3 & = & k \cdot 1 + 5 \\ c & = & -2 \end{array}$$

Dosadíme $c = -2$ do obecného řešení a získáme celkové řešení.

$$P(t) = -2 \cdot e^{-\frac{5}{3}t} + 5$$

Nyní je čas se zamyslet nad tím, zda výsledná spojitá funkce $P(t)$ konverguje k rovnovážné ceně P^*. Pokud $t \to \infty$, pak výraz $e^{-\frac{5}{3}t} \to 0$ (je-li exponent mocniny záporný, znamená to, že odmocňujeme, tudíž se zvětšujícím se t, odmocňujeme e stále větší a větší odmocninou), a tedy $P(t) \to P^*(= 5)$. Vidíme, že řešení k rovnovážné úrovni ceny $P^* = 5$ konverguje. Konvergenci poznáme rovněž dle znaménka u $\alpha = 3$. Máme zadanou rovnici poptávky $D: \ Q_D(t) = 24 - 3(P(t) + \frac{dP(t)}{dt})$, po úpravě $D: \ Q_D(t) = 24 - 3P(t) - 3\frac{dP(t)}{dt}$ vidíme, že "znaménko"je stejné jako u $P(t)$. Jedná se o zpoždění na straně nabídky a v rovnici se vyskytuje $-\alpha = -3$, tudíž řešení konverguje. Na následujícím obrázku 3.5 si znázorníme řešení tohoto příkladu - výslednou spojitou funkci $P(t)$. I z tohoto obrázku je zřejmá konvergence řešení.



OBRÁZEK 3.5. Graf spojité funkce $P(t)$ - řešení příkladu 3.3

Jistě jste si uvědomili, že pokud by v řešení předchozího příkladu byla mocnina u Eulerova čísla kladná, pak by toto řešení divergovalo.

Na závěr se zmíníme o případu, kdy by alespoň jedna z křivek poptávky D a nabídky S byla netypicky skloněná (rovnice nebudou uvedeného tvaru, budou se lišit alespoň v jednom "znaménku"před členy $nP(t)$ a $sP(t)$). Takový model řešíme úplně stejným způsobem (diferenciální rovnice prvního řádu, separace proměnných atd.). Konvergence řešení se pak odvíjí od konkrétní podoby řešení (přesněji od mocniny Eulerova čísla).

Příklady k procvičení 3.2

(1) Uvažujme spojitý dynamický pavučinový model s následující typicky skloněnou nabídkovou a poptávkovou funkcí.

$$D:\ Q_D(t) = 20 - 5P(t) - 3\frac{dP(t)}{dt}$$
$$S:\ Q_S(t) = -7 + 4P(t)$$

Cena v počátečním stavu P_0 je na úrovni 5 peněžní jednotky. Identifikujte, zda se jedná o model se zpožděním na straně nabídky či poptávky. Nalezněte řešení a určete zda ekonomika k rovnovážnému bodu $[P^*, Q^*]$ konverguje či nikoliv. Řešení znázorněte graficky.

(2) Uvažujme spojitý dynamický pavučinový model s následující typicky skloněnou nabídkovou a poptávkovou funkcí.

$$D:\ Q_D(t) = 6 - P(t)$$
$$S:\ Q_S(t) = -3 + \left(2P(t) + 3\frac{dP(t)}{dt}\right)$$

Cena v počátečním stavu P_0 je na úrovni 2 peněžní jednotky. Identifikujte, zda se jedná o model se zpožděním na straně nabídky či poptávky. Nalezněte řešení a určete zda ekonomika k rovnovážnému bodu $[P^*, Q^*]$ konverguje či nikoliv. Řešení znázorněte graficky.

(3) Uvažujme spojitý dynamický pavučinový model s následující typicky skloněnou nabídkovou a poptávkovou funkcí.

$$D:\ Q_D(t) = 12 - P(t) + 3\frac{dP(t)}{dt}$$
$$S:\ Q_S(t) = -6 + 2P(t)$$

Cena v počátečním stavu P_0 je na úrovni 4 peněžní jednotky. Identifikujte, zda se jedná o model se zpožděním na straně nabídky či poptávky. Nalezněte řešení a určete zda ekonomika k rovnovážnému bodu $[P^*, Q^*]$ konverguje či nikoliv. Řešení znázorněte graficky.

(4) Uvažujme spojitý dynamický pavučinový model s následující **netypicky** skloněnou nabídkovou a poptávkovou funkcí.

$$D:\ Q_D(t) = -2 + 3P(t)$$
$$S:\ Q_S(t) = 5 + 2P(t) - 3\frac{dP(t)}{dt}$$

Cena v počátečním stavu P_0 je na úrovni 1 peněžní jednotky. Identifikujte, zda se jedná o model se zpožděním na straně nabídky či poptávky. Nalezněte řešení a určete zda ekonomika k rovnovážnému bodu $[P^*, Q^*]$ konverguje či nikoliv. Řešení znázorněte graficky.

Kontrolní otázky 3.2

(1) Co je to spojitý dynamický pavučinový model?
(2) Jaké máme dva typy těchto modelů? A jak je rozeznáme?
(3) Zkuste vlastními slovy popsat postup řešení takovéhoto modelu.
(4) Co je řešením spojitého dynamického pavučinového modelu?
(5) Jak poznáme z předpisu řešení, že konverguje (resp. diverguje) k (resp. od) rovnovážnému (resp. rovnovážného) bodu?

Problém k zamyšlení 3.2

Zamyslete se nad tím, proč sklon křivek poptávky D a nabídky S ve spojitém dynamickém pavučinovém modelu pro křivku poptávky klesající a křivku nabídky rostoucí neovlivňuje konvergenci k rovnovážné ceně tak, jako je tomu u pavučinového modelu diskrétního.

KAPITOLA 4

Mikroekonomické funkce a jejich základní úloha

Další kapitola z "mikroekonomické"části této cvičebnice je zaměřena na základní mikroekonomické funkce. Druhá část názvu zní "jejich základní úloha", což je velmi podstatná záležitost. Měli bychom znát, co pomocí dané funkce vlastně chceme zjišťovat.

Jednotlivé funkce se odvíjí od našeho pohledu na věc. Pokud se díváme na svět ekonomiky s pohledu spotřebitele, řekněme třeba nějakého zákazníka, který si jde koupit určitý výrobek, pak hovoříme o tzv. *užitkové funkci*. Přirozeně chceme užitek mít co největší, tedy snažíme se svůj *užitek maximalizovat*. Každá firma si hlídá své příjmy, náklady a zisk. Proto se i my budeme zabývat *funkcí příjmovou, nákladovou a ziskovou*. Sami byste jistě dokázali určit, že podnik chce svůj *příjem maximalizovat, náklady minimalizovat* a obvykle *zisk maximalizovat*. Posledním pohledem, kterým se budeme na problematiku dívat, je očima firmy vzhledem ke svým výrobním faktorům. Každá společnost chce znát optimální kombinaci svých vstupů (výrobních faktorů) tak, aby byly celkové náklady minimální. Budeme se tedy zabývat *produkční funkcí* a pomocí ní hledat *nákladové optimum*.

4.1. Užitková funkce a maximalizace užitku

Klíčová slova: užitková funkce, maximalizace užitku, rozpočtové omezení - linie rozpočtu, redukční metoda, indiferenční křivka, mezní míra substituce ve spotřebě, mezní míra substituce ve směně, optimum spotřebitele

Užitkovou funkci značíme U (z anglického *utility*). Užitková funkce představuje závislost mezi užitkem spotřebitele a množstvím jednotlivých spotřebovávaných statků nebo služeb, ze kterých spotřebitel má daný užitek, vázáno na množství peněz (důchod), které spotřebitel má určeno na nákup oněch statků nebo služeb.

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že spotřebitel spotřebovává pouze dva druhy statků nebo služeb a má pouze jeden příjem určený ke koupi těchto statků nebo služeb (důchod).

Problematiku funkce užitku můžeme zkoumat pomocí dvou přístupů.

(1) V *kardinalistické verzi teorie užitku* je užitek chápán jako kardinální veličina, tzn. je přímo měřitelná.
(2) V *ordinalistické verzi teorie užitku* je užitek chápán jako ordinální veličina, tzn. není přímo měřitelná, lze pouze porovnávat její hodnoty.

Nejdříve se zaměříme na kardinalistickou verzi teorie užitku. V tomto přístupu k užitku předpokládáme, že je možné užitek přímo měřit a vytvořit konkrétní funkci užitku. Rovněž můžeme sestrojit křivku celkového i mezního užitku.

Máme funkci užitku U v závislosti na množstvích prvního statku nebo služby q_1 a druhého q_2, tedy $U(q_1, q_2)$. Dále předpokládáme, že spotřebitel vynaloží celý svůj důchod y na nákup těchto dvou statků a služeb při cenách p_1 prvního a p_2 druhého statku nebo služby. Tuto skutečnost můžeme popsat rovnicí

$$y = p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2,$$

kterou nazýváme *rozpočtovým omezením*, nebo též *linií rozpočtu*. Jak jsme si již řekli, chceme svůj užitek maximalizovat, tudíž hledáme maximum funkce $U(q_1, q_2)$ s vazbou $y = p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2$. Matematický model tohoto našeho ekonomického problému tedy je hledání vázaných extrémů funkce U. Z matematické analýzy víme, že takovouto úlohu můžeme řešit pomocí dvou metod, a to:

(1) metodou Lagrangeových multiplikátorů,
(2) tzv. redukční (dosazovací) metodou.

Jelikož je linie rozpočtu lineární, redukční metoda úplně stačí. Tato metoda řeší náš problém následovně. Vyjádříme si např. q_1 z rovnice rozpočtového omezení a dosadíme jej do $U(q_1, q_2)$. Získáme tak funkci jedné proměnné q_2. Zredukovali jsme funkci dvou proměnných $U(q_1, q_2)$ na funkci proměnné jedné $U(q_2)$. Pro tuto funkci hledáme maximum standardním způsobem.

PŘÍKLAD 4.1. Je dána funkce celkového užitku $U(q_1, q_2) = q_1 \cdot q_2$. Spotřebitel chce maximalizovat svůj užitek spotřebou dvou statků. Cena prvního statku 25 Kč za kus a cena druhého 40 Kč za kus. Na nákup těchto statků má spotřebitel určeno 500 Kč. Nalezněte optimální množství obou statků q_1 a q_2 tak, aby užitek spotřebitele byl maximální při daném rozpočtovém omezení.
Řešení.
Nejdříve si zformulujeme rovnici rozpočtového omezení ze zadaných údajů.

$$500 = 25q_1 + 40q_2$$

Příklad řešíme redukční metodou. Vyjádříme si proměnnou q_1 z rovnice rozpočtového omezení.

$$q_1 = 20 - \frac{8}{5}q_2 = 20 - 1,6q_2$$

Nyní q_1 dosadíme do $U(q_1, q_2)$.

$$U(q_1, q_2) = q_1 \cdot q_2 = (20 - 1,6q_2) \cdot q_2 = 20q_2 - 1,6q_2^2 = U(q_2)$$

Získali jsme funkci jedné proměnné $U(q_2)$. Hledáme její maximum. Funkci zderivujeme a položíme rovno nule.

$$U'(q_2) = 20 - 3,2q_2$$

$$U'(q_2) = 0$$

Hledáme stacionární bod

$$\begin{aligned} 20 - 3,2q_2 &= 0 \\ 200 &= 32q_2 \\ q_2^* &= \tfrac{200}{32} = \tfrac{25}{4} = 6,25 \end{aligned}$$

Dostali jsme množství q_2, pomocí něhož nyní vypočítáme q_1.

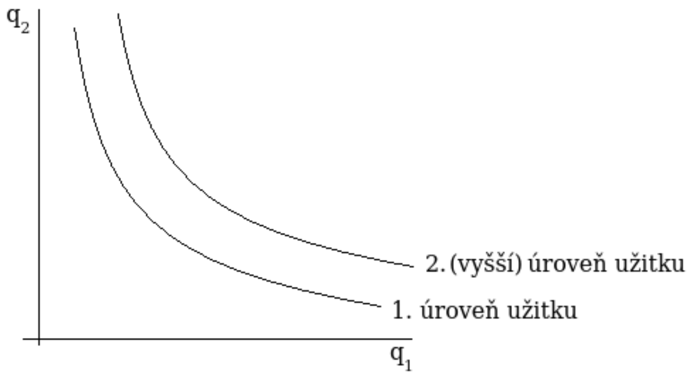
$$q_1^* = 20 - \frac{8}{5} \cdot q_2 = 20 - \frac{8}{5} \cdot \frac{25}{4} = 10$$

Ověříme typ extrému.

$$U''(q_2) = -3,2 < 0$$

Optimální množství q_1 prvního statku je 10 kusů a q_2 druhého statku je 6,25, resp. 6 kusů, při kterém spotřebitel maximalizuje svůj zisk při uvedeném rozpočtovém omezení.

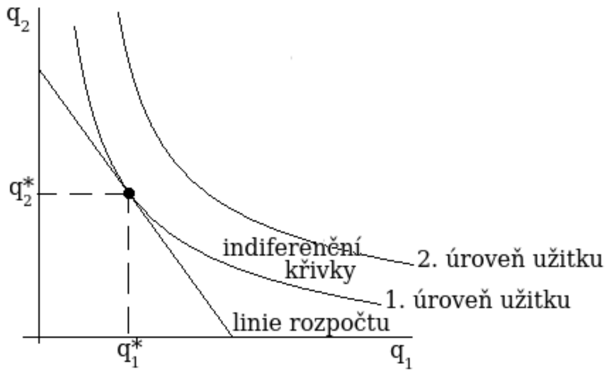
Nyní se zaměříme na ordinalistickou teorii užitku. V této teorii je považován užitek za neměřitelnou veličinu. Dokážeme užitek pouze srovnávat. Porovnávání míry užitku provádíme pomocí tzv. *indiferenčních křivek*. Indiferenční křivka nám graficky znázorňuje kombinaci množství q_1 a q_2, které dávají stejný užitek. Z kurzu ekonomie víme, že při dvou žádoucích statcích jsou indiferenční křivky klesající, konvexní vůči počátku, nesmějí se navzájem protínat a procházejí každým bodem roviny, viz obrázek 4.1.



Obrázek 4.1. Indiferenční křivky

Všimněme si, že každá indiferenční křivka udává jednu úroveň užitku. Při vyšší úrovni užitku přeskočíme na další (výše položenou) indiferenční křivku. To, na kterou indiferenční křivku "dosáhneme", nám udává linie rozpočtu.

Jak vidíme na obrázku 4.2, optimum spotřebitele je dáno bodem, ve kterém je linie rozpočtu tečnou k nějaké indiferenční křivce. Optimum spotřebitele je taková kombinace dvou statku q_1^* a q_2^*, při kterém dosahujeme maximálního užitku při daném rozpočtovém omezení.



OBRÁZEK 4.2. Optimum spotřebitele

Různé úrovně užitku budeme značit U_i, kde $i = 1, 2, 3...$ a $U_i \in \mathbb{R}$. Užitková funkce je pak $U_i = q_1 \cdot q_2$. Vyjádříme-li q_2, pak dostaneme předpis indiferenční křivky $q_2 = \frac{U_i}{q_1}$. Směrnice tečny indiferenční křivky v absolutní hodnotě bývá v ekonomii označována jako *mezní míra substituce ve spotřebě*, značíme MRS_C. Vidíme, že

$$MRS_C = \left| -\frac{U_i}{q_1^2} \right| = \frac{U_i}{q_1^2}.$$

Jak již bylo řečeno, linii rozpočtu uvádíme dle vzorce $y = p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2$. Po vyjádření proměnné q_2, pak dostaneme $q_2 = \frac{y}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} q_1$. Směrnici tečny linie rozpočtu v absolutní hodnotě nazýváme *mezní mírou substituce ve směně*, označujeme MRS_E. Vidíme, že

$$MRS_E = \left| -\frac{p_1}{p_2} \right| = \frac{p_1}{p_2}.$$

Řekli jsme, že bod, ve kterém je linie rozpočtu tečnou k nějaké indiferenční křivce, je optimem spotřebitele. Musíme tedy porovnat směrnice rozpočtového omezení a indiferenční křivky. *Optimim spotřebitele* je proto dáno rovností

$$MRS_C = MRS_E.$$

Zformulujeme si předchozí příklad do ordinalistického pojetí užitku a ukážeme si, jak bychom takový příklad poté řešili

PŘÍKLAD 4.2. Je dána funkce indiferenční křivky $U_i = q_1 \cdot q_2$, kde $i = 1, 2, 3...$ a $U_i \in \mathbb{R}$. Spotřebitel chce maximalizovat svůj užitek spotřebou dvou statků. Cena prvního statku 25 Kč za kus a cena druhého 40 Kč za kus. Na nákup těchto statků má spotřebitel určeno 500 Kč. Nalezněte optimální množství obou statků q_1 a q_2 tak, aby užitek spotřebitele byl maximální při daném rozpočtovém omezení.
Řešení.
Nejdříve si zformulujeme rovnici rozpočtového omezení ze zadaných údajů.

$$500 = 25q_1 + 40q_2$$

Nalezneme MRS_E (z rovnice rozpočtového omezení vyjádříme q_2 a zderivujeme dle q_1).

$$q_2 = 12,5 - \frac{5}{8}q_1$$

$$MRS_E = |q_2'| = \frac{5}{8}$$

Nalezneme MRS_C (z rovnice indiferenční křivky vyjádříme q_2 a zderivujeme dle q_1)

$$q_2 = \frac{U_i}{q_1}$$

$$MRS_C = |q_2'| = \frac{U_i}{q_1^2}$$

Porovnáme $MRS_C = MRS_E$.

$$\begin{aligned} \tfrac{U_i}{q_1^2} &= \tfrac{5}{8} \\ U_i &= \tfrac{5}{8}q_1^2 \end{aligned}$$

Dosadíme U_i do rovnice indiferenční křivky a získáme vztah mezi q_1 a q_2.

$$q_2 = \frac{\frac{5}{8}q_1^2}{q_1}$$

$$q_2 = \frac{5}{8}q_1$$

Dále dosadíme q_2 do rovnice rozpočtového omezení $q_2 = 12,5 - \frac{5}{8}q_1$.

$$\begin{aligned} \tfrac{5}{8}q_1 &= 12,5 - \tfrac{5}{8}q_1 \\ \tfrac{10}{8}q_1 &= \tfrac{25}{2} \\ 5q_1 &= 50 \\ q_1^* &= 10 \end{aligned}$$

Získali jsme množství q_1. Dosazením do rovnice $q_2 = \frac{5}{8}q_1$ dostaneme množství q_2.

$$\begin{aligned} q_2 &= \tfrac{5}{8} \cdot 10 \\ q_2^* &= \tfrac{25}{4} = 6,25 \end{aligned}$$

Vidíme, že i touto metodou při stejném zadání jsme získali stejný výsledek optimálního množství $q_1^* = 10$ a $q_2^* = 6,25$.

Příklady k procvičení 4.1

(1) Je dána funkce celkového užitku $U(q_1, q_2) = q_1 \cdot q_2$. Spotřebitel chce maximalizovat svůj užitek spotřebou dvou statků. Cena prvního statku 30 Kč za kus a cena druhého 50 Kč za kus. Na nákup těchto statků má spotřebitel určeno 800 Kč. Nalezněte optimální množství obou statků q_1 a q_2 tak, aby užitek spotřebitele byl maximální při daném rozpočtovém omezení.

(2) Je dána funkce indiferenční křivky $U_i = q_1 \cdot q_2$, kde $i = 1, 2, 3...$ a $U_i \in \mathbb{R}$. Spotřebitel chce maximalizovat svůj užitek spotřebou dvou statků. Cena prvního statku 30 Kč za kus a cena druhého 50 Kč za kus. Na nákup těchto statků má spotřebitel určeno 800 Kč. Nalezněte optimální množství obou statků q_1 a q_2 tak, aby užitek spotřebitele byl maximální při daném rozpočtovém omezení.

Kontrolní otázky 4.1

(1) Vysvětlete, co je to užitková funkce.
(2) Jaká je základní úloha užitkové funkce?
(3) Co je to rozpočtové omezení?
(4) Jaké máme přístupy teorie užitku? V čem se liší?
(5) Jaký je matematický model maximalizace užitku při kardinalistickém přístupu? Uveďte obě metody řešení.
(6) Co je to indiferenční křivka?
(7) Vysvětlete, co je mezní míra substituce ve směně a mezní míra substituce ve spotřebě. Uveďte, jak je vypočítáme.
(8) Co rozumíme pod pojmem optimum spotřebitele?
(9) Jak optimum spotřebitele nalezneme početně i graficky?

Problém k zamyšlení 4.1

Zalistujte v učebnicích ekonomie nebo v paměti a zkuste si kreslit různé (grafické) řešení optima spotřebitele při různých indiferenčních křivkách (různé kombinace typů statků) a různých sklonech rozpočtového omezení.

4.2. Nákladová funkce a minimalizace průměrných nákladů Příjmová funkce a maximalizace celkových příjmů Zisková funkce a maximalizace celkového zisku

Klíčová slova: nákladová funkce, celkové, průměrné a mezní náklady, fixní a variabilní náklady, minimalizace průměrných nákladů, příjmová funkce, maximalizace celkových příjmů, zisková funkce, maximalizace celkového zisku, bod zvratu, bod ukončení výroby - bod uzavření firmy

Všechny úlohy spojené se základními mikroekonomickými funkcemi jsou v zásadě stejného charakteru. Vždy hledáme extrém (maximum nebo minimum) těchto funkcí v závislosti na dalších aspektech. Náklady, příjmy a zisk jsou spolu velmi úzce spjaty, každá firma tyto veličiny ve svém procesu řeší, zkoumá a analyzuje. Proto ani my nebudeme tyto tři veličiny oddělovat, ale naopak se na ně budeme dívat jako na celek.

Jistě jste si všimli, že jsou používané termíny výdaje vedle nákladů a výnosy či tržby vedle příjmů. Rozdíl v těchto pojmech je v dimenzích účetnictví (kdy je faktura vystavena a kdy dojde ke skutečné platbě apod.). My to příliš rozlišovat nebudeme, protože pro naše účely to není podstatné. Ovšem budeme mít tuto skutečnost na paměti.

Začneme nákladovou funkcí, protože ta je pro podnikatele nejošemetnější. Musí mít vždy dobře spočítáno, jaké jsou jeho celkové náklady, ze kterých zjistí i náklady průměrné nebo mezní. Jak již bylo řečeno, náklady značíme písmenem C (z anglického *cost*). *Nákladová funkce* vyjadřuje závislost nákladů C na úrovni výstupu (produkce) Q, tedy celkové náklady můžeme vyjádřit $TC = TC(Q)$. Standardním způsobem zjistíme funkci průměrných nákladů $AC(Q)$, nebo mezních nákladů $MC(Q)$.

Připomeňme si, že celkové náklady se dělí na fixní FC a variabilní složku nákladů VC. Fixní náklady jsou takové náklady, které jsou stále stejné bez ohledu na výši produkce (např. nájemné), tedy konstanta $FC \geq 0$. Oproti tomu variabilní náklady jsou závislé na výši produkce (čím vyšší produkce, tím vyšší náklady), tedy $VC = VC(Q)$. Shrneme-li tyto skutečnosti, můžeme psát, že

$$TC(Q) = FC + VC(Q).$$

Základní úlohou nákladové funkce je *minimalizovat průměrné náklady*. Zkušeností bylo zjištěno, že průměrné náklady jsou pro podnikatele více vypovídající než náklady celkové. Je to dáno fixní složkou nákladů, která se v průměrném množství nákladů více "rozptýlí". Pokud hledáme minimum průměrných nákladů, říkáme rovněž, že optimalizujeme průměrné náklady. Existují dvě metody této optimalizace.

(1) Rovnost $AC(Q) = MC(Q)$ (z kapitoly 2.2 víme, že průsečík křivek AC a MC je právě v bodě minima funkce AC).
(2) Hledáme extrém (minimum) funkce $AC(Q)$ dle pravidel diferenciálního počtu.

Oba způsoby optimalizace si názorně předvedeme na následujícím příkladu.

PŘÍKLAD 4.3. Ekonomický útvar podniku stanovil funkci celkových nákladů

$$TC(Q) = 100 + 2 \cdot (Q + 5)^2.$$

Určete optimální množství výstupu Q^*, při kterých podnik minimalizuje své průměrné náklady. Použijte oba způsoby optimalizace.
Řešení.

(1) Nejdříve řešíme příklad prvním způsobem (pomocí rovnosti $AC(Q) = MC(Q)$). Nalezneme funkci průměrných a mezních nákladů dle vzorců $AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q}$ a $MC(Q) = \frac{dTC(Q)}{dQ}$.

$$TC(Q) = 100 + 2 \cdot (Q^2 + 10Q + 25) = 2Q^2 + 20Q + 150$$

$$AC(Q) = \frac{2Q^2 + 20Q + 150}{Q} = 2Q + 20 + \frac{150}{Q}$$

$$MC(Q) = \frac{d(2Q^2 + 20Q + 150)}{dQ} = 4Q + 20$$

Porovnáme $AC(Q) = MC(Q)$ a nalezneme optimální Q^*.

$$\begin{aligned} 2Q + 20 + \tfrac{150}{Q} &= 4Q + 20 \\ 2Q &= \tfrac{150}{Q} \\ 2Q^2 &= 150 \\ Q^2 &= 75 \\ Q^*_{1,2} &= \pm\sqrt{75} = \pm 5\sqrt{3} \\ Q^* &= 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že optimální množství při minimálních průměrných nákladech je $Q^* = 5\sqrt{3}$ (záporná odmocnina z ekonomického pohledu nemá smysl).

(2) Nyní budeme řešit tento příklad pomocí druhé metody. Hledáme minimum funkce $AC(Q)$. Funkci $AC(Q)$ zderivujeme a nalezneme stacionární bod Q^*.

$$AC(Q) = 2Q + 20 + \frac{150}{Q}$$

$$AC'(Q) = 2 - \frac{150}{Q^2}$$

$$\begin{aligned} AC'(Q) &= 0 \\ 2 - \tfrac{150}{Q^2} &= 0 \\ 2Q^2 &= 150 \\ Q^2 &= 75 \\ Q^*_{1,2} &= \pm\sqrt{75} = \pm 5\sqrt{3} \\ Q^* &= 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

Optimální množství při minimálních průměrných nákladech je $Q^* = 5\sqrt{3}$. Vidíme, že výsledek je stejný jako v při použití první metody.
Nyní ověříme, že se skutečně jedná o minimum.

$$AC''(Q) = (-2) \cdot (-\frac{150}{Q^3}) = \frac{300}{Q^3}$$

$$AC''(Q^*) = AC''(5\sqrt{3}) = \frac{300}{(5\sqrt{3})^3} > 0$$

Příjmová nebo též *výnosová funkce* popisuje závislost příjmů R (z anglického *revenue*) na objemu produkce Q, tedy celkové příjmy můžeme vyjádřit $TR = TR(Q)$. Standardním způsobem zjistíme funkci průměrných příjmů $AR(Q)$, nebo mezních příjmů $MR(Q)$. Z logiky věci plyne, že celkové příjmy získáme součinem ceny daného statku nebo služby P a daného množství tohoto statku nebo služby Q, čili

$$TR = P \cdot Q.$$

Každý podnik se samozřejmě snaží maximalizovat své příjmy, tudíž základní úlohou příjmové funkce je *maximalizace celkových příjmů*.

S výnosovou funkcí úzce souvisí *funkce zisková*. Zisk značíme písmenem π (za anglického *profit*). Zisková funkce znázorňuje vztah mezi ziskem π a objemem produkce podniku Q, tedy celkový zisk můžeme vyjádřit $T\pi = T\pi(Q)$. Standardním způsobem zjistíme funkci průměrného zisku $A\pi(Q)$, nebo mezního zisku $M\pi(Q)$. Víme, že zisk je roven rozdílu příjmu a nákladů. Platí tedy:

$$T\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q).$$

Optimalizační úloha je *maximalizace celkového zisku*. Buď při řešení takovéto úlohy použijeme tzv. zlaté pravidlo maximalizace zisku $MR(Q) = MC(Q)$, nebo hledáme extrém (maximum) funkce $T\pi(Q)$ (také viz kapitola 2.2).

Při analýze podnikových dat je vhodné znát dva důležité okamžiky v průběhu života firmy, a to tzv. bod zvratu a bod ukončení výroby. *Bodem zvratu* rozumíme takové množství produkce Q_{BZ}, při kterém nevzniká žádný zisk, ale ani ztráta, čili tržby se rovnají nákladům.

$$T\pi(Q) = 0$$
$$TR(Q) = TC(Q)$$

Bod ukončení výroby, nebo též *bod uzavření firmy* je takové množství Q_{BU}, při kterém celkové příjmy kryjí alespoň variabilní náklady. Platí:

$$TR(Q) = VC(Q)$$
$$P \cdot Q = VC(Q)$$
$$AR(Q) = P = AVC(Q)$$

PŘÍKLAD 4.4. Ekonomický útvar podniku stanovil funkci celkových nákladů a celkových příjmů.

$$TC(Q) = \frac{3}{2}Q^2 - 9Q + 14$$
$$TR(Q) = -\frac{1}{2}Q^2 + 6Q + 7$$

(a) Zapište předpis následujících funkcí:
$FC(Q)$, $VC(Q)$, $AFC(Q)$, $MFC(Q)$, $AVC(Q)$, $MVC(Q)$, $AC(Q)$, $MC(Q)$, $AR(Q)$, $MR(Q)$, $T\pi(Q)$, $A\pi(Q)$, $M\pi(Q)$.

(b) Vypočítejte rozsahy výroby (Q), které zajišťují:
- bod zvratu (Q_{BZ}),
- maximum celkového zisku ($Q_{maxT\pi}$),
- maximum průměrného zisku ($Q_{maxA\pi}$),
- bod ukončení výroby (Q_{BU}).

Řešení.

(a) Nalezneme všechny požadované funkce.

$$FC(Q) = 14$$
$$VC(Q) = \frac{3}{2}Q^2 - 9Q$$
$$AFC(Q) = \frac{14}{Q}$$
$$MFC(Q) = 0$$
$$AVC(Q) = \frac{3}{2}Q - 9$$
$$MVC(Q) = 3Q - 9$$
$$AC(Q) = \frac{3}{2}Q - 9 + \frac{14}{Q}$$
$$MC(Q) = 3Q - 9$$
$$AR(Q) = -\frac{1}{2}Q + 6 + \frac{7}{Q}$$
$$MR(Q) = -Q + 6$$
$$\begin{aligned} T\pi(Q) &= TR(Q) - TC(Q) \\ &= -\tfrac{1}{2}Q^2 + 6Q + 7 - \tfrac{3}{2}Q^2 + 9Q - 14 \\ &= -2Q^2 + 15Q - 7 \end{aligned}$$
$$A\pi(Q) = -2Q + 15 - \frac{7}{Q}$$
$$M\pi(Q) = -4Q + 15$$

(b) Nejdříve nalezneme bod zvratu ($T\pi(Q_{BZ}) = 0$).

$$\begin{aligned} T\pi(Q_{BZ}) = -2Q^2 + 15Q - 7 &= 0 \\ Q_{BZ_{1,2}} &= \tfrac{-15 \pm \sqrt{225 - 4\cdot(-2)\cdot(-7)}}{2\cdot(-2)} \\ Q_{BZ_{1,2}} &= \tfrac{-15 \pm \sqrt{169}}{-4} \\ Q_{BZ_{1,2}} &= \tfrac{-15 \pm 13}{-4} \\ Q_{BZ_1} &= \tfrac{1}{2} \\ Q_{BZ_2} &= 7 \end{aligned}$$

Body zvratu jsou tedy dva $Q_{BZ_1} = \frac{1}{2}$ a $Q_{BZ_2} = 7$.
Dále vypočítáme bod maximalizace celkového zisku $Q_{maxT\pi}$. Budeme hledat maximum funkce $T\pi(Q)$. Funkci zderivujeme a najdeme její stacionární bod.

$$T\pi'(Q) = -4Q + 15$$
$$\begin{aligned} T\pi'(Q) &= 0 \\ -4Q + 15 &= 0 \\ 4Q &= 15 \\ Q_{maxT\pi} &= \tfrac{15}{4} = 3,75 \end{aligned}$$

Nalezli jsme bod, při kterém je celkový zisk maximální. Nyní ověříme, že se skutečně jedná o maximum.

$$T\pi''(Q) = -4 < 0$$

Dalším krokem je výpočet bodu $Q_{maxA\pi}$, při kterém je průměrný zisk podniku maximální. Postup bude obdobný jako v předchozím kroku, s tím rozdílem, že výchozí funkce bude $A\pi(Q)$.

$$A\pi'(Q) = -2 + \frac{7}{Q^2}$$

$$\begin{aligned} A\pi'(Q) &= 0 \\ -2 + \tfrac{7}{Q^2} &= 0 \\ 2Q^2 &= 7 \\ Q^2 &= \tfrac{7}{2} \\ Q_{maxA\pi_{1,2}} &= \pm\sqrt{\tfrac{7}{2}} \\ Q_{maxA\pi} &= 1,87 \end{aligned}$$

Nalezli jsme bod maxima průměrného zisku $Q_{maxA\pi} = 1,87$ (záporná odmocnina nemá z ekonomického pohledu smysl). Ověříme typ extrému.

$$A\pi''(Q) = -2\frac{7}{Q^3} = -\frac{14}{Q^3}$$

$$A\pi''(Q_{maxA\pi}) = A\pi''(1,87) = -\frac{14}{1,87^3} < 0$$

Nakonec budeme hledat body ukončení výroby Q_{BU}. Využijeme uvedeného vzorce $AR(Q_{BU}) = P = AVC(Q_{BU})$. Průměrné příjmy a průměrné variabilní náklady jsou:

$$AR(Q) = -\frac{1}{2}Q + 6 + \frac{7}{Q}$$

$$AVC(Q) = \frac{3}{2}Q - 9$$

Nyní je porovnáme.

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}Q + 6 + \tfrac{7}{Q} &= \tfrac{3}{2}Q - 9 \\ 2Q^2 - 15Q - 7 &= 0 \\ Q_{BU_{1,2}} &= \tfrac{15\pm\sqrt{281}}{2 \cdot 2} \\ Q_{BU_{1,2}} &= \tfrac{15\pm 16,76}{4} \\ Q_{BU_1} &= 7,94 \\ Q_{BU_2} &= -0,44 \\ Q_{BU} &= 7,94 \end{aligned}$$

Nalezli jsme jeden bod ukončení výroby $Q_{BU} = 7,94$ (záporná hodnota Q_{BU_2} nemá z ekonomického pohledu smysl).

Příklady k procvičení 4.2

(1) Ekonomický útvar podniku stanovil funkci celkových nákladů

$$TC(Q) = 3Q^2 + 40Q + 243.$$

Určete optimální množství výstupu Q^*, při kterých podnik minimalizuje své průměrné náklady. Použijte oba způsoby optimalizace.

(2) Ekonomický útvar podniku stanovil funkci celkových nákladů a celkových příjmů.

$$TC(Q) = 0,2Q^3 - 3Q^2 + 50Q + 500$$

$$TR(Q) = -0,1Q^3 + 10Q^2 + 2Q$$

(a) Zapište předpis následujících funkcí:
$FC(Q)$, $VC(Q)$, $AFC(Q)$, $MFC(Q)$, $AVC(Q)$, $MVC(Q)$, $AC(Q)$, $MC(Q)$, $AR(Q)$, $MR(Q)$, $T\pi(Q)$, $A\pi(Q)$, $M\pi(Q)$.

(b) Vypočítejte rozsahy výroby (Q), které zajišťují:
- bod zvratu (Q_{BZ}),
- maximum celkového zisku ($Q_{maxT\pi}$),
- maximum průměrného zisku ($Q_{maxA\pi}$),
- bod ukončení výroby (Q_{BU}).

Kontrolní otázky 4.2

(1) Vysvětlete, co je to nákladová funkce a jaká je její základní úloha.
(2) Jaký je rozdíl mezi fixními a variabilními náklady?
(3) Jaké jsou dvě základní metody optimalizace průměrných nákladů?
(4) Vysvětlete, co je to příjmová funkce a jaká je její základní úloha.
(5) Jak získáme celkové příjmy, známe-li množství a cenu daného statku nebo služby?
(6) Vysvětlete, co je to zisková funkce a jaká je její základní úloha.
(7) Jak vypočítáme celkový zisk?
(8) Jakou metodou řešíme úlohu maximalizace zisku?
(9) Co je to bod zvratu a bod ukončení výroby (bod zavření firmy)?

Problém k zamyšlení 4.2

Zamyslete se nad tím, proč jsou body zvratu a ukončení výroby (zavření firmy) pro podnik důležité.

4.3. Produkční funkce a nákladové optimum

Klíčová slova: produkční funkce, výrobní faktory, práce, kapitál, Cobb-Douglasova produkční funkce, průměrný produkt práce, průměrný produkt kapitálu, mezní produkt práce, mezní produkt kapitálu, izokvanta, izokosta, mezní míra technické substituce, nákladové optimum, výnosy z rozsahu, zákon klesajících výnosů z rozsahu

Produkční funkce popisuje závislost výstupu (produkce) Q na vstupech (*výrobních faktorech*). Všimněme si, že v produkční funkci výstup Q působí jako závislá proměnná oproti předchozím případům. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že výrobní faktory jsou dva, a to *práce* L a *kapitál* K. Produkční funkci tedy píšeme ve tvaru

$$Q = f(K, L).$$

Produkční funkci můžeme rozlišovat dle časového hlediska na

- krátkodobou, kde je kapitál považován za konstantní a práce za variabilní veličinu;
- dlouhodobou, kde jsou oba uvažované výrobní faktory variabilní.

Dále si uvedeme dva významné typy (dlouhodobé) produkční funkce:

- lineární produkční funkce
$$Q = a \cdot K + b \cdot L,$$
kde $a, b \geq 0$.
- tzv. *Cobb-Douglasova produkční funkce*
$$Q = A \cdot K^a \cdot L^b,$$
kde $a, b, A \geq 0$.

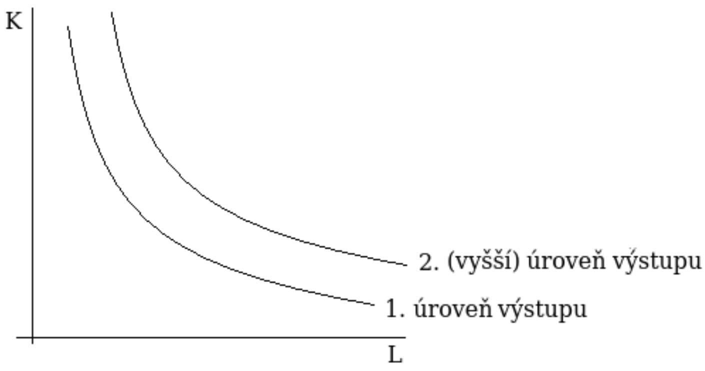
Důležitými veličinami z této oblasti jsou průměrný/mezní produkt práce nebo kapitálu. *Průměrný produkt práce* AP_L představuje poměr výstupu Q na jednotku práce L. Obdobně *průměrný produkt kapitálu* AP_K představuje poměr výstupu Q na jednotku kapitálu K.

$$AP_L = \frac{Q}{L}, \quad AP_K = \frac{Q}{K}$$

Mezní produkt práce MP_L je změna celkového produktu Q v důsledku změny práce L o jednotku za předpokladu konstantního množství ostatních vstupů (kapitál). Rovněž *mezní produkt kapitálu* MP_K je změna celkového produktu Q v důsledku změny kapitálu K o jednotku za předpokladu konstantního množství ostatních vstupů (práce).

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L}, \quad MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K}$$

Analogií indiferenčních křivek z teorie užitku jsou tzv. *izokvanty*. Izokvanta nám graficky znázorňuje kombinaci množství K a L, které dávají stejnou velikost výstupu Q, viz obrázek 4.3. Izokvanty mají stejné vlastnosti jako indiferenční křivky.



OBRÁZEK 4.3. Izokvanty

Tzv. *mezní mírou technické substituce* (označujeme $MRTS$) nazýváme směrnici tečny izokvanty v absolutní hodnotě a vypočteme ji dle vzorců

$$MRTS = \left|\frac{dK}{dL}\right|$$

$$MRTS = \frac{MP_L}{MP_K}$$

Obdobně jako v teorii spotřebitele, kde jsme omezeni množstvím důchodu, zde jsme limitováni finančními prostředky, které můžeme na nákup výrobních faktorů (práce a kapitálu) vynaložit, jinými slovy celkovými náklady TC. Tyto náklady získáme dle vzorce

$$TC = w \cdot L + r \cdot K,$$

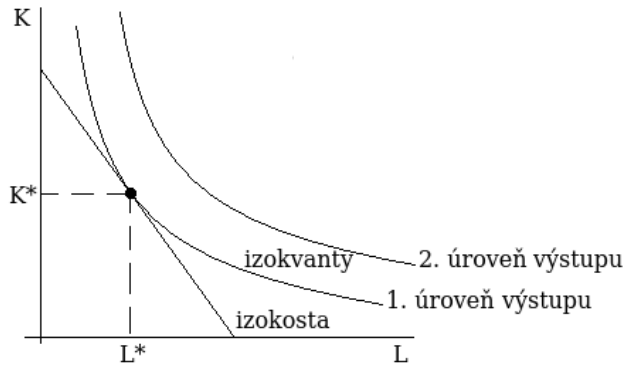
kde $w \geq 0$ je cena jednotky práce (mzda, plat apod.) a $r \geq 0$ je cena jednotka kapitálu (nájemné apod.). Tato přímka stejných nákladů se nazývá *izokosta* a představuje všechny kombinace práce a kapitálu, které mohou být pořízeny za dané celkové náklady. Vyjádříme-li z této rovnic K, získáme

$$K = -\frac{w}{r}L + TC.$$

Nákladové optimum, čili bod $[K^*, L^*]$ (optimální kombinace kapitálu a práce), který nám při daných celkových nákladech poskytne maximální výstup Q, nebo též při daném výstupu Q minimální náklady, je znázorněno na obrázku 4.4.

Vidíme, že nákladové optimum odpovídá bodu, kde je izokosta tečnou izokvantě. Jinými slovy mezní míra technické substituce $MRTS$ se rovná směrnici izokosty v absolutní hodnotě $\frac{w}{r}$. Zformulujeme nákladové optimum

$$MRTS = \frac{w}{r}$$



Obrázek 4.4. Nákladové optimum

Příklad 4.5. Je dána dlouhodobá produkční funkce podniku $Q = 4KL$. Mzdová sazba w je na úrovni 100 Kč za hodinu a nájemné r z použitého kapitálu je 50 Kč za hodinu. Zjistěte

(a) minimální náklady na výrobu 800 jednotek výstupu za hodinu,
(b) maximální výstup za hodinu, je-li podnik omezen celkovými náklady 1000 Kč za hodinu.

Řešení.

(a) Zformulujeme si rovnici stejných nákladů.

$$TC = w \cdot L + r \cdot K = 100L + 50K$$

Směrnice izokosty v absolutní hodnotě je

$$\frac{w}{r} = \frac{100}{50}$$

Dále hledáme $MRTS$. Víme, že výstup má být 800 jednotek. Tudíž ho dosadíme do produkční funkce a vyjádříme K.

$$\begin{aligned} Q &= 4KL \\ 800 &= 4KL \\ K &= \tfrac{200}{L} \end{aligned}$$

$MRTS$ nalezneme podle vzorce $MRTS = \left|\frac{dK}{dL}\right|$.

$$MRTS = \left|-\frac{200}{L^2}\right| = \frac{200}{L^2}$$

Použijeme nákladové optimum $MRTS = \frac{w}{r}$ a nalezneme L^*.

$$\begin{aligned} MRTS &= \tfrac{w}{r} \\ \tfrac{200}{L^2} &= \tfrac{100}{50} \\ 2L^2 &= 200 \\ L^*_{1,2} &= \pm 10 \\ L^* &= 10 \end{aligned}$$

Nalezené L^* (záporné hodnoty nemají ekonomický význam) dosadíme do vztahu $K = \frac{200}{L}$ a získáme K^*.

$$K = \frac{200}{10}$$
$$K^* = 20$$

Zbývá nám vypočítat, jaké jsou minimální náklady. Využijeme vzorce $TC = w \cdot L + r \cdot K$.

$$TC_{min}(K^*, L^*) = w \cdot L^* + r \cdot K^* = 100 \cdot 10 + 50 \cdot 20 = 1000 + 1000 = 2000$$

Zjistili jsme, že při objemu výstupu 800 jednotek budeme vyrábět při minimálních nákladech 2000 Kč za hodinu z optimálního množství kapitálu 20 jednotek a práce 10 jednotek.

(b) Nejdříve si vyjádříme $MRTS$ dle vzorce $MRTS = \frac{MP_L}{MP_K}$.

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial(4KL)}{\partial L} = 4K$$
$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial(4KL)}{\partial K} = 4L$$
$$MRTS = \frac{4K}{4L} = \frac{K}{L}$$

Použijeme nákladové optimum $MRTS = \frac{w}{r}$ a vyjádříme K.

$$\begin{aligned} \frac{K}{L} &= \frac{w}{r} \\ \frac{K}{L} &= \frac{100}{50} \\ \frac{K}{L} &= 2 \\ K &= 2L \end{aligned}$$

Získané informace dosadíme do rovnice stejných nákladů a dostaneme L^*.

$$\begin{aligned} TC &= w \cdot L + r \cdot K \\ 1000 &= 100 \cdot L + 50 \cdot 2L \\ 1000 &= 100L + 100L \\ 200L &= 1000 \\ L^* &= 5 \end{aligned}$$

Výslednou hodnotu $L^* = 5$ dosadíme do vztahu $K = 2L$ a získáme K^*.

$$K^* = 2 \cdot 5 = 10$$

Nakonec nám zbývá vypočítat maximální výstup za hodinu. Využijeme vzorce $Q = 4KL$.

$$Q_{max}(K^*, L^*) = 4 \cdot K^* \cdot L^* = 4 \cdot 10 \cdot 5 = 200$$

Zjistili jsme, že při minimálních nákladech 1000 Kč za hodinu budeme při optimálním množství kapitálu 10 jednotek a práce 5 jednotek vyrábět 200 jednotek za hodinu.

Poslední část této kapitoly se zabývá tzv. *výnosy z rozsahu*. Výnosy z rozsahu představují vztah mezi proporcionální změnou vstupů a jí vyvolanou změnou výstupu.
Máme tři typy výnosů z rozsahu.

- Konstantní výnosy z rozsahu můžeme popsat tím, že růst objemu vstupů o "x"procent způsobí růst výstupu o "x"procent.
- Rostoucí výnosy z rozsahu popíšeme tak, že růst objemu vstupů o "x"procent způsobí růst výstupu o více než "x"procent.
- Klesající výnosy z rozsahu můžeme popsat tak, že růst objemu vstupů o "x"procent způsobí růst výstupu o méně než "x"procent.

Uvedli jsme si dva typy produkční funkce, a to lineární a tzv. Cobb-Douglasovu produkční funkci. Výnosy z rozsahu u lineární produkční funkce jsou vždy konstantní. Pro Cobb-Douglasovu produkční funkci platí následující pravidla:

- pokud $a + b = 1$, potom jsou výnosy z rozsahu konstantní;
- pokud $a + b > 1$, potom jsou výnosy z rozsahu rostoucí;
- pokud $a + b < 1$, potom jsou výnosy z rozsahu klesající.

V krátkém období platí tzv. *zákon klesajících mezních výnosů*. Ve výrobním procesu jsou přidávány stále stejné přírůstky variabilního vstupu (ostatní vstupy neměnné), pak od určitého bodu přírůstky celkového produktu klesají, tedy mezní produkt práce MP_L klesá.

Příklady k procvičení 4.3

(1) Je dána krátkodobá produkční funkce $Q = 288L + 60L^2 - 4L^3$.
   (a) Zapište předpis funkce mezního produktu práce MP_L a průměrného produktu práce AP_L.
   (b) Vypočítejte úroveň mezního produktu práce a průměrného produktu práce, zapojíme-li 2 jednotky práce.
   (c) Při jakém objemu variabilního vstupu se začnou projevovat klesající výnosy z rozsahu?

(2) Je dána dlouhodobá produkční funkce $Q = 6K^2L$. Určete hodnotu mezní míry technické substituce, pokud podnik používá 5 jednotek kapitálu a 3 jednotky práce.

(3) Je dána dlouhodobá produkční funkce podniku $Q = 5KL^2$. Mzdová sazba w je na úrovni 150 Kč za hodinu a nájemné r z použitého kapitálu je 30 Kč za hodinu. Zjistěte
   (a) minimální náklady na výrobu 600 jednotek výstupu za hodinu,
   (b) maximální výstup za hodinu, je-li podnik omezen celkovými náklady 700 Kč za hodinu.

(4) Jsou dány následující produkční funkce.
   (a) $Q = 3L^{0,3}K^{0,6}$
   (b) $Q = 3K + 5L$
   (c) $Q = 0,5K^3L^2$

   Určete typ produkční funkce a jejich charakter výnosů z rozsahu.

Kontrolní otázky 4.3

(1) Vysvětlete, co je to produkční funkce.
(2) V čem se liší krátkodobá a dlouhodobá produkční funkce?
(3) Vyjmenujte dva typy dlouhodobé produkční funkce.
(4) Co je to mezní/průměrný produkt práce/kapitálu?
(5) Vysvětlete, co jsou to izokvanty a izokosta. Nakreslete obrázek.
(6) Jak byste vysvětlili pojem mezní míra technické substituce? Uveďte vzorce pro její výpočet?
(7) Vysvětlete, co je to nákladové optimum.
(8) Co rozumíme pod pojmem výnosy z rozsahu a jaké máme typy výnosů z rozsahu?
(9) Jak poznáme výnosy z rozsahu u lineární a také u Cobb-Douglasovy produkční funkce?
(10) Vysvětlete zákon klesajících mezních výnosů.

Problém k zamyšlení 4.3

Promyslete, zda můžeme použít v některých případech pro hledání nákladového optima metodu Lagrangeových multiplikátorů, popř. redukční metodu, a ve kterých. Pokud ano, zkuste si tímto výpočtem ověřit některý příklad hledání nákladového optima v teorii výrobních faktorů.

Matematika v Makroekonomii

KAPITOLA 5

Makroekonomické funkce

Kapitola zaměřena na makroekonomické funkce je odlišná od předchozího zkoumání funkcí mikroekonomických. Předně jsou zde makroekonomické funkce chápany "pouze"jako prostředek popisu nějaké makroekonomické veličiny. Funkce zde nemají žádnou základní úlohu sami o sobě, ale jsou spíše určeny pro další použití např. při zkoumání agregátní makroekonomické rovnováhy. Rovněž je třeba chápat tyto funkce z hlediska "makro"úrovně, tzn. z hlediska zkoumáním ekonomického systému jako celku. Nezabýváme se například jednotlivými dílčími trhy statků a služeb, kde působí jedna konkrétní firma, ale zkoumáme celý (agregátní) trh (všech) statků a služeb napojený na další trhy, např. trh peněz apod. Z těchto důvodů a také proto, že většina těchto funkcí má monotónní charakter, ani není vhodné a nemá velký smysl hledat např. maximum nějaké takové makroekonomické funkce.

Nejdříve se budeme zabývat funkci spotřební a úsporovou, dále funkcí investiční a s ním spojenou akumulací kapitálu. Tyto funkce jsou součástí (celkového) trhu statků a služeb. Na závěr kapitoly se zaměříme na (celkový) trh peněz, respektive finančních aktiv, a tedy na funkci poptávky po penězích a nabídky peněz. Jak jistě víte, v ekonomii existují i další trhy, např. trh práce, nebo trh výrobních faktorů. Nicméně těmito dalšími oblastmi se v této cvičebnici zabývat nebudeme.

5.1. Funkce spotřební a úsporová

Klíčová slova: spotřební funkce, úsporová funkce, důchod, mezní sklon ke spotřebě, autonomní spotřeba, mezní sklon k úsporám, autonomní úspory, bod zvratu

Spotřebu a úspory nebudeme v našem zkoumání oddělovat. Jsou to "spojené nádoby". Známe-li spotřebu, dokážeme určit úspory a naopak. Proto je i spotřební a úsporové funkci vyhrazena jedna společná kapitola.

Spotřební funkce popisuje závislost spotřeby na důchodu (množství peněz, které mají všichni spotřebitelé určeny na spotřebu). Spotřebu značíme písmenem C (z anglického *consumption*) a důchod značíme Y (z anglického *income*). Budeme předpokládat lineární charakter spotřební funkce, tedy

$$C(Y) = c \cdot Y + C_a,$$

kde $C_a \geq 0$ je tzv. *autonomní spotřeba*, což je minimální spotřeba (vždy, i když nemáme žádný důchod musíme něco jíst), a c je tzv. *mezní sklon ke spotřebě*, pro nějž platí $c \in (0,1)$

a

$$c = \frac{dC(Y)}{dY}.$$

Úsporová funkce představuje závislost mezi úspory S (z anglického *saving*) a důchodem Y, tedy $S = S(Y)$. Zmínili jsme, že spotřeba a úspory spolu úzce souvisí. Máme nějaký důchod Y a platí, že co nespotřebujeme na nákup nějakých statků nebo služeb, to uspoříme. Popsáno matematicky

$$S(Y) = Y - C(Y).$$

Použijeme-li lineární vztah pro spotřební funkci, pak dostaneme

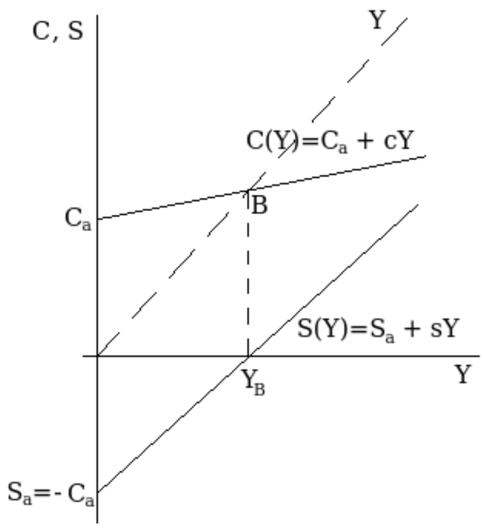
$$S(Y) = Y - (c \cdot Y + C_a) = Y - c \cdot Y - C_a = (1 - c) \cdot Y - C_a = s \cdot Y + S_a,$$

kde $S_a = -C_a \leq 0$ jsou tzv. *autonomní úspory* (nemáme-li nic, nemůžeme nic spořit, naopak si musíme půjčit na autonomní spotřebu, tudíž autonomní úspory jsou de facto dluh) a s je tzv. *mezní sklon k úsporám*, pro který platí $s \in (0, 1)$ a

$$s = \frac{dS(Y)}{dY}.$$

Pozorný čtenář si jistě všiml, že spotřební a úsporová funkce jsou rostoucími funkcemi důchodu, což plyne z ekonomického významu. Čím více máme důchodu, tím více můžeme spotřebovávat nebo spořit.

Na obrázku 5.1 vidíme lineární spotřební a úsporovou funkci a jejich vzájemný vztah.



OBRÁZEK 5.1. Lineární spotřební a úsporová funkce

Bod B je tzv. *bod zvratu* (z angličtiny *break point*). Do bodu B spotřebováváme více než máme důchod, musíme si na základní spotřebu půjčit. Od bodu B spotřebováváme méně než máme důchod, přebytek důchodu dáváme na úspory. Vidíme, že bod zvratu je průsečík křivky Y a křivky spotřební funkce $C(Y)$. Je tedy realizován tehdy, když se spotřeba přesně rovná důchodu, tedy $Y = C(Y)$.

PŘÍKLAD 5.1. V ekonomice byly změřeny následující hodnoty důchodu a spotřeby, viz tabulka 5.1. Za předpokladu linearity těchto funkcí a na základě uvedených údajů určete předpis spotřební a úsporové funkce. Výpočty ověřte pro všechny možnosti výpočtu.

Důchod	Spotřeba
2000	1980
2500	2380
2700	2540
2800	2620

TABULKA 5.1. Naměřené hodnoty důchodu a spotřeby v příkladě 5.1

Řešení.
Nejprve ze zadaných údajů zjistíme mezní sklon ke spotřebě. Víme, že $c = \frac{dC}{DY}$. Pro nespojité hodnoty platí analogický vzorec

$$c = \frac{\triangle C}{\triangle Y} = \frac{C(Y_2) - C(Y_1)}{Y_2 - Y_1}$$

Použijeme vzorec pro první dvě hodnoty důchodu a spotřeby z tabulky.

$$c = \frac{2380 - 1980}{2500 - 2000} = \frac{400}{500} = 0,8$$

Ověříme hodnotu c pro další hodnoty z tabulky.

$$c = \frac{2540 - 2380}{2700 - 2500} = \frac{160}{200} = 0,8$$

$$c = \frac{2620 - 2540}{2800 - 2700} = \frac{80}{100} = 0,8$$

Zformulujeme si úsporovou funkci.

$$C(Y) = 0,8Y + C_a$$

Hledáme C_a. Dosadíme do předpisu pro úsporovou funkci první hodnotu důchodu a spotřeby z tabulky.

$$\begin{aligned} 1980 &= C_a + 0,8 \cdot 2000 \\ 1980 &= C_a + 1600 \\ C_a &= 380 \end{aligned}$$

Ověříme hodnotu C_a pro ostatní hodnoty z tabulky.

$$\begin{aligned} 2380 &= C_a + 0,8 \cdot 2500 & 2540 &= C_a + 0,8 \cdot 2700 & 2620 &= C_a + 0,8 \cdot 2800 \\ 2380 &= C_a + 2000 & 2540 &= C_a + 2160 & 2600 &= C_a + 2240 \\ C_a &= 380 & C_a &= 380 & C_a &= 380 \end{aligned}$$

Spotřební funkce tedy je

$$C(Y) = 0,8Y + 380$$

Nyní nalezneme pomocí spotřební funkce funkci úsporovou dle vzorce $S(Y) = Y - C(Y)$.

$$S(Y) = Y - (0,8Y + 380) = Y - 0,8Y - 380 = 0,2Y - 380$$

Našli předpis pro spotřební funkci $C(Y) = 0,8Y + 380$ a úsporovou funkci $S(Y) = 0,2Y - 380$.

Příklady k procvičení 5.1

(1) Je dána lineární spotřební funkce $C = 300 + 0,7Y$.
   (a) Určete objem autonomní spotřeby a mezní sklon ke spotřebě. Spočítejte úroveň důchodu, který realizuje bod zvratu. Situaci znázorněte rovněž graficky.
   (b) Ze spotřební funkce odvoďte funkci úsporovou. Určete objem autonomních úspor a mezní sklon k úsporám. Situaci znázorněte rovněž graficky.

(2) V ekonomice byly změřeny následující hodnoty důchodu a spotřeby, viz tabulka 5.2. Za předpokladu linearity těchto funkcí a na základě uvedených údajů určete předpis spotřební a úsporové funkce. Výpočty ověřte pro všechny možnosti výpočtu. Situaci znázorněte graficky.

Důchod	Spotřeba
3055	2700
3555	3000
3755	3120
5255	4020

TABULKA 5.2. Naměřené hodnoty Y a C v příkladu k procvičení 5.1 (2)

Kontrolní otázky 5.1

(1) Vysvětlete, co je to spotřební a úsporová funkce. Popište jejich vzájemný vztah.
(2) Co je to autonomní spotřeba a autonomní úspory? Jaký je mezi nimi vztah?
(3) Co je to mezní sklon ke spotřebě a mezní sklon k úsporám? Jaký je mezi nimi vztah?
(4) Co rozumíme v makroekonomii pod pojmem důchod?
(5) Jak byste vysvětlili pojem bod zvratu v kontextu spotřební a úsporové funkce?

Problém k zamyšlení 5.1

Promyslete si různé (i hypotetické) tvary (ne lineární) spotřební funkce a z toho vyplývající tvary funkce úsporové. Analýzu těchto funkcí proveďte početně i graficky.

5.2. Investiční funkce a akumulace kapitálu

Klíčová slova: investiční funkce, úroková míra, autonomní investice, citlivost investic na úrokovou míru, toková a stavová veličina, akumulace kapitálu, investiční tok, kapitálový tok

Investice a s nimi související pojem kapitálu jsou velmi významnou a studovanou veličinou. Budeme je zkoumat ze dvou úhlů pohledů. Nejdříve jako investiční funkci, která je závislá na jiných ekonomických veličinách (např. na úrokové míře). Druhým přístupem bude sledování vývoje investic a rovněž kapitálu v čase. Jak si ukážeme, investice a kapitál jsou dvěma stranami téže mince.

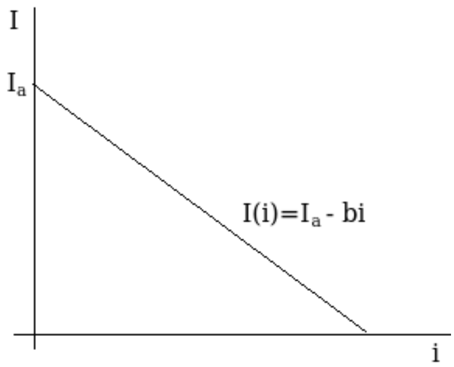
Investiční funkce popisuje závislost investic na dalších veličinách jako jsou úroková míra, agregátní důchod nebo kapitál. Investice značíme písmenem I (z anglického *investment*), kapitál písmenem K (z anglického *capital*) a úrokovou míru písmenem i (z anglického *interest rate*). Matematický zápis investiční funkce tedy je $I = I(i, Y, K)$. My budeme pro jednoduchost předpokládat lineární charakter této funkce a závislost pouze na úrokové míře, tudíž investiční funkce má tvar

$$I(i) = I_a - b \cdot i,$$

kde $I_a > 0$ jsou tzv. *autonomní investice* (investice nezávislé na množství důchodu) a $b > 0$ je tzv. *citlivost investic na úrokovou míru*, pro níž platí

$$b = \frac{dI}{di}.$$

Vidíme, že investiční funkce je klesající funkcí úrokové míry, viz obrázek 5.2. Čím vyšší úroková míra, tím méně investujeme.



OBRÁZEK 5.2. Investiční funkce

Veličiny můžeme chápat dvěma způsoby - jako veličiny tokové nebo stavové.

- Velikost *tokové veličiny* je měřena za nějaké časové období. Toková veličina je popisována funkcí času t.
- Pokud chápeme *veličinu* jako *stavovou*, pak měříme její určité fyzické množství existující v daném časovém okamžiku, tedy funkční hodnotu.

Příkladem tokové veličiny je tzv. *kapitálový tok* $K(t)$ (tok kapitálu v čase) nebo *investiční tok* $I(t)$ (tok investic v čase). Konkrétní hodnota kapitálu $K(t_0)$ v určitém časovém okamžiku t_0 je příkladem stavové veličiny.

Dále se budeme zabývat pojmem *akumulace kapitálu*. Velikost akumulovaného kapitálu je dán rozdílem dvou funkčních hodnot kapitálového toku. Musí být určeno za jaké období chceme velikost akumulovaného kapitálu měřit. Pokud budeme měřit akumulovaný kapitál v časovém období od času t_1 do času t_2 (logicky $t_1 < t_2$, protože se jedná o čas), pak můžeme velikost akumulovaného kapitálu vypočítat dle vzorce

$$\triangle K = K(t_2) - K(t_1).$$

V praxi ovšem neznáme kapitálový tok, ale spíše tok investiční. Investiční tok $I(t)$ můžeme chápat jako změnu kapitálového toku v čase. Jinými slovy je kapitálový tok $K(t)$ primitivní funkcí toku investičního $I(t)$, tedy

$$I(t) = \frac{dK}{dt},$$

z čehož nám vyplývá vztah

$$K(t) = \int I(t)dt.$$

Pak velikost akumulovaného kapitálu měřeného v časovém období od časového okamžiku t_1 do okamžiku t_2 je dán určitým integrálem

$$\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt = [K(t)]_{t_1}^{t_2} = K(t_2) - K(t_1) = \triangle K.$$

PŘÍKLAD 5.2. Je dána funkce investičního toku $I(t) = 6t^{\frac{1}{5}}$.

(a) Určete funkci kapitálového toku za předpokladu počáteční hodnoty kapitálového toku $K(0) = 2$.
(b) Určete velikost akumulovaného kapitálu za časové období od $t_1 = 0$ do $t_2 = 1$.
(c) Ověřte správnost určení funkce kapitálového toku zpětným převodem na tok investiční.
(d) Graficky znázorněte velikost akumulovaného kapitálu pomocí grafu investičního toku a rovněž kapitálového toku.

Řešení.

(a) Použijeme vzorec $K(t) = \int I(t)dt$ pro nalezení funkce kapitálového toku.

$$K(t) = \int I(t)dt = \int 6t^{\frac{1}{5}}dt = 6\int t^{\frac{1}{5}}dt = 6\frac{t^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + c = 6\frac{5}{6}t^{\frac{6}{5}} + c = 5t^{\frac{6}{5}} + c$$

Konkrétní hodnotu integrační konstanty $c \in \mathbb{R}$ dostaneme dosazením $K(0) = 2$ do získaného předpisu. Tedy $5 \cdot 0^{\frac{6}{5}} + c = 2$, z čehož plyne $c = 2$. Funkce kapitálového toku je $K(t) = 5t^{\frac{6}{5}} + 2$.

(b) Určíme velikost akumulovaného kapitálu dle vzorce $\triangle K = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$.

$$\triangle K = \int_0^1 6t^{\frac{1}{5}} dt = [5t^{\frac{6}{5}}]_0^1 = 5 - 0 = 5$$

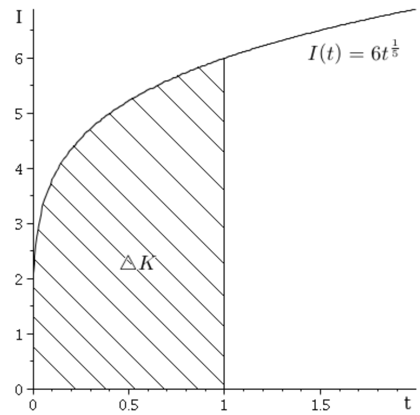
Můžeme velikost akumulovaného kapitálu vypočítat také dle vzorce $\triangle K = K(t_2) - K(t_1)$.

$$\triangle K = K(1) - K(0) = (5 \cdot 1^{\frac{6}{5}} + 2) - (5 \cdot 0^{\frac{6}{5}} + 2) = 5 + 2 - 2 = 5$$

(c) Nyní ověříme správnost určení funkce kapitálového toku zpětným převodem na tok investiční dle $I(t) = \frac{dK(t)}{dt}$.

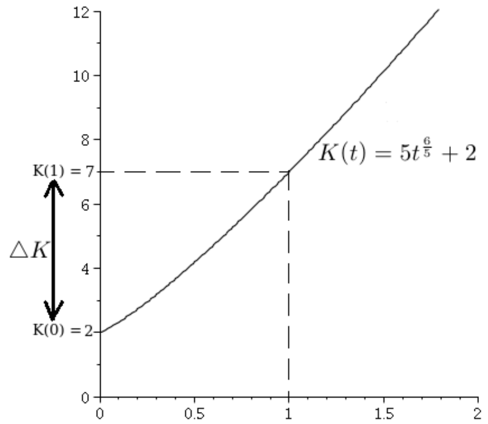
$$I(t) == \frac{d(5t^{\frac{6}{5}} + 2)}{dt} = 5 \cdot \frac{6}{5} \cdot t^{\frac{1}{5}} = 6t^{\frac{1}{5}}$$

(d) Znázorníme velikost akumulovaného kapitálu pomocí grafu investičního toku na obrázku 5.3.



Obrázek 5.3. Graf funkce invest. toku a velikost akum. kapitálu v př. 5.2

Pomocí grafu investičního toku zobrazujeme velikost akumulovaného kapitálu jako obsah plochy pod grafem mezi $t = 0$ a $t = 1$ (určitý integrál).
Znázorníme velikost akumulovaného kapitálu pomocí grafu kapitálového toku na obrázku 5.4.
Pomocí grafu kapitálového toku zobrazujeme velikost akumulovaného kapitálu jako rozdíl funkčních hodnot $K(1) - K(0)$.



OBRÁZEK 5.4. Graf funkce kapit. toku a velikost akum. kapitálu v př. 5.2

Příklady k procvičení 5.2

(1) Je dána lineární investiční funkce $I(i) = 375 - 25i$.
  (a) Určete objem autonomních investic a citlivost investic na úrokovou míru. Nakreslete graf investiční funkce.
  (b) Graficky znázorněte, jak se změní graf investiční funkce, když se citlivost investic na úrokovou míru sníží na 15.
  (c) Graficky znázorněte, jak se změní graf investiční funkce (oproti původnímu), když se autonomní investice sníží na 300.

(2) Je dána funkce kapitálového toku $K(t) = 3t^5 + t^3 + 2$. Určete velikost akumulovaného kapitálu za časové období od $t_1 = 1$ do $t_2 = 2$. Situaci znázorněte graficky.

(3) Je dána funkce investičního toku $I(t) = 7t^3 + 3t^2$.
  (a) Určete funkci kapitálového toku za předpokladu počáteční hodnoty kapitálového toku $K(0) = 31$.
  (b) Určete velikost akumulovaného kapitálu za časové období od $t_1 = 0$ do $t_2 = 1$.
  (c) Ověřte správnost určení funkce kapitálového toku zpětným převodem na tok investiční.
  (d) Graficky znázorněte velikost akumulovaného kapitálu pomocí grafu investičního toku a rovněž kapitálového toku.

Kontrolní otázky 5.2

(1) Vysvětlete pojmy investiční funkce, autonomní investice a citlivost investic na úrokovou míru.
(2) Jak se liší tokové a stavové veličiny? Uveďte příklad.
(3) Co je to investiční a kapitálový tok?
(4) Co znamená pojem akumulace kapitálu a jak ji můžeme spočítat?

Problém k zamyšlení 5.2
Promyslete si ekonomickou interpretaci průběhu investiční funkce - je klesající v závislosti na úrokové míře. Jinými slovy se zkuste zamyslet nad tím, proč je průběh této funkce právě takový (z ekonomického pohledu)?

5.3. Funkce poptávky po penězích a nabídky peněz

Klíčová slova: funkce poptávky po penězích, citlivost poptávky po penězích na důchod, citlivost poptávky po penězích na úrokovou míru, exogenní nabídka peněz, endogenní nabídka peněz

V této krátké kapitole se přeneseme na trh peněz. Zaměříme se na dvě základní veličiny na tomto trhu a to na funkci poptávky po penězích a nabídky peněz.

Funkce poptávky po penězích popisuje závislost poptávky po penězích na dvou proměnných, a to na důchodu Y a úrokové míře i. Poptávku po penězích značíme písmenem L. Funkci poptávky po penězích můžeme tudíž zapsat $L = L(Y, i)$. Budeme dále předpokládat linearitu této funkce, tedy

$$L(Y, i) = kY - hi,$$

kde $k > 0$ představuje *citlivost poptávky po penězích na důchod*, pro níž platí

$$k = \frac{\partial L(Y, i)}{\partial Y}$$

a $h > 0$ potom *citlivost poptávky po penězích na úrokovou míru*, pro níž platí

$$h = \frac{\partial L(Y, i)}{\partial i}.$$

Existují dva přístupy k nabídce peněz - endogenní a exogenní.

- *Exogenní nabídka peněz* je reprezentována určitým množstvím peněz v oběhu řízeným centrální bankou.
- V *endogenním* přístupu k *nabídce peněz* se říká, že peníze jsou v ekonomice generovány tzv. úvěrovou kreací.

My se ve svém zkoumání přikloníme k exogennímu přístupu. *Nabídka peněz* je potom určena nějakou konstantou $M > 0$ představující množství peněz v ekonomice.

PŘÍKLAD 5.3. Je dána lineární funkce poptávky po penězích $L(Y, i) = 2Y - 30i$. Množství peněz v ekonomice je 350 miliard Kč.

(a) Určete citlivost poptávky po penězích na důchod a citlivost poptávky po penězích na úrokovou míru.
(b) Za předpokladu rovnováhy na trhu peněz a úrokové míry na úrovni 5% určete úroveň důchodu.

Řešení.

(a) Citlivost poptávky po penězích na důchod je $k = 2$ a citlivost poptávky po penězích úrokovou míru je $h = 30$.

(b) Předpokládáme rovnováhu na trhu peněz, tudíž musíme porovnat nabídku po penězích s poptávkou po penězích $L(Y, i) = M$.

$$2Y - 30i = 350$$

Dále dosadíme do tohoto vztahu hodnotu úrokové míry $i = 5\%$.

$$\begin{aligned} 2Y - 30 \cdot 5 &= 350 \\ 2Y - 150 &= 350 \\ 2Y &= 500 \\ Y &= 250 \end{aligned}$$

Úroveň agregátního důchodu je 250 miliard Kč.

Příklady k procvičení 5.3

(1) Je dána lineární funkce poptávky po penězích $L(Y, i) = 4Y - 37i$. Množství peněz v ekonomice je 444 k miliard Kč.
 (a) Určete citlivost poptávky po penězích na důchod a citlivost poptávky po penězích na úrokovou míru.
 (b) Za předpokladu rovnováhy na trhu peněz a důchodu na úrovni 222 miliard Kč určete úroveň úrokové míry.

(2) Je dána lineární funkce poptávky po penězích $L(Y, i) = 5Y - 21i$. Množství peněz v ekonomice je 321 miliard Kč.
 (a) Určete citlivost poptávky po penězích na důchod a citlivost poptávky po penězích na úrokovou míru.
 (b) Za předpokladu rovnováhy na trhu peněz a úrokové míry na úrovni 9% určete úroveň důchodu.

Kontrolní otázky 5.3

(1) Vysvětlete pojmy funkce poptávky po penězích, citlivost poptávky po penězích na důchod, citlivost poptávky po penězích na úrokovou míru.
(2) Jaký je rozdíl mezi exogenní a endogenní nabídkou peněz?
(3) Čím je v ekonomice reprezentována exogenní nabídka peněz?

Problém k zamyšlení 5.3

Promyslete si, jak v ekonomice funguje endogenní nabídka peněz, jakým způsobem peníze v ekonomice při endogenní nabídce mohou vznikat apod. Můžete se inspirovat literaturou [**17**].

KAPITOLA 6

Multiplikátor a důchodová analýza

Multiplikátor a důchodová analýza, na první pohled dvě odlišná témata, která jsou však pouze jiným pohledem na tutéž problematiku. Zkusíme si vysvětlit, o co tedy jde. Mohlo by se zdát, že o kolik výdajů (investice) více do ekonomiky "nasypeme", o tolik se nám zvýší produkt (důchod), resp. HDP (HNP). Ovšem není tomu přesně tak. Pravda je, že výsledný produkt bude o něco vyšší. Důvodem je tzv. multiplikační efekt (účinek). Multiplikátor je tudíž číslo, zpravidla větší než jedna, kterým musíme vynásobit výdaje, abychom dostali výslednou úroveň produktu. Tento princip platí i obráceně, při snižování výdajů. Zaměříme-li se hlavně na toto "číslo", pak se zabýváme multiplikátorem. Bude-li nás více zajímat rovnovážná úroveň důchodu a jeho změna způsobená změnou těchto výdajů, pak provádíme důchodovou analýzu.

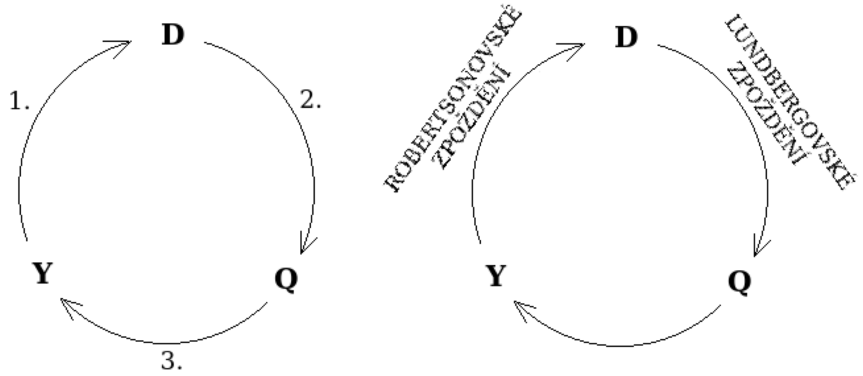
Kapitola je rozdělena do dvou částí. První se zabývá statickým multiplikátorem, tedy multiplikátorem, kdy se důchod v čase nemění. Další část je zaměřena na dynamický model multiplikátoru, kde se předpokládá změna důchodu v čase a předpokládají se různé typy zpoždění.

Pro lepší orientaci a pochopení dvou podkapitol si zde v této úvodní části ještě vysvětlíme, jak důchod v ekonomice "proudí", čili tzv. koloběh důchodu v ekonomice. Dále si uvedeme a popíšeme různé typy zpoždění vznikající v ekonomice. Rovněž si osvětlíme, proč můžeme někdy ztotožňovat pojmy produktu, důchodu a HDP (resp. HNP).

Klíčová slova: koloběh důchodu v ekonomice, Robertsonovské zpoždění, Lundbergovské zpoždění, národní důchod, národní produkt, nezamýšlené úspory, nezamýšlené investice

Princip *koloběhu důchodu v ekonomice* z hlediska "mikro"úrovně je následující.

(1) Důchod Y dává vzniknout poptávce D (máme-li za co, můžeme něco poptávat, resp. nakupovat), vyplývá to z očekávání výdajů z důchodu domácnostmi, státem, firmami.
(2) Poptávka D dává vznik produkci Q (nabízející chtějí uspokojit poptávku, tudíž vyrábí), její velikost je dána sumou statků a služeb vyprodukovaných firmami k uspokojení poptávky.
(3) Z výnosu produkce Q dostávají podíl výrobní faktory (pracovní síla, kapitál atd.), který tvoří důchod Y.



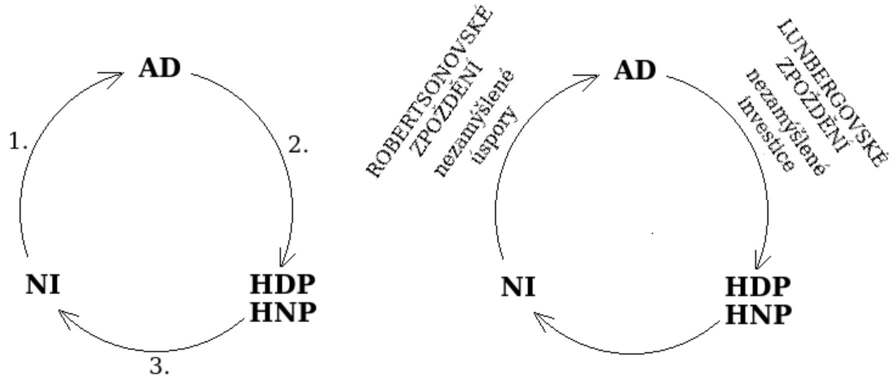
OBRÁZEK 6.1. Koloběh důchodu a zpoždění v ekonomice z "mikro"pohledu

Na obrázku 6.1 vidíme, jak důchod Y v ekonomice "proudí"a "přetváří se"na poptávku D, pak na produkci Q a zpět na důchod Y. Směr toku je znázorněn šipkami. Rovněž jsou na obrázku znázorněny možná zpoždění vyskytující se v ekonomice.

(1) Tzv. *Robertsonovské zpoždění* je zpoždění mezi důchodem a jeho vydáním, tedy poptávkou, tzn. poptávka D se zpožďuje za důchodem Y. Jedná se o časové období mezi příjmem důchodu přes očekávání výdajů po skutečné nákupy. Vzniká na základě očekávání domácností a jiných vydavatelů důchodu.
(2) Tzv. *Lundbergovské zpoždění* je zpoždění mezi poptávkou D a produkcí Q, tedy mezi vydáním důchodu a výrobou, tzn. produkce Q se zpožďuje za poptávkou D. Jedná se o časové období potřebné k přeměně poptávky v novou produkci. Vzniká na základě očekávání podnikatelů.
(3) Posledním zpožděním může být zpoždění mezi příjmy podnikatelů z produkce Q a platbou výrobním faktorům (práce, kapitál atd.) ve formě důchodu Y. Toto zpoždění není důležité a často se předpokládá, že neexistuje, proto někdy v našich modelech podle potřeby zaměňujeme nebo ztotožňujeme pojmy důchodu a produkce.

Prakticky tedy máme dvě veličiny - poptávku D a důchod Y. Při existenci jakéhokoliv zpoždění, mají v každém okamžiku tyto veličiny rozdílné hodnoty.

Koloběh důchodu z pohledu národohospodářské, resp. "makro"úrovně je zobrazen na obrázku 6.2. Místo poptávky D je zde agregátní (celková) poptávka AD, místo důchodu Y pak tzv. národní důchod NI a místo produkce Q pak národní produkt, neboli hrubý domácí (národní) produkt HDP (HNP). *Agregátní (celková) poptávka* představuje národní výdaje, tedy sumu všech nákupů statků a služeb. *Národní důchod* je úhrn všech důchodů a *národní produkt* pak úhrnná produkce všech druhů statků a služeb.



OBRÁZEK 6.2. Koloběh důchodu a zpoždění v ekonomice z "makro"pohledu

Protože všechny tyto tři veličiny jsou měřeny za nějaké časové období (nejčastěji za rok), jsou si v každém takovém období rovny (plyne z jejich definice). Robertsonovské a Lundbergovské zpoždění se pak projevuje jiným způsobem. Robertsonovské zpoždění se projevuje tzv. *nezamýšlenými úsporami*, tedy úsporami, které nebyly plánovány, a Lundbegovské zpoždění se pak projevuje jako tzv. *nezamýšlené investice*, tedy investice, které nebyly plánovány. Nezamýšlené úspory a investice mohou být i negativního charakteru.

Vidíme, že můžeme pojmy důchodu, produkce i HDP (HNP) ztotožňovat, resp. zaměňovat dle potřeby a situace dané např. konkrétní ekonomickou interpretací. Vždy ale musíme znát ekonomickou podstatu, abychom tyto pojmy nezaměnili i v případě, kdy to možné není.

Kontrolní otázky 6.0

(1) Popište vlastními slovy koloběh důchodu v ekonomice z pohledu "mikro"úrovně.
(2) Popište vlastními slovy koloběh důchodu v ekonomice z pohledu "makro"úrovně.
(3) Popište různá zpoždění v ekonomice a vysvětlete, jak vznikají. Čím se projevují tyto zpoždění z pohledu "mikro"a čím z pohledu "makro"úrovně?
(4) Proč můžeme v některých modelech ztotožňovat, resp. zaměňovat pojmy produkce, důchodu a HDP (HNP)?

Jak se spočítá rovnovážná úroveň důchodu, jak vypadají modely důchodové analýzy, resp. multiplikátoru v případě existence i neexistence nějakého zpoždění je součástí dalších dvou dílčích podkapitol.

6.1. Statický multiplikátor a důchodová analýza

Klíčová slova: multiplikátor, autonomní výdaje, indukované výdaje, dvousektorová, třísektorová a čtyřsektorová ekonomika, uzavřená a otevřená ekonomika, spotřeba, investice, jednoduchý výdajový multiplikátor, disponibilní důchod, daně, transfery, daňová sazba, vládní výdaje, jednoduchý výdajový multiplikátor s daňovou sazbou, vývozy, dovozy, mezní sklon k dovozu, čisté vývozy, jednoduchý multiplikátor otevřené ekonomiky

Problematika multiplikátoru se týká celkového trhu statků a služeb. *Multiplikátor* chápeme jako číslo, kterým musíme vynásobit změnu celkových výdajů, abychom dostali výslednou změnu celkového produktu (důchodu). Celkové výdaje dělíme na dva typy - autonomní a indukované.

- *Autonomní výdaje* jsou výdaje nezávislé na důchodu.
- *Indukované výdaje* jsou výdaje odvozené, vyvolané důchodem.

Existuje dvou-, tří- a čtyřsektorový model multiplikátoru, jejichž cílem je rovnováha na celkovém trhu statků a služeb a zvyšování životní úrovně.

- V *dvousektorové ekonomice* existují pouze dva druhy subjektů - domácnosti a firmy (podniky).
- V *třísektorové ekonomice* působí tři druhy subjektů - domácnosti, firmy a vláda. Čili třísektorová ekonomika je ekonomika dvousektorová navíc s vládní aktivitou.
- Ve *čtyřsektorové ekonomice* jsou čtyři typy ekonomické aktivity - aktivity domácností, firem, vlády a zahraniční obchod. Čili čtyřsektorová ekonomika je ekonomika třísektorová navíc se zahraničním obchodem.

První dvě ekonomiky (bez zahraničního obchodu) nazýváme též *uzavřenými ekonomikami*. Čtyřsektorová ekonomika bývá rovněž nazývána *otevřenou ekonomikou* (kvůli zahraničnímu obchodu).

Rovnováha na trhu statků a služeb je dána rovností agregátní (celkové) poptávky AD a agregátní (celkové) nabídky AS. V těchto modelech multiplikátoru se standardně předpokládá (a i my budeme toto předpokládat) poptávková orientace, tzn. že nabídka se plně přizpůsobuje poptávce. Z tohoto předpokladu vyplývá, že agregátní nabídka musí pokrýt celou poptávanou produkci, tj. že celý agregátní důchod Y poptávajících jde na tuto produkci. Můžeme tedy psát

$$AS = Y.$$

Agregátní poptávka je dána různými výdaji (domácností, firem, vlády, obchodníků v zahraničním obchodu) a liší se dle typu ekonomiky (dvou-, tří- čtyřsektor).

Ve dvousektorové ekonomice je tato agregátní poptávka dána *spotřebou* C, která reprezentuje sektor domácností, a *investicemi* I, které reprezentují sektor firem (podniků), tudíž

$$AD = C + I.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu lineární vztah pro spotřební funkci $C(Y) = cY + C_a$ (kde $c \in (0, 1)$ je mezní sklon ke spotřebě a C_a je autonomní spotřeba) a předpokládáme-li investice "pouze"autonomní I_a (zatím neuvažujeme investice indukované úrokovou mírou, jak tomu bylo v kapitole 5.2, protože se zatím zabýváme pouze trhem statků a služeb, nikoliv např. trhem peněžním), pak je agregátní poptávka dána rovnicí

$$AD = cY + C_a + I_a.$$

Porovnáme agregátní nabídku s agregátní poptávkou a vyjádříme Y, čímž získáme rovnovážnou úroveň důchodu Y^*.

$$\begin{aligned} Y &= cY + C_a + I_a \\ Y - cY &= C_a + I_a \\ Y^* &= \tfrac{1}{1-c}(C_a + I_a) \end{aligned}$$

Provedeme označení

$$\alpha = \frac{1}{1-c}$$

a tento výraz nazveme *jednoduchým výdajovým multiplikátorem* a dále označíme

$$A = C_a + I_a$$

a tento výraz souhrnně nazýváme autonomními výdaji. Předchozí vztah pak vypadá následovně

$$Y^* = \alpha \cdot A.$$

Z toho, že $c \in (0, 1)$, vyplývá

$$\alpha > 1.$$

Nyní si matematicky znázorníme multiplikační účinek. Změníme-li autonomní výdaje $\triangle A$, pak se nám agregátní důchod změní $\alpha \cdot \triangle A$ (vyplývá ze vzorce $Y = \alpha \cdot A$), tedy platí

$$\triangle Y = \alpha \cdot \triangle A.$$

PŘÍKLAD 6.1. Ve dvousektorové ekonomice byly zjištěny údaje o celkové spotřebě, investicích a úrovni důchodu (HDP, HNP) uvedené v následující tabulce 6.1 (v mld. peněžních jednotek).

Úroveň důchodu	Úroveň spotřeby	Úroveň investic
3200	2800	200
2900	2600	200
2600	2400	200
2300	2200	200
2000	2000	200

TABULKA 6.1. Zadané úrovně spotřeby, investic a důchodu v příkladě 6.1

(a) Doplňte tabulku o sloupec, kde budou uvedené úrovně celkových výdajů, a vyznačte v tabulce tendenci trhu statků a služeb k dosahování rovnovážné úrovně.
(b) Po změně úrovně investic na 400 mld. peněžních jednotek určete, o kolik se změní agregátní důchod Y. Je rozdíl v důchodu větší či menší než změna investic?

(c) O kolik klesne agregátní důchod, když klesnou investice z 200 na 100 mld. peněžních jednotek?

Řešení.

(a) Doplníme tabulku o sloupec celkových výdajů, což je součet úrovně investic a spotřeby, viz následující tabulka 6.2.

Úroveň důchodu	Úroveň spotřeby	Úroveň investic	Celkové výdaje
3200	2800	200	3000
2900	2600	200	2800
2600	2400	200	**2600**
2300	2200	200	2400
2000	2000	200	2200

TABULKA 6.2. Doplněna tabulka o sloupec celkových výdajů v příkladě 6.1

Trh je v rovnováze při údajích uvedených v třetím řádku tabulky, úroveň důchodu se rovná celkovým výdajům.

(b) Abychom dokázali určit změnu důchodu v závislosti na uvedené změně investic, musíme nejdřív spočítat multiplikátor. Použijeme vzorec $\alpha = \frac{1}{1-c}$ pro dvousektorovou ekonomiku, proto potřebujeme nejdříve najít hodnotu mezního sklonu ke spotřebě c.

$$c = \frac{\triangle C}{\triangle Y} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$$

Nyní vypočítáme multiplikátor.

$$\alpha = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$$

Změna investic je $\triangle I = 400 - 200 = 200$ a spotřeba zůstala na stejné úrovni, tedy změna autonomních výdajů je $\triangle A = \triangle I = 200$. Spočítáme změnu důchodu.

$$\triangle Y = \alpha \triangle A = 3 \cdot 200 = 600$$

Důchod se v důsledku zvýšení investic o 200 mld. peněžních jednotek zvýšil o 600 mld. peněžních jednotek. Zvýšení důchodu je větší než zvýšení investic.

(c) Jestliže se investice sníží z 200 na 100 v mld. peněžních jednotek, pak je změna investic $\triangle I = -100$. Spotřeba se nezměnila, a tedy změna celkových výdajů je $\triangle A = \triangle I = -100$. Spočítáme změnu důchodu.

$$\triangle Y = \alpha \triangle A = 3 \cdot (-100) = -300$$

Důchod se v důsledku snížení investic o 100 mld. peněžních jednotek snížil o 300 mld. peněžních jednotek.

Situace v třísektorové ekonomice je trochu složitější. Kromě třetího sektoru (vládní aktivity), které v modelu navíc uvažujeme, nesmíme zapomenout na tzv. *disponibilní důchod* Y_D, který mají k dispozici poptávající. Ten se od agregátního důchodu Y liší o poplatky, které musí poptávající zaplatit státu (daně), nebo které od státu získají (transfery). Disponibilní důchod Y_D je agregátní důchod Y snížen o *daně* TA (z anglického *taxes*) a zvýšen o *transfery* TR (z anglického *transfer*), což jsou např. sociální dávky, starobní důchod, podpora v nezaměstnanosti atd., vyjádřeno matematicky

$$Y_D = Y - TA + TR.$$

Předpokládáme, že daně jsou lineární rostoucí funkcí důchodu (čím vyšší důchod, tím vyšší daně) $TA = tY + TA_a$, kde t představuje *daňovou sazbu* a TA_a autonomní daně. Dále předpokládáme "pouze"autonomní transfery TR_a, tedy nezávislé na důchodu. Disponibilní důchod je pak

$$Y_D = Y - tY - TA_a + TR_a.$$

Agregátní poptávka je dána stejně jako v dvousektorovém modelu spotřebou C, autonomními investicemi I_a a navíc (autonomními) *vládními výdaji* G_a (z anglického *government*). Poptávající, resp. spotřebitelé, mají k dispozici uváděný disponibilní důchod Y_D, tedy máme lineární spotřební funkci $C(Y_D) = cY_D + C_a$. Potom agregátní poptávka je

$$\begin{aligned} AD &= C(Y_D) + I_a + G_a \\ AD &= cY_D + C_a + I_a + G_a \\ AD &= c(Y - tY - TA_a + TR_a) + C_a + I_a + G_a \\ AD &= c(1-t)Y + c(TR_a - TA_a) + C_a + I_a + G_a \end{aligned}$$

Dále porovnáme agregátní nabídku $AS = Y$ s agregátní poptávkou $AD = c(1-t)Y + c(TR_a - TA_a) + C_a + I_a + G_a$ a vyjádříme Y, čímž získáme rovnovážnou úroveň důchodu Y^*.

$$\begin{aligned} Y &= c(1-t)Y + c(TR_a - TA_a) + C_a + I_a + G_a \\ Y - c(1-t)Y &= c(TR_a - TA_a) + C_a + I_a + G_a \\ Y^* &= \tfrac{1}{1-c(1-t)}(c(TR_a - TA_a) + C_a + I_a + G_a) \end{aligned}$$

Nyní označíme

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{1 - c(1-t)}$$

a tento výraz nazýváme *jednoduchým výdajovým multiplikátorem s daňovou sazbou*. Zbytek z rovnice jsou autonomní výdaje a značíme je

$$\bar{A} = c(TR_a - TA_a) + C_a + I_a + G_a.$$

Předchozí vztah pak vypadá následovně

$$Y^* = \bar{\alpha} \cdot \bar{A}.$$

Ze vzorce tohoto multiplikátoru vyplývá, že

$$\bar{\alpha} < \alpha.$$

Multiplikační účinek zapíšeme obdobně jako pro model multiplikátoru v dvousektorové ekonomice,

$$\triangle Y = \bar{\alpha} \cdot \triangle \bar{A}.$$

PŘÍKLAD 6.2. V uzavřené třísektorové ekonomice je sektor domácností reprezentován autonomní spotřebou, která je na úrovni $C_a = 300$ mld. Kč, a mezním sklonem ke spotřebě, který je $c = 0,8$. Sektor firem je reprezentován autonomními investicemi, které jsou na úrovni $I_a = 400$ mld. Kč, a vládní sektor vykazuje tyto aktivity - autonomní daně na úrovni $TA_a = 100$ mld. Kč, autonomní transfery na úrovni $TR_a = 125$ mld. Kč, daňová sazba na úrovni $t = 0,25$ a vládní výdaje na úrovni $G_a = 328$ mld. Kč.

(a) Jaká je úroveň rovnovážného důchodu?
(b) Jaká je úroveň celkových daní?
(c) Jaká je úroveň disponibilního důchodu?
(d) Jaká je úroveň celkové spotřeby?
(e) Jak se změní agregátní důchod (HDP, HNP), když vláda sníží autonomní daně na 95 mld. Kč (při jinak stejných údajích?

Řešení.

(a) Pro výpočet rovnovážného důchodu využijeme vzorce $Y = \bar{\alpha} \cdot \bar{A}$, Nejdříve spočítáme multiplikátor.

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{1 - c(1-t)} = \frac{1}{1 - 0,8(1 - 0,25)} = 2,5$$

Dále vypočítáme autonomní výdaje.

$$\bar{A} = c(TR_a - TA_a) + C_a + I_a + G_a$$

$$\bar{A} = 0,8(125 - 100) + 300 + 400 + 328 = 1048$$

Celkový důchod pak je

$$Y = \bar{\alpha} \cdot \bar{A} = 2,5 \cdot 1048 = 2620$$

Úroveň rovnovážného důchodu je 2620 mld. Kč.

(b) Celkové daně vypočítáme dle vzorce $TA = tY + TA_a$.

$$TA = 0,25 \cdot 2620 + 100 = 755$$

Úroveň celkových daní je 755 mld. Kč

(c) Disponibilní důchod získáme dle vzorce $Y_D = Y - TA + TR$. Celkové daně TA jsme vypočítali v předchozím bodu a transfery jsou "pouze"autonomní $TR_a = 125$.

$$Y_D = Y - TA + TR_a = 2620 - 755 + 125 = 1990$$

Úroveň disponibilního důchodu je 1990 mld. Kč.

(d) Celkovou spotřebu spočítáme dle $C(Y_D) = cY_D + C_a$.

$$C(1990) = 0,8 \cdot 1990 + 300 = 1892$$

Celková spotřeba je 1892 mld. Kč.

(e) Změna autonomních daní $\triangle TA_a = -5$. Změnu agregátního důchodu vypočítáme dle $\triangle Y = \bar{\alpha} \triangle \bar{A}$. Abychom mohli zjistit změnu autonomních výdajů, musíme se podívat, jaké složky autonomní výdaje obsahují, a které z nich se změnili. Autonomní výdaje jsou $\bar{A} = c(TR_a - TA_a) + C_a + I_a + G_a$ a jejich změnu zjistíme podle vzorce $\triangle \bar{A} = c(\triangle TR_a - \triangle TA_a) + \triangle C_a + \triangle I_a + \triangle G_a$. Vzhledem k tomu, že se změnili pouze autonomní daně, pak změna celkových autonomních výdajů je $\triangle\bar{A} = c(-\triangle TA_a)$.

$$\triangle\bar{A} = 0.8 \cdot (-(-5)) = 4$$

Potom změna celkového důchodu je

$$\triangle Y = \bar{\alpha} \triangle \bar{A} = 2,5 \cdot 4 = 10$$

Při snížení autonomních daní na 95 mld. Kč se agregátní důchod zvýší o 10 mld. Kč, čili na 2630 mld. Kč.

Ve čtyřsektorové ekonomice k předchozím sektorům a veličinám přibývá navíc sektor zahraničního obchod, resp. *vývozy* a *dovozy*. Vývozy značíme písmenem X (z anglického *eXports*) a předpokládáme je pouze autonomní X_a. Dovozy potom značíme M (z anglického *iMports*) a předpokládáme, že jsou lineární rostoucí funkcí důchodu (čím vyšší důchod, tím vyšší dovoz) $M(Y) = mY + M_a$, kde m je tzv. *mezní sklon k dovozu*, pro který platí $m \in (0, 1)$ a M_a autonomní dovozy. Veličinu, kterou budeme do našeho čtyřsektorového modelu zařazovat, jsou tzv. *čisté vývozy*, značíme NX (z anglického *net eXports*), což je rozdíl vývozu a dovozu, tedy

$$NX = X - M.$$

Agregátní poptávka je potom dána

$$\begin{aligned} AD &= C(Y_D) + I_a + G_a + NX \\ AD &= C(Y_D) + I_a + G_a + X - M \\ AD &= c(1-t)Y + c(TR_a - TA_a) + C_a + I_a + G_a + X_a - mY - M_a \\ AD &= c(1-t)Y - mY + c(TR_a - TA_a) + C_a + I_a + G_a + X_a - M_a \end{aligned}$$

Dále porovnáme agregátní nabídku, pro kterou platí $AS = Y$, s agregátní poptávkou, pro kterou platí $AD = (c(1-t) - m)Y + c(TR_a - TA_a) + C_a + I_a + G_a + X_a - M_a$.

$$Y = (c(1-t) - m)Y + c(TR_a - TA_a) + C_a + I_a + G_a + X_a - M_a$$

Vyjádříme Y, čímž získáme rovnovážnou úroveň důchodu Y^*.

$$Y - c(1-t)Y + mY = c(TR_a - TA_a) + C_a + I_a + G_a + X_a - M_a$$

$$Y^* = \frac{1}{1 - c(1-t) + m} \cdot (c(TR_a - TA_a) + C_a + I_a + G_a + X_a - M_a)$$

Dále označíme

$$\bar{\bar{\alpha}} = \frac{1}{1 - c(1-t) + m}$$

a tento výraz nazýváme *jednoduchým multiplikátorem otevřené ekonomiky*. Zbytek ze získaného vztahu jsou autonomní výdaje a značíme je

$$\bar{\bar{A}} = c(TR_a - TA_a) + C_a + I_a + G_a + X_a - M_a.$$

Předchozí rovnice pak vypadá následovně

$$Y^* = \bar{\bar{\alpha}} \cdot \bar{\bar{A}}.$$

Ze vzorce tohoto multiplikátoru vyplývá, že

$$\bar{\bar{\alpha}} < \bar{\alpha} < \alpha.$$

Multiplikační účinek zapíšeme obdobně jako pro dvousektorovou nebo třísektorvou ekonomiku,

$$\triangle Y = \bar{\bar{\alpha}} \cdot \triangle \bar{\bar{A}}.$$

Příklad 6.3. Čtyřsektorová ekonomika je charakterizována následujícími údaji - mezní sklon ke spotřebě $c = 0,6$; mezní sklon k dovozu $m = 0,1$ a daňová sazba $t = 0,3$. Jak se změní čisté vývozy NX v důsledku zvýšení vládních výdajů G_a o 100 mld. Kč?
Řešení.
Protože čisté vývozy vypočítáme dle vzorce $NX = X_a - M_a - mY$, změní se v důsledku změny důchodu $\triangle Y$, změny autonomních vývozů $\triangle X_a$ a změny autonomních dovozů $\triangle M_a$. V našem případě při změně vládních výdajů se změní pouze důchod, ostatní zůstanou nezměněny. Tedy změnu čistých vývozů vypočítáme dle vzorce $\triangle NX = \triangle X_a - \triangle M_a - m\triangle Y$, kde $\triangle X_a = 0$ a $\triangle M_a = 0$. Pak změna čistého vývozu bude zjištěna dle $\triangle NX = -m\triangle Y$. Musíme vypočítat změnu důchodu $\triangle Y = \bar{\bar{\alpha}} \cdot \triangle \bar{\bar{A}}$. Nejdříve spočítáme multiplikátor.

$$\bar{\bar{\alpha}} = \frac{1}{1 - c(1-t) + m} = \frac{1}{1 - 0,6(1-0,3) + 0,1} = 1,47$$

Dále najdeme změnu autonomních výdajů.

$$\triangle \bar{\bar{A}} = c(\triangle TR_a - \triangle TA_a) + \triangle C_a + \triangle I_a + \triangle G_a + \triangle X_a - \triangle M_a$$

$$\triangle \bar{\bar{A}} = 0,6(0-0) + 0 + 0 + 100 + 0 - 0 = 100$$

Změna důchodu je potom

$$\triangle Y = \bar{\bar{\alpha}} \cdot \triangle \bar{\bar{A}} = 1,47 \cdot 100 = 147$$

Nakonec vypočítáme změnu čistých vývozů dle $\triangle NX = -m \triangle Y$

$$\triangle NX = -0,1 \cdot 147 = -14,7$$

Čisté vývozy NX se v důsledku zvýšení vládních výdajů G_a o 100 mld. Kč sníží o 14,7 mld. Kč.

Příklady k procvičení 6.1

(1) Vypočítejte jednoduchý výdajový multiplikátor pro hodnoty mezního sklonu ke spotřebě:
   (a) $c = 0,75$;
   (b) $c = 0,9$;
   (c) $c = 0,679$.
(2) Vypočítejte jednoduchý výdajový multiplikátor s daňovou sazbou pro hodnoty mezního sklonu ke spotřebě a daňové sazby:
   (a) $c = 0,75$ a $t = 0,2$;
   (b) $c = 0,9$ a $t = 0,15$;
   (c) $c = 0,679$ a $t = 0,32$.
(3) Vypočítejte jednoduchý multiplikátor otevřené ekonomiky pro hodnoty mezního sklonu ke spotřebě, daňové sazby a mezního sklonu k dovozu:

(a) $c = 0,75$; $t = 0,2$ a $m = 0,15$;
(b) $c = 0,9$; $t = 0,15$ a $m = 0,5$;
(c) $c = 0,679$; $t = 0,32$ a $m = 0,17$.

(4) Ve dvousektorové ekonomice byly zjištěny údaje o celkové spotřebě, investicích a úrovni důchodu (HDP, HNP) uvedené v následující tabulce 6.3 (v mld. peněžních jednotek).

Úroveň důchodu	Úroveň spotřeby	Úroveň investic
4200	3800	350
4000	3650	350
3800	3500	350
3600	3350	350
3400	3200	350

TABULKA 6.3. Zadané úrovně Y, C a I v příkladě k procvičení 6.1 (4)

(a) Doplňte tabulku o sloupec, kde budou uvedené úrovně celkových výdajů, a vyznačte v tabulce tendenci trhu statků a služeb k dosahování rovnovážné úrovně.
(b) Po změně úrovně investic na 200 mld. peněžních jednotek určete, o kolik se změní agregátní důchod Y. Je rozdíl v důchodu větší či menší než změna investic?
(c) O kolik vzroste agregátní důchod, vzrostou-li investice z 350 na 400 mld. peněžních jednotek?

(5) V uzavřené třísektorové ekonomice je sektor domácností reprezentován autonomní spotřebou, která je na úrovni $C_a = 550$ mld. Kč, a mezním sklonem ke spotřebě, který je $c = 0,75$. Sektor firem je reprezentován autonomními investicemi, které jsou na úrovni $I_a = 670$ mld. Kč, a vládní sektor vykazuje tyto aktivity - autonomní daně na úrovni $TA_a = 350$ mld. Kč, autonomní transfery na úrovni $TR_a = 625$ mld. Kč, daňová sazba na úrovni $t = 0,4$ a vládní výdaje na úrovni $G_a = 456$ mld. Kč.
(a) Jaká je úroveň rovnovážného důchodu, disponibilního důchodu, celkové spotřeby a celkových daní?
(b) Jak se změní rovnovážný důchod (HDP, HNP), když vláda sníží autonomní daně na 275 mld. Kč (při jinak stejných údajích)? V důsledku toho, jak se změní celkové daně, celková spotřeba a disponibilní důchod?
(c) Jak se změní (oproti původnímu) rovnovážný důchod (HDP, HNP), když vláda sníží daňovou sazbu na $t = 0,3$ (při jinak stejných údajích)? V důsledku toho, jak se změní celkové daně, celková spotřeba a disponibilní důchod?
(d) Jak se změní (oproti původnímu) rovnovážný důchod (HDP, HNP), když vláda zvýší transfery na 650 mld. Kč (při jinak stejných údajích)? V důsledku toho, jak se změní celkové daně, celková spotřeba a disponibilní důchod?

(e) Jak se změní (oproti původnímu) rovnovážný důchod (HDP, HNP), když vláda zvýší (autonomní) vládní výdaje na 500 mld. Kč (při jinak stejných údajích)? V důsledku toho, jak se změní celkové daně, celková spotřeba a disponibilní důchod?

(f) Jak se změní (oproti původnímu) rovnovážný důchod (HDP, HNP), když se zvýší investice na 700 mld. Kč (při jinak stejných údajích)? V důsledku toho, jak se změní celkové daně, celková spotřeba a disponibilní důchod?

(g) Pokud proběhnou všechny výše uvedené změny najednou, jaký to bude mít dopad na rovnovážný důchod (HDP, HNP)?

(6) V otevřené čtyřsektorové ekonomice je sektor domácností reprezentován autonomní spotřebou, která je na úrovni $C_a = 550$ mld. Kč, a mezním sklonem ke spotřebě, který je $c = 0,75$. Sektor firem je reprezentován autonomními investicemi, které jsou na úrovni $I_a = 670$ mld. Kč, a vládní sektor vykazuje tyto aktivity - autonomní daně na úrovni $TA_a = 350$ mld. Kč, autonomní transfery na úrovni $TR_a = 625$ mld. Kč, daňová sazba na úrovni $t = 0,4$ a vládní výdaje na úrovni $G_a = 456$ mld. Kč. Nakonec sektor zahraničního obchodu reprezentují vývozy na úrovni $X_a = 643$ mld. Kč, autonomní dovozy na úrovni $M_a = 457$ a mezní sklon k dovozu $m = 0,2$.

(a) Jaká je úroveň rovnovážného důchodu, disponibilního důchodu, celkové spotřeby, celkových daní a čistého vývozu?

(b) Jak se změní rovnovážný důchod (HDP, HNP), když vláda sníží autonomní daně na 275 mld. Kč (při jinak stejných údajích)? V důsledku toho, jak se změní čistý vývoz?

(c) Jak se změní (oproti původnímu) rovnovážný důchod (HDP, HNP), když vláda sníží daňovou sazbu na $t = 0,3$ (při jinak stejných údajích)? V důsledku toho, jak se změní čistý vývoz?

(d) Jak se změní (oproti původnímu) rovnovážný důchod (HDP, HNP), když vláda zvýší transfery na 650 mld. Kč (při jinak stejných údajích)? V důsledku toho, jak se změní čistý vývoz?

(e) Jak se změní (oproti původnímu) rovnovážný důchod (HDP, HNP), když vláda zvýší (autonomní) vládní výdaje na 500 mld. Kč (při jinak stejných údajích)? V důsledku toho, jak se změní čistý vývoz?

(f) Jak se změní (oproti původnímu) rovnovážný důchod (HDP, HNP), když se zvýší investice na 700 mld. Kč (při jinak stejných údajích)? V důsledku toho, jak se změní čistý vývoz?

(g) Jak se změní (oproti původnímu) rovnovážný důchod (HDP, HNP), když v důsledku zvýšení zahraničního produktu se zvýší vývozy o 57 mld. Kč (při jinak stejných údajích)? V důsledku toho, jak se změní čistý vývoz?

(h) Jak se změní (oproti původnímu) rovnovážný důchod (HDP, HNP), když v důsledku zvýšení měnového kurzu koruny se sníží autonomní dovozy o 57 mld. Kč (při jinak stejných údajích)? V důsledku toho, jak se změní čistý vývoz?

(i) Pokud proběhnou všechny výše uvedené změny najednou, jaký to bude mít dopad na rovnovážný důchod (HDP, HNP)?

Kontrolní otázky 6.1

(1) Vlastními slovy vysvětlete, co je to multiplikátor.
(2) V čem je rozdíl mezi autonomními a indukovanými výdaji?
(3) Jaké máme typy ekonomik? V čem se liší? A co znamená pojem otevřené a uzavřené ekonomiky?
(4) Co modelují tyto modely multiplikátorů?
(5) Odvoďte vzorec pro výpočet rovnovážné úrovně důchodu v dvou-, tří- i čtyř sektorové ekonomice.
(6) Jaký je vzájemný vztah jednoduchého výdajového multiplikátoru, jednoduchého výdajového multiplikátoru s daňovou sazbou a jednoduchého multiplikátoru otevřené ekonomiky?
(7) Matematicky popište multiplikační účinek v dvou-, tří- i čtyřsektorové ekonomice.

Problém k zamyšlení 6.1

Pohybujeme se v tří- nebo čtyřsektorové ekonomice. Zkuste si odvodit vzorec pro tzv. *multiplikátor transferových plateb*, tedy takové číslo, kterým musíme vynásobit změnu (autonomních) transferů (za jinak nezměněných podmínek), abychom dostali změnu rovnovážného agregátního důchodu. Rovněž si zkuste odvodit vzorec pro tzv. *daňový multiplikátor*, tedy takové číslo, kterým musíme vynásobit změnu autonomních daní (za jinak nezměněných podmínek), abychom dostali změnu agregátního důchodu.

6.2. Dynamický multiplikátor a důchodová analýza

Klíčová slova: dynamický multiplikátor, Robertsonovské zpoždění, Lundbergovské zpoždění, nespojitý model dynamického multiplikátoru, spojitý model dynamického multiplikátoru

Oproti statickému multiplikátoru, kdy nepředpokládáme, že existuje nějaké zpoždění (v poptávce, v produkci atd.), u modelu dynamického multiplikátoru zpoždění předpokládáme a do modelu zahrnujeme položku času. My budeme uvažovat dva druhy zpoždění v ekonomice.

K tomu, abychom si zopakovali tyto druhy zpoždění, musíme si uvědomit, jak důchod v ekonomice "proudí".

- Důchod Y dává vzniknout poptávce AD (mám-li za co, mohu něco poptávat, resp. kupovat).
- Agregátní poptávka AD dává vznik produkci Q (nabízející chtějí uspokojit poptávku, tudíž vyrábí).
- A nakonec z výnosu produkce Q dostávají podíl výrobní faktory (pracovní síla, kapitál atd.), který tvoří důchod Y.

Aby situace nebyla tak jednoduchá, tento tok důchodu v ekonomice může "proudit"se zpožděním. Předpokládá se, že zpoždění mezi výnosem z produkce Q a vyplacením ho výrobním faktorům Y prakticky neexistuje. Pak máme zpoždění dvojího druhu.

(1) Tzv. *Robertsonovské zpoždění* je zpoždění mezi důchodem a poptávkou, tzn. poptávka AD se zpožďuje za důchodem Y.
(2) Tzv. *Lundbergovské zpoždění* je zpoždění mezi poptávkou AD a produkcí Q, tzn. produkce Q se zpožďuje za poptávkou AD, ale protože zpoždění mezi Q a Y neexistuje, pak se v podstatě důchod Y zpožďuje za poptávkou AD.

Budeme rozlišovat dva přístupy:

- *nespojitý model dynamického multiplikátoru,*
- *spojitý model dynamického multiplikátoru.*

Začneme nespojitým přístupem. Předpokládáme kvůli zjednodušení zpoždění pouze o jedno období a model dvousektorové ekonomiky. Nespojitý model nás přivede k řešení diferenční rovnice prvního řádu. Uvažujeme uvedené typy zpoždění.

(1) U Robertsonovského zpoždění se agregátní poptávka zpožďuje za důchodem o jedno období, čili důchod, který vstupuje do poptávky AD_t prostřednictvím spotřeby je napřed o jedno období, tedy $C(Y_{t-1})$. Pak agregátní poptávka je dána

$$AD_t = C(Y_{t-1}) + I_a = cY_{t-1} + C_a + I_a.$$

Nabídka je dána standardně

$$AS_t = Y_t.$$

Porovnáme-li nabídku s poptávkou, dostaneme diferenční rovnici prvního řádu.

$$Y_t = cY_{t-1} + C_a + I_a.$$

(2) U Lunbergovského zpoždění se důchod zpožďuje za agregátní poptávkou o jedno období, čili agregátní poptávka je napřed o jedno období a je dána

$$AD_{t-1} = cY_{t-1} + C_a + I_a$$

a agregátní nabídka reprezentována důchodem je dána

$$AS_t = Y_t.$$

Porovnáme-li nabídku s poptávkou, dostaneme diferenční rovnici prvního řádu.

$$Y_t = cY_{t-1} + C_a + I_a.$$

Vidíme, že oba typy zpoždění vedou ke stejné diferenční rovnici prvního řádu, kterou řešíme standardním způsobem.

- Vyřešíme statickou rovnováhu, tzn. zanedbáme faktor času.

$$Y = cY + C_a + I_a.$$

Získáme statické, nebo též tzv. partikulární řešení Y^* (jedná se o stejné vzorce jako u statického multiplikátoru).

- Vyřešíme dynamickou rovnováhu, tzn. diferenční nehomogenní rovnici prvního řádu
$$Y_t = cY_{t-1} + C_a + I_a.$$
Získáme obecné řešení.
- Zahrneme počáteční podmínku $Y(0) = Y_0$ a nalezneme konečné řešení naší rovnice.

Připomeňme si, že řešením tohoto modelu je nějaká posloupnost vývoje důchodu v čase.

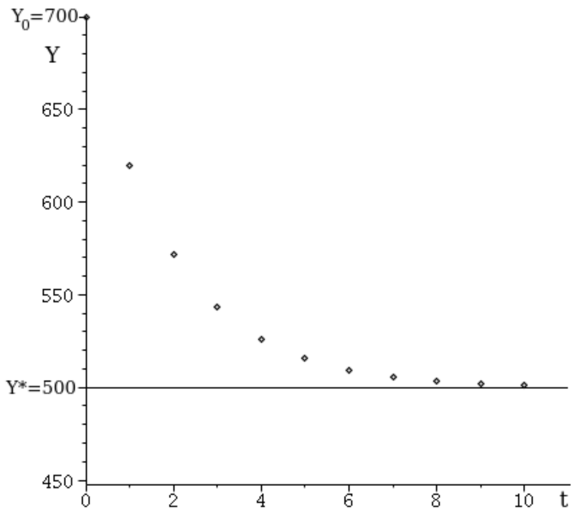
PŘÍKLAD 6.4. Dvousektorová ekonomika se zpožděním o jedno období mezi důchodem a poptávkou s nespojitými časovými změnami je charakterizována spotřební funkcí $C(Y) = 0,6Y + 160$ a autonomními investicemi I_a na úrovni 40 mld. Kč. Počáteční hodnota důchodu Y_0 je 700 mld. Kč. Určete, o jaký typ zpoždění se jedná, a nalezněte předpis posloupnosti pro vývoj důchodu v čase. Řešení znázorněte také graficky.
Řešení.
Vidíme, že se jedná o zpoždění mezi důchodem a poptávkou o jedno období, tedy jde o zpoždění Robertsonova typu.
Při hledání předpisu posloupnosti pro průběh důchodu v čase budeme postupovat dle uvedeného algoritmu. Nejdříve nalezneme statickou rovnováhu, resp. partikulární řešení.
$$\begin{aligned} Y &= cY + C_a + I_a \\ Y &= 0,6Y + 160 + 40 \\ 0,4Y &= 200 \\ Y^* &= 500 \end{aligned}$$
Nyní hledáme dynamickou rovnováhu. Porovnáváme tedy nabídku $AS_t = Y_t$ s poptávkou $AD_t = C(Y_{t-1}) + I_a = cY_{t-1} + C_a + I_a$.
$$\begin{aligned} Y_t &= cY_{t-1} + C_a + I_a \\ Y_t &= 0,6Y_{t-1} + 160 + 40 \\ Y_t - 0,6Y_{t-1} &= 200 \end{aligned}$$
Našli jsme nehomogenní diferenční rovnici prvního řádu. Dále budeme řešit pouze její homogenní část.
$$\begin{aligned} Y_t - 0,6Y_{t-1} &= 0 \\ \lambda^1 - 0,6\lambda^0 &= 0 \\ \lambda - 0,6 &= 0 \\ \lambda &= 0,6 \end{aligned}$$
Obecné řešení je pak
$$Y_t = k \cdot 0,6^t + 500,$$
kde $k \in \mathbb{R}$ je konstanta. Nyní nalezneme hodnotu k použitím počáteční podmínky $Y_0 = 700$.
$$\begin{aligned} Y_0 = 700 &= k \cdot 0,6^0 + 500 \\ 700 &= k + 500 \\ k &= 200 \end{aligned}$$
Konečné řešení je pak
$$Y_t = 200 \cdot 0,6^t + 500.$$

Nyní je čas se zamyslet nad tím, zda posloupnost konverguje k rovnovážnému důchodu Y^*. Pokud $t \to \infty$ $(t = 1, 2, 3, ...)$, pak výraz $0,6^t \to 0$, a tedy $Y_t \to Y^*(= 500)$. Vidíme, že řešení k rovnovážné úrovni důchodu $Y^* = 500$ konverguje. Pro ilustraci si znázorníme průběh důchodu v čase v následující tabulce 6.4.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_t	700	620	572	543,2	525,92	515,55	509,33	505,6	503,36	502,02	501,21

TABULKA 6.4. Průběh důchodu v čase v příkladu 6.4

Výslednou posloupnost $Y_t = 200 \cdot 0,6^t + 500$ pro $t = 0$ až 10 si rovněž znázorníme graficky.



OBRÁZEK 6.3. Graf posloupnosti Y_t pro $t = 0..10$ - řešení příkladu 6.4

Na obrázku 6.3 je také patrná konvergence důchodu v čase k rovnovážnému důchodu $Y^* = 500$.

Vidíme, že důchod v předchozím příkladě konverguje v čase k rovnovážnému důchodu. Pozorný čtenář si jistě všiml, že ve výsledné posloupnosti jsme umocňovali mezní sklon ke spotřebě $c = 0,6$ na t. Protože $c \in (0, 1)$, můžeme říct, že vždy v takovémto případě konverguje důchod k rovnováze.

Dále se budeme zabývat spojitým modelem dynamického multiplikátoru. Opět předpokládáme dvousektorovou ekonomiku. Spojitý model nás přivede k řešení diferenciální rovnice prvního řádu se separovanými proměnnými. Robertsonovské a Lundbergovské zpoždění vede ve spojitém případě také ke stejné diferenciální rovnici. Model vypadá následovně

$$\frac{dY}{dt} = \mu(AD(Y) - AS(Y)),$$

kde $\mu > 0$ charakterizuje rychlost reakce a $\frac{1}{\mu}$ je časová konstanta vyjadřující délku zpoždění. Pro naší dvousektorovou ekonomiku s lineárními vztahy pak výsledná diferenciální rovnice vypadá

$$\frac{dY}{dt} = \mu(I_a + C_a + cY - Y).$$

Diferenciální rovnici řešíme standardní způsobem.

- Vyřešíme statickou rovnováhu, tzn. zanedbáme faktor času.

  $$0 = \mu(I_a + C_a + cY - Y)$$

  Získáme statické, nebo též tzv. partikulární řešení Y^*.
- Vyřešíme dynamickou rovnováhu, tzn. diferenciální nehomogenní rovnici prvního řádu

  $$\frac{dY}{dt} = \mu(I_a + C_a + cY - Y).$$

  Homogenní část rovnice řešíme metodu separace proměnných. Dostaneme obecné řešení.
- Zahrneme počáteční podmínku $Y(0) = Y_0$ a nalezneme konečné řešení naší rovnice.

Připomeňme, že řešením tohoto modelu je nějaká spojitá funkce vývoje důchodu v čase.

PŘÍKLAD 6.5. Dvousektorová ekonomika se zpožděním mezi poptávkou a produkcí se spojitými časovými změnami je charakterizována spotřební funkcí $C(Y) = 0,8Y + 80$ a autonomními investicemi I_a na úrovni 20 mld. Kč. Počáteční hodnota důchodu Y_0 je 550 mld. Kč. Koeficient rychlosti reakce je $\mu = 4$. Určete, o jaký typ zpoždění se jedná, a nalezněte předpis spojité funkce pro vývoj důchodu v čase. Řešení znázorněte také graficky.

Řešení.

Vidíme, že se jedná o zpoždění mezi poptávkou a produkcí, tedy jde o zpoždění Lundbergova typu.

Při hledání předpisu spojité funkce pro průběh důchodu v čase budeme postupovat dle uvedeného algoritmu. Nejdříve nalezneme statickou rovnováhu, resp. partikulární řešení.

$$\begin{aligned} 0 &= \mu(I_a + C_a + cY - Y) \\ 0 &= 4(20 + 80 + 0,8Y - Y) \\ 0 &= 100 - 0,2Y \\ 0,2 &= 100 \\ Y^* &= 500 \end{aligned}$$

Nyní hledáme dynamickou rovnováhu.

$$\begin{aligned} \tfrac{dY}{dt} &= \mu(I_a + C_a + cY - Y) \\ \tfrac{dY}{dt} &= 4(20 + 80 + 0,8Y - Y) \\ \tfrac{dY}{dt} &= 4(100 - 0,2Y) \\ \tfrac{dY}{dt} &= 400 - 0,8Y \\ \tfrac{dY}{dt} + 0,8Y &= 400 \end{aligned}$$

Našli jsme nehomogenní diferenciální rovnici prvního řádu. Dále budeme řešit pouze její homogenní část metodou separace proměnných.

$$\begin{aligned}
\frac{dY}{dt} + 0,8Y &= 0\\
\frac{dY}{dt} &= -0,8Y\\
\frac{dY}{Y} &= -0,8dt\\
\int \frac{dY}{Y} &= -\int 0,8dt\\
\ln(Y) &= -0,8t + \bar{k}, \quad \bar{k} \in \mathbb{R}\\
Y(t) &= e^{-0,8t+\bar{k}}\\
Y(t) &= e^{-0,8t} \cdot e^{\bar{k}}\\
Y(t) &= k \cdot e^{-0,8t}, \quad k = e^{\bar{k}}, \ k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Obecné řešení je pak

$$Y(t) = k \cdot e^{-0,8t} + 500,$$

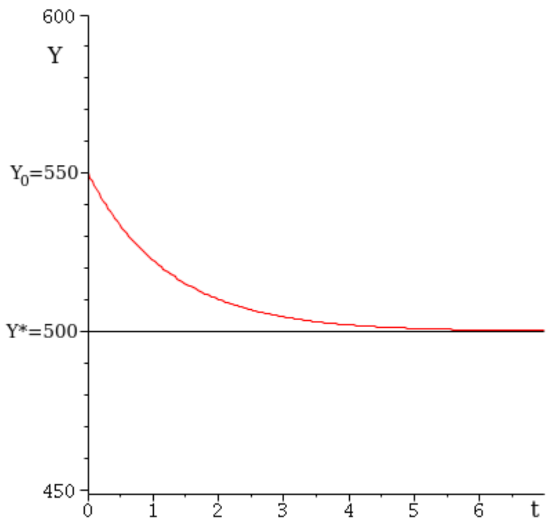
kde $k \in \mathbb{R}$ je konstanta. Nyní nalezneme hodnotu k použitím počáteční podmínky $Y(0) = 550$.

$$\begin{aligned}
Y(0) = 550 &= k \cdot e^{-0,8 \cdot 0} + 500\\
550 &= k + 500\\
k &= 50
\end{aligned}$$

Konečné řešení je pak

$$Y(t) = 50 \cdot e^{-0,8t} + 500.$$

Nyní je čas se zamyslet nad tím, zda posloupnost konverguje k rovnovážnému důchodu Y^*. Pokud $t \to \infty$, pak výraz $e^{-0,8t} \to 0$, a tedy $Y(t) \to Y^*(= 500)$. Vidíme, že řešení k rovnovážné úrovni důchodu $Y^* = 500$ konverguje.
Na obrázku 6.4 si znázorníme řešení tohoto příkladu - výslednou spojitou funkci $Y(t)$. I z tohoto obrázku je zřejmá konvergence řešení.



OBRÁZEK 6.4. Graf spojité funkce $Y(t)$ - řešení příkladu 6.5

Vidíme, že průběh důchodu v čase v předchozím příkladě konverguje k rovnovážnému důchodu. Pozorný čtenář si jistě všiml, že ve výsledné spojité funkci jsme Eulerovo číslo umocňovali na výraz $(c-1)t$. Protože $c \in (0,1)$, pak $c-1 < 0$, a pak můžeme říct, že vždy v takovémto případě konverguje důchod k rovnováze.

Příklady k procvičení 6.2

(1) Dvousektorová ekonomika se zpožděním o jedno období mezi důchodem a poptávkou s nespojitými časovými změnami je charakterizována spotřební funkcí $C(Y) = 0,8Y + 240$ a autonomními investicemi I_a na úrovni 400 mld. Kč. Počáteční hodnota důchodu Y_0 je 900 mld. Kč. Určete, o jaký typ zpoždění se jedná, a nalezněte předpis posloupnosti pro vývoj důchodu v čase. Řešení znázorněte také graficky.
(2) Dvousektorová ekonomika se zpožděním o jedno období mezi poptávkou a produkcí s nespojitými časovými změnami je charakterizována spotřební funkcí $C = 0,7Y + 270$ a autonomními investicemi I_a na úrovni 150 mld. Kč. Počáteční hodnota důchodu Y_0 je 1450 mld. Kč. Určete, o jaký typ zpoždění se jedná, a nalezněte předpis posloupnosti pro vývoj důchodu v čase. Řešení znázorněte také graficky.
(3) Dvousektorová ekonomika se zpožděním mezi důchodem a poptávkou se spojitými časovými změnami je charakterizována spotřební funkcí $C(Y) = 0,65Y + 180$ a autonomními investicemi I_a na úrovni 170 mld. Kč. Počáteční hodnota důchodu Y_0 je 670 mld. Kč. Koeficient rychlosti reakce je $\mu = 3$. Určete, o jaký typ zpoždění se jedná, a nalezněte předpis spojité funkce pro vývoj důchodu v čase. Řešení znázorněte také graficky.
(4) Dvousektorová ekonomika se zpožděním mezi poptávkou a produkcí se spojitými časovými změnami je charakterizována spotřební funkcí $C(Y) = 0,75Y + 450$ a autonomními investicemi I_a na úrovni 820 mld. Kč. Počáteční hodnota důchodu Y_0 je 5100 mld. Kč. Koeficient rychlosti reakce je $\mu = 5$. Určete, o jaký typ zpoždění se jedná, a nalezněte předpis spojité funkce pro vývoj důchodu v čase. Řešení znázorněte také graficky.

Kontrolní otázky 6.2

(1) Vysvětlete, co rozumíte pod pojmem dynamický multiplikátor.
(2) Popište vlastními slovy, jak důchod v ekonomice "proudí"?
(3) Jaké jsou druhy zpoždění? Jaký je mezi nimi rozdíl?
(4) Jaké jsou dva přístupy k modelu dynamického multiplikátoru?
(5) Popište agregátní poptávku a agregátní nabídku, které vstupují do nespojitého modelu dynamického multiplikátoru. Vlastními slovy popište způsob řešení tohoto modelu. Co je řešením tohoto modelu?
(6) Jak je to s konvergencí řešení k rovnovážnému důchodu u nespojitého modelu?
(7) Popište agregátní poptávku a agregátní nabídku, které vstupují do spojitého modelu dynamického multiplikátoru. Vlastními slovy popište způsob řešení tohoto modelu. Co je řešením tohoto modelu?
(8) Jak je to s konvergencí řešení k rovnovážnému důchodu u spojitého modelu?

Problém k zamyšlení 6.2

Zamyslete se nad chováním důchodu dle modelu dynamického multiplikátoru pro dvousektorovou ekonomiku v dlouhém a v krátkém časovém období. Je nutné tato období rozlišovat? Co si musíme uvědomit ohledně chování důchodu v dlouhém období a co v krátkém?

KAPITOLA 7

Matematické modelování statické agregátní makroekonomické rovnováhy

Podobně jako v kapitole 6.1, kde jsme modelovali statickou rovnováhu na celkovém trhu zboží, nyní se vrhneme na modelování statické všeobecné (agregátní) rovnováhy, tedy rovnováhy na trhu statků a služeb a finančním trhu současně. K tomuto účelu nám bude sloužit jeden z pilířů soudobé makroekonomie - model IS-LM. Tento model si vysvětlíme a následně si na něm ukážeme principy fiskální a monetární politiky státu.

Tento model je již (na ekonomii jako relativně mladou vědu) dosti starý. Model se řadí mezi neokeynesianské modely, vznikl v roce 1937 a jeho tvůrcem je John R. Hicks, britský ekonom, který za svůj přínos ekonomické vědě obdržel roku 1972 Nobelovu cenu. Model je však za některé své aspekty odborníky kritizován, mnohdy oprávněně. Přesto je stále dosti populární a to proto, že je dostatečně srozumitelný pro tvůrce hospodářských politik a dá se pomocí něho poměrně dobře porozumět logice intervencí vlády prováděných na úrovni národního hospodářství, respektive příčinám a důsledkům vládních zásahů.

7.1. Model IS-LM

Klíčová slova: všeobecná makroekonomická rovnováha, Walrasova teorie všeobecné rovnováhy, recesní mezera výstupu, model IS, model LM, rovnice IS, křivka IS, rovnice LM, křivka LM, model IS-LM

Jak jsme předznamenali, model IS-LM je pomůckou pro pochopení procesů, kterými se ekonomika dostává do stavu *všeobecné makroekonomické rovnováhy*. Rovnováhou rozumíme to, že je nabízeno právě tolik, kolik je poptáváno. Dosažení rovnováhy je v ekonomice jeden z hlavních cílů našeho snažení. Všeobecnou, nebo též agregátní, rovnováhou rozumíme současnou rovnováhu na trhu statků a služeb a na trhu peněz. V trhu peněz je "skryt"i trh finančních aktiv, který se ale v modelu neuvádí a to z důvodu tzv. *Walrasovy teorie všeobecné rovnováhy*. Ta říká, že pokud existují v ekonomice tři rozdílné trhy a pokud jsou dva z nich v rovnováze, pak musí být v rovnováze i třetí z nich.

Již jsme mnohokrát zmiňovali, že každý model je platný za určitých předpokladů. Model IS-LM má předpoklady následující:

(1) uzavřená ekonomika - v ekonomice neuvažujeme zahraniční obchod, existují tam pouze tři sektory (domácnosti, podniky a vláda), je to kvůli zjednodušení;
(2) poptávková orientace modelu - tzn. nabídka se plně přizpůsobuje poptávce;
(3) fixní cenová hladina - nedochází ke změnám ceny, neexistuje inflace nebo deflace, tudíž nerozlišujeme nominální a reálné veličiny;

(4) nabídka peněz jako exogenní veličina - centrální banka kontroluje množství peněz v ekonomice.

Kvůli bodům 3. a 4. padá na model vlna kritiky z důvodu velkého odchylování od reálné ekonomické situace. Problematiku nabídky peněz jsme si nastínili v kapitole 5.3. Platnost předpokladů 2. a 3. vlastně znamená, že se nacházíme v tzv. *recesní mezeře výstupu*. Nachází-li se ekonomika ve fázi recese, pak je tedy pod hranicí svých produkčních možností, dokáže pružně reagovat na poptávku a ceny se nezmění. Tento princip funguje tak, že zvýší-li se poptávka, firmy začnou více vyrábět, aby poptávku uspokojili, a začnou tedy více spotřebovávat výrobní faktory (práci a kapitál), a protože je recese a tudíž velká nezaměstnanost, jsou pracovníci ochotni pracovat za danou mzdu.

Modelování rovnováhy na trhu statků a služeb je reprezentováno stranou IS z modelu IS-LM a budeme jí říkat *model IS*. Pojmenování plyne z označení dvou veličin reprezentující trh statků a služeb, což jsou investice I a úspory S. Obdobně modelování rovnováhy na trhu peněz je popisováno stranou LM z modelu IS-LM a označujeme ji jako *model LM*. Toto pojmenování plyne z označení dvou veličin reprezentující trh peněz, a to z poptávky po penězích L a z nabídky peněz M. Se všemi těmito veličinami a funkcemi je popisující jsme se již setkali v předchozích kapitolách, konkrétně v kapitole 5.1, 5.2 a 5.3. Uvědomme si na základě těchto znalostí, že proměnnými modelu budou agregátní důchod Y a úroková míra i.

Nejdříve si probereme model IS. Hledáme rovnováhu na trhu statků a služeb. Rovnováha je dána rovností poptávky po statcích a službách a nabídky statků a služeb. Víme, že agregátní poptávka uzavřené třísektorové ekonomiky je dána součtem

$$AD = C + I + G,$$

kde C je spotřeba, I investice a G vládní nákupy. Dále známe lineární vztah pro spotřební funkci $C(Y_D) = cY_D + C_a$, kde $Y_D = Y - tY - TA_a + TR_a$, a vztah pro investiční funkci $I(i) = I_a - bi$ a předpokládáme vládní nákupy autonomní $G = G_a$. Pak po dosazení a úpravách získáme vztah pro agregátní poptávku

$$AD(Y, i) = c(1-t)Y + c(TR_a - TA_a) + C_a + I_a + G_a - bi.$$

Také víme, že pro agregátní nabídka platí vztah

$$AS = Y.$$

Porovnáme-li agregátní poptávku s nabídkou a vyjádříme-li agregátní důchod Y, pak získáme tzv. *rovnici IS*

$$Y = \frac{1}{1-c(1-t)}(c(TR_a - TA_a) + C_a + I_a + G_a - bi).$$

Provedeme-li označení stejné jako v kapitole 6.1, pak můžeme předchozí vztah psát ve tvaru

$$Y = \bar{\alpha}(\bar{A} - bi),$$

kde $\bar{\alpha}$ je multiplikátor a $\bar{A}$ jsou celkové autonomní výdaje, b citlivost investic na úrokovou míru a i úroková míra.

Vyjádříme-li naopak úrokovou míru i, dostaneme vztah

$$i = \frac{1}{b}\left(\bar{A} - \frac{Y}{\bar{\alpha}}\right) = \frac{1}{b}(\bar{A} - (1 - c(1-t))Y).$$

Vidíme, že se jedná o funkci úrokové míry i v závislosti na agregátním důchodu Y, a protože se jedná o stranu IS, budeme připisovat dolní index "IS", tedy $i_{IS}(Y)$. Graf této funkce je pak tzv. *křivka IS*. Víme, že $b > 0$, $\bar{A} > 0$ i $\bar{\alpha} > 0$, z čehož nám vyplývá, že křivka IS je klesajícího charakteru.

Dále si odvodíme rovnováhu na trhu peněz. Tato rovnováha je dána rovností poptávky po penězích L s nabídkou peněz M. V tomto modelu chápeme poptávku po penězích jako poptávku po reálných peněžních zůstatcích (vyplývá z předpokladů modelu), tedy

$$L = \frac{\textit{nominální poptávka po penězích}}{\textit{cenová úroveň}}.$$

Pro funkci poptávky po penězích známe z kapitoly 5.3 lineární vztah

$$L(Y, i) = kY - hi.$$

Nabídku peněz chápeme v tomto modelu jako nabídku reálných peněžních zůstatků (opět vyplývá z předpokladů modelu), tedy

$$\frac{\textit{nominální množství peněz}}{\textit{cenová úroveň}} = \frac{M}{P}.$$

Z kapitoly 5.3 víme, že nabídku peněz chápeme jako exogenní veličinu, tudíž konstantní konkrétní množství peněz v ekonomice řízené centrální bankou. V našem modelu pak tedy máme

$$\frac{M}{P} > 0.$$

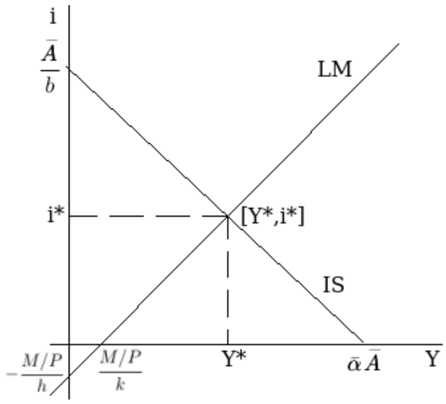
Porovnáme-li nabídku peněz s poptávkou po penězích a vyjádříme-li úrokovou míru i, pak dostaneme tzv. *rovnici LM*

$$i = \frac{1}{h}\left(kY - \frac{M}{P}\right),$$

kde $k, h > 0$ jsou citlivosti poptávky po penězích na agregátní důchod a úrokovou míru a $\frac{M}{P}$ je množství peněz v ekonomice.

Vidíme, že se jedná o funkci úrokové míry i v závislosti na agregátním důchodu Y, a protože se jedná o stranu LM, budeme připisovat dolní index "LM", tedy $i_{LM}(Y)$. Graf této funkce je pak tzv. *křivka LM*. Víme, že $k, h > 0$ a $\frac{M}{P} > 0$, z čehož nám vyplývá, že křivka LM je rostoucího charakteru.

Když už známe a víme, jak odvodit rovnováhu na trhu statků a služeb i trhu peněz, můžeme si popsat rovnováhu na obou trzích současně, tedy celkový *model IS-LM*. Pokud začneme s grafickým znázorněním, pak se jedná o průsečík křivky IS a LM. Protože se jedná o lineární funkce a tudíž křivky IS a LM jsou přímky, navíc jedna rostoucí a druhá klesající, pak tento průsečík je právě jeden. Tento bod představuje agregátní (všeobecnou) makroekonomickou rovnováhu, tedy rovnováhu na trhu statků a služeb a na trhu peněz současně. Tento bod budeme značit $[Y^*, i^*]$. Na obrázku 7.1 vidíme toto grafické znázornění.



OBRÁZEK 7.1. Model IS-LM

PŘÍKLAD 7.1. Předpokládáme, že se ekonomika nachází v rovnovážném stavu. Užitím modelu IS-LM s tradičně skloněnými křivkami IS (klesající) a LM (rostoucí) odhadněte, co se stane s rovnovážným bodem $[Y^*, i^*]$ (kam se posune), přesněji, jak se změní rovnovážná úroveň agregátního důchodu Y^* a rovnovážná úroveň úrokové míry i^*, jestliže

(a) vzroste daňová sazba t,
(b) klesne citlivost poptávky po penězích na úrokovou míru h.

Situaci rovněž znázorněte graficky.
Řešení.
Při řešení tohoto příkladu budeme užívat následující označení:

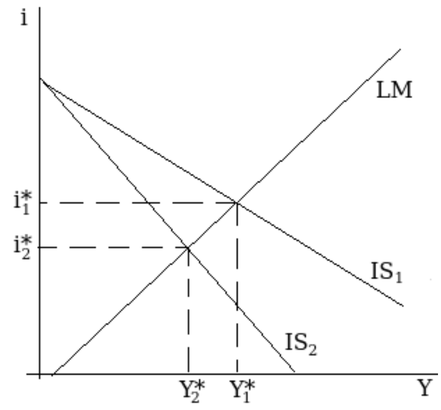
- šipka nahoru $\uparrow$ při růstu nějaké veličiny nebo výrazu,
- šipka dolů $\downarrow$ při poklesu nějaké veličiny nebo výrazu.

Při úvahách o změnách Y^* a i^* vycházíme z předpisů pro křivku IS a LM

$$\text{křivka IS: } i = \frac{1}{b}(\bar{A} - (1 - c(1-t))Y),$$

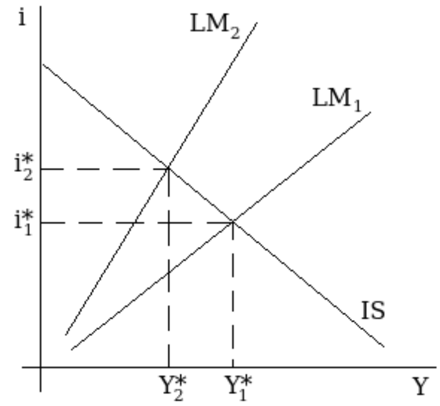
$$\text{křivka LM: } i = \frac{1}{h}\left(kY - \frac{M}{P}\right).$$

(a) V tomto případě se mění pouze křivka IS, protože daňová sazba se vyskytuje pouze v předpisu pro křivku IS. Takže uvažujeme vztah $i = \frac{1}{b}(\bar{A} - (1 - c(1-t))Y)$. Jestliže $t\uparrow$, pak $(1-t)\downarrow$, pak $c(1-t)\downarrow$, pak $1 - c(1-t)\uparrow$, pak $-(1-c(1-t))\downarrow$, tudíž (záporný) sklon křivky IS se sníží a situace bude vypadat následovně, viz obrázek 7.2.
Vidíme, že úroveň rovnovážného agregátního důchodu Y^* i rovnovážné úrokové míry i^* se v důsledku růstu daňové sazby snížila. Můžeme si to ověřit tak, že budeme pokračovat v odvozování změny Y dle vzorce $Y = \bar{\alpha}(\bar{A} - bi)$. Odvodili jsme si, že $1 - c(1-t)\uparrow$, pak $\bar{\alpha} = \frac{1}{1-c(1-t)}\downarrow$ a tudíž i rovnovážný důchod Y^* se sníží. Obdobně dle vzorce $i = \frac{1}{h}\left(kY - \frac{M}{P}\right)$ vidíme, že pokud klesne důchod Y, pak klesne i rovovážná úroková míra i^*.



OBRÁZEK 7.2. Změna křivky IS vyvolaná růstem daňové sazby v př. 7.1

(b) V případě poklesu parametru citlivosti poptávky po penězích na úrokovou míru se mění pouze křivka LM, protože citlivost poptávky na úrokovou míru se vyskytuje pouze v předpisu pro křivku LM. Takže uvažujeme vztah $i = \frac{1}{h}\left(kY - \frac{M}{P}\right)$. Jestliže $h \downarrow$, pak $\frac{1}{h} \uparrow$, pak $\frac{1}{h}k \uparrow$, tudíž (kladný) sklon křivky LM vzroste a situace bude vypadat následovně, viz obrázek 7.3.



OBRÁZEK 7.3. Změna křivky LM po poklesu citlivosti poptávky po penězích na úrokovou míru v př. 7.1

Vidíme, že úroveň rovnovážného agregátního důchodu Y^* se v důsledku poklesu citlivosti poptávky po penězích na úrokovou míru snížila a úroveň rovnovážné úrokové míry i^* zvýšila. Můžeme si to ověřit tak, že budeme pokračovat v odvozování změny i dle vzorce $i = \frac{1}{h}\left(kY - \frac{M}{P}\right)$. Odvodili jsme si, že $\frac{1}{h} \uparrow$, pak $\frac{1}{h}\left(kY - \frac{M}{P}\right) \uparrow$ a tudíž i rovnovážná úroková míra i^* se zvýší. Obdobně dle vzorce $Y = \bar{\alpha}(\bar{A} - bi)$ vidíme, že pokud vzroste úroková míra i, pak klesne rovnovážný důchod Y^*.

Doteď jsme se zabývali spíše grafickým odvozováním všeobecné makroekonomické rovnováhy, resp. modelu IS-LM. Není si rovnováhu na obou trzích současně odvodíme analyticky.

Pokud platí tato rovnováha, musí platit následující rovnice současně

$$\text{IS: } Y = \bar{\alpha}(\bar{A} - bi),$$

$$\text{LM: } i = \frac{1}{h}\left(kY - \frac{M}{P}\right).$$

Máme tedy dvě algebraické rovnice o dvou neznámých, které můžeme prakticky v příkladech řešit standardním způsobem a získáme Y^* rovnovážný agregátní důchod a i^* rovnovážnou úrokovou míru.

Druhou možností je si obecně odvodit vzorce pro Y^* a i^*. Rovnici LM dosadíme do rovnice IS

$$Y = \bar{\alpha}(\bar{A} - b \cdot \frac{kY - \frac{M}{P}}{h}),$$

upravíme a získáme vzorec pro výpočet rovnovážného agregátního důchodu

$$Y^* = \gamma \cdot \left(\bar{A} + \frac{b}{h}\frac{M}{P}\right),$$

kde

$$\gamma = \frac{\bar{\alpha}}{1 + \bar{\alpha}\frac{bk}{h}}.$$

Nyní dosadíme vzorec pro Y^* do rovnice LM a získáme vzorec pro výpočet rovnovážné úrokové míry

$$i^* = \frac{k \cdot \gamma \cdot \left(\bar{A} + \frac{b}{h}\frac{M}{P}\right) - \frac{M}{P}}{h}.$$

PŘÍKLAD 7.2. Uzavřená třísektorová ekonomika je charakterizována následujícími údaji:

- mezní sklon ke spotřebě $c = 0,8$;
- autonomní spotřeba $C_a = 60$ mld. Kč;
- autonomní investice $I_a = 120$ mld. Kč;
- koeficient citlivosti investic na úrokovou míru $b = 15$;
- vládní nákupy $G_a = 150$ mld. Kč;
- autonomní daně $TA_a = 10$ mld. Kč;
- daňová sazba $t = 0,2$;
- koeficient citlivosti poptávky po penězích na agregátní důchod $k = 0,5$;
- koeficient citlivosti poptávky po penězích na úrokovou míru $h = 22$;
- množství peněz v ekonomice $\frac{M}{P} = 325$ mld. Kč.

(a) Podle modelu IS-LM určete úroveň rovnovážného agregátního důchodu Y^* a rovnovážné úrokové míry i^*. Jaký je rozpočtový přebytek (kladný) nebo schodek (záporný), což je rozdíl daňových příjmů vlády a vládních výdajů, v tomto případě?

(b) Jak se změní rovnovážná úroveň agregátního důchodu a úrokové míry, jestliže vládní nákupy vzrostou na 190 mld. Kč? Jak se změní státní přebytek, resp. schodek?

Řešení.

(a) Pro výpočet rovnovážné úrovně důchodu použijeme odvozeného vzorce. Nejdříve spočítáme γ.

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{1 - c(1-t)} = \frac{1}{1 - 0,8(1-0,2)} = \frac{1}{0,36} = 2,78$$

$$\gamma = \frac{\bar{\alpha}}{1 + \bar{\alpha}\frac{bk}{h}} = \frac{2,78}{1 + 2,78\frac{15 \cdot 0,5}{22}} = 1.427$$

Dále vypočítáme hodnotu autonomních výdajů $\bar{A}$.

$$\bar{A} = c(TR_a - TA_a) + C_a + I_a + G_a = 0,8(0-10) + 60 + 120 + 150 = 322$$

Nyní můžeme spočítat Y^*.

$$Y^* = \gamma \cdot \left(\bar{A} + \frac{b}{h}\frac{M}{P}\right) = 1,427 \cdot \left(322 + \frac{15}{22} \cdot 325\right) = 775,704$$

Pro výpočet rovnovážné úrokové míry použijeme vzorce $i = \frac{1}{h}\left(kY - \frac{M}{P}\right)$ a dosadíme za Y nalezenou hodnotu $Y^* = 775,704$.

$$i = \frac{1}{h}\left(kY^* - \frac{M}{P}\right) = \frac{1}{22}\left(0,5 \cdot 775,704 - 325\right) = 2,87$$

Rovnovážná úroveň důchodu je 775,704 mld. Kč a rovnovážná úroková míra je na úrovni 2,87 %.

Vládní nákupy jsou $G_a = 150$ mld. Kč. Dále si vypočítáme daňové příjmy vlády dle vzorce $TA = tY^* - TA_a$.

$$TA = tY^* + TA_a = 0,2 \cdot 775,704 + 10 = 165,1408$$

Rozpočtový přebytek je rozdíl vládních příjmů a výdajů.

$$\text{rozpočtový přebytek} = TA - G_A = 165,1408 - 150 = 15,1408$$

Tedy jedná se skutečně o přebytek 15,1408 mld. Kč, protože se pohybujeme v kladných hodnotách.

(b) Pro výpočet nových úrovní rovnovážného agregátního důchodu a úrokové míry použijeme první způsob - rovnici LM dosadíme do rovnice IS. Pro tento účel potřebujeme nejdříve vypočítat novou úroveň autonomních výdajů $\bar{A}$. Autonomní výdaje se změní v závislosti na změně G_a (ostatní zůstalo nezměněno), tedy $\triangle A = \triangle G_a = 190 - 150 = 40$. Spočítáme novou úroveň autonomních výdajů.

$$\bar{A} = 322 + \triangle A = 322 + 40 = 362$$

Nyní můžeme vyjádřit rovnici IS a LM.

$$\text{IS: } Y = \bar{\alpha}(\bar{A} - bi) = 2,78 \cdot (362 - 15i)$$

$$\text{LM: } i = \frac{1}{22}(0,5Y - 325)$$

Dosadíme rovnici LM do rovnice IS a vypočítáme novou hodnotu Y^*.

$$\begin{aligned}
Y &= 2,78 \cdot \left(362 - 15 \cdot \tfrac{1}{22}(0,5Y - 325)\right) \\
Y &= 2,78 \cdot (362 - 0,34Y + 221,59) \\
Y &= 1006,36 - 0,9452Y + 616,02 \\
1,9452 \cdot Y &= 1622,38 \\
Y^* &= 834,04
\end{aligned}$$

Pro výpočet rovnovážné úrokové míry použijeme vzorce $i = \frac{1}{h}\left(kY - \frac{M}{P}\right)$ a dosadíme za Y nalezenou hodnotu $Y^* = 834,04$.

$$i = \frac{1}{h}\left(kY^* - \frac{M}{P}\right) = \frac{1}{22}(0,5 \cdot 834,04 - 325) = 4,18$$

Rovnovážná úroveň důchodu se zvýšila na 834,04 mld. Kč a rovnovážná úroková míra na 4,18 %.
Nové vládní nákupy jsou $G_a = 190$ mld. Kč. Vypočítáme nové daňové příjmy vlády dle vzorce $TA = tY^* - TA_a$.

$$TA = tY^* + TA_a = 0,2 \cdot 834,04 + 10 = 176,808$$

Rozpočtový přebytek je rozdíl vládních příjmů a výdajů.

$$\text{rozpočtový přebytek} = TA - G_A = 176,808 - 190 = -13,192$$

Vidíme, že se nyní jedná o rozpočtový schodek 13,192 mld.Kč, protože se pohybujeme v záporných hodnotách. Rovněž si můžeme všimnout, že byť zvýšení vládních nákupů způsobilo růst rovnovážného agregátního důchodu (resp. HDP, HNP), vznikl rozpočtový schodek 13,192 mld. Kč (z původního rozpočtového přebytku 15,1408 mld. Kč).

Příklady k procvičení 7.1

(1) Předpokládáme, že se ekonomika nachází v rovnovážném stavu. Užitím modelu IS-LM s tradičně skloněnými křivkami IS (klesající) a LM (rostoucí) odhadněte, co se stane s rovnovážným bodem $[Y^*, i^*]$ (kam se posune), přesněji, jak se změní rovnovážná úroveň agregátního důchodu Y^* a rovnovážná úroveň úrokové míry i^*, jestliže
   (a) poklesne daňová sazba t,
   (b) vzroste mezní sklon ke spotřebě c,
   (c) poklesnou autonomní investice I_a,
   (d) vzroste citlivost investic na úrokovou míru b,
   (e) poklesnou autonomní daně TA_a,
   (f) vzroste citlivost poptávky po penězích na agregátní důchod k,
   (g) vzroste citlivost poptávky po penězích na úrokovou míru h,
   (h) poklesnou reálné peněžní zůstatky $\frac{M}{P}$.

   Situaci rovněž znázorněte graficky.

(2) Uzavřená třísektorová ekonomika je charakterizována následujícími údaji:
- mezní sklon ke spotřebě $c = 0,75$;
- autonomní spotřeba $C_a = 70$ mld. Kč;
- autonomní investice $I_a = 125$ mld. Kč;
- koeficient citlivosti investic na úrokovou míru $b = 21$;
- vládní nákupy $G_a = 190$ mld. Kč;
- autonomní daně $TA_a = 20$ mld. Kč;
- autonomní transfery $TR_a = 30$ mld. Kč;
- daňová sazba $t = 0,25$;
- koeficient citlivosti poptávky po penězích na agregátní důchod $k = 0,7$;
- koeficient citlivosti poptávky po penězích na úrokovou míru $h = 33$;
- množství peněz v ekonomice $\frac{M}{P} = 387$ mld. Kč.

(a) Podle modelu IS-LM určete úroveň rovnovážného agregátního důchodu Y^* a rovnovážné úrokové míry i^*. Jaký je rozpočtový přebytek (kladný) nebo schodek (záporný), což je rozdíl daňových příjmů vlády a vládních výdajů, v tomto případě?

(b) Jak se změní rovnovážná úroveň agregátního důchodu a úrokové míry, jestliže vládní nákupy klesnou na 170 mld. Kč? Jak se změní státní přebytek, resp. schodek?

(c) Jak se změní rovnovážná úroveň agregátního důchodu a úrokové míry, jestliže autonomní daně klesnou na 15 mld. Kč? Jak se změní státní přebytek, resp. schodek?

(d) Jak se změní rovnovážná úroveň agregátního důchodu a úrokové míry, jestliže množství peněz ve ekonomice klesne na 380 mld. Kč? Jak se změní státní přebytek, resp. schodek?

(e) Jak se změní rovnovážná úroveň agregátního důchodu a úrokové míry, jestliže citlivost poptávky po penězích na agregátní důchod klesne na úroveň 0,6? Jak se změní státní přebytek, resp. schodek?

Kontrolní otázky 7.1

(1) Co je to model IS-LM a k čemu slouží?
(2) Vysvětlete, co znamená všeobecná (agregátní) makroekonomická rovnováha.
(3) Co říká Walrasova teorie všeobecné rovnováhy?
(4) Jaké jsou předpoklady modelu IS-LM? Co z nich pro stav ekonomiky vyplývá?
(5) Namodelujte rovnováhu na trhu statků a služeb dle modelu IS, Vysvětlete pojmy rovnice IS a křivka IS.
(6) Namodelujte rovnováhu na peněz dle modelu LM, Vysvětlete pojmy rovnice LM a křivka LM.
(7) Graficky znázorněte model IS-LM. Jaký prvek představuje agregátní makroekonomickou rovnováhu?
(8) Jak analyticky získáme všeobecnou makroekonomickou rovnováhu?

Problém k zamyšlení 7.1
V uzavřené třísektorové ekonomice zvýšení vládních nákupů způsobilo nárůst rovnovážného agregátního důchodu i rovnovážné úrokové míry. Co musí udělat centrální banka, aby snížila rovnovážnou úrokovou míru na původní úroveň? K řešení tohoto problému využijte modelu IS-LM a situaci znázorněte graficky.

7.2. Fiskální a monetární politika dle modelu IS-LM

Klíčová slova: fiskální politika, monetární politika, multiplikátor fiskální politiky, multiplikátor monetární politiky, fiskální expanze, fiskální restrikce, monetární expanze, monetární restrikce

V této kapitole si nastíníme, jakým způsobem lze využít model IS-LM k tvorbě hospodářské politiky státu. Protože je tento model snadno uchopitelný, může sloužit jako nástroj pro analýzu příčin a dopadů hospodářsko-politických rozhodnutí a opatření vlády a centrální banky. Většina centrálních bank je dnes již považována za nezávislé.

U následujících úvah je třeba mít ale stále na paměti, že se jedná "pouze"model platný za určitých daných předpokladů, že modeluje statickou rovnováhu a je vhodný pro analýzu uzavřené třísektorové ekonomiky nacházející se v recesní mezeře s předpokladem exogenních peněz. Chceme tímto opakováním upozornit hlavně na to, že pro tvorbu hospodářské politiky se dnes používají jiné, více sofistikované nástroje a modely. Model IS-LM slouží více pro ilustraci problému veřejnosti, pro pochopení principu fungování složitých makroekonomických systémů, jako základ, na kterém jsou stavěny mnohem složitější modely, nebo jako výchovně-edukační nástroj.

Hospodářská politika je tedy dvojího druhu:

- *fiskální politika*, neboli výdajová;
- *monetární politika*, neboli měnová.

Nástroje hospodářské politiky pro vládní regulace vývoje ekonomiky jsou

- u fiskální politiky změny výše a struktury veřejných výdajů, čili vládních nákupů G_a a transferů TR_a, změny výše a struktury daní TA, tedy daňové sazby t a autonomních daní TA_a;
- u monetární politiky měnové nástroje, v našem modelu pak tedy změny množství peněz v ekonomice $\frac{M}{P}$.

Z předchozí kapitoly víme, že rovnovážný důchod (produkt) Y^* získáme dle rovnice

$$Y^* = \gamma \cdot \left(\bar{A} + \frac{b}{h} \frac{M}{P} \right).$$

Tedy rovnovážný produkt Y^* můžeme ovlivňovat dvěma sčítanci

$$Y^* = \gamma \cdot \bar{A} + \gamma \cdot \frac{b}{h} \frac{M}{P}.$$

První sčítanec $\gamma \cdot \bar{A}$ lze měnit fiskální politikou a druhý $\gamma \cdot \frac{b}{h}\frac{M}{P}$ pak monetární politikou. Výraz

$$\gamma = \frac{\bar{\alpha}}{1 + \bar{\alpha}\frac{bk}{h}}$$

pojmenováváme jako *multiplikátor fiskální politiky*. Označme

$$\beta = \gamma \cdot \frac{b}{h}$$

a tento výraz nazýváme *multiplikátorem monetární politiky*. Na základě vlastností jednotlivých veličin a prvků vyskytujících se ve vzorcích pro tyto multiplikátory platí vztah

$$\beta < \gamma < \bar{\alpha}.$$

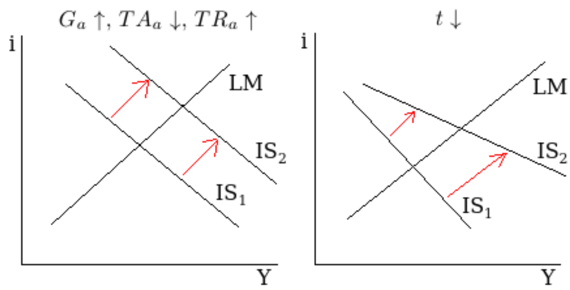
Nakonec můžeme psát vzorec pro rovnovážný produkt ve tvaru

$$Y^* = \gamma \cdot \bar{A} + \beta \cdot \frac{M}{P}.$$

Fiskální politika může být dvojího druhu.

(1) Tzv. *fiskální expanze* je dosaženo:
- růstem vládních nákupů G_a,
- poklesem autonomních daní TA_a,
- růstem transferů TR_a,
- poklesem daňové sazby t.

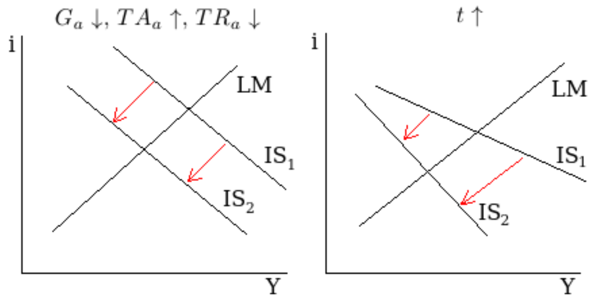
Grafické znázornění fiskální expanze vidíme na obrázku 7.4.



OBRÁZEK 7.4. Fiskální expanze

(2) Tzv. *fiskální restrikce* je dosaženo:
- poklesem vládních nákupů G_a,
- růstem autonomních daní TA_a,
- poklesem transferů TR_a,
- růstem daňové sazby t.

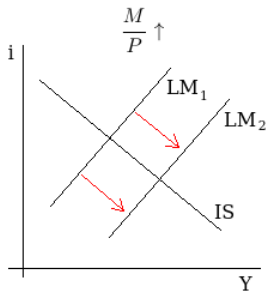
Grafické znázornění fiskální restrikce vidíme na obrázku 7.5



Obrázek 7.5. Fiskální restrikce

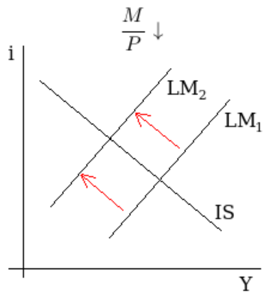
Také monetární politika může být dvojího druhu.

(1) Tzv. *monetární expanze* je dosaženo zvyšováním peněžní zásoby v ekonomice $\frac{M}{P}$. Grafické znázornění monetární expanze vidíme na obrázku 7.6.



Obrázek 7.6. Monetární expanze

(2) Tzv. *monetární restrikce* je dosaženo snižováním peněžní zásoby v ekonomice $\frac{M}{P}$. Grafické znázornění monetární restrikce vidíme na obrázku 7.7.



Obrázek 7.7. Monetární restrikce

Příklad 7.3. Stav uzavřené třísektorové ekonomiky je charakterizován následujícími údaji:

- $C = 200 + 0,7Y_D$;
- $I = 800 - 30i$;
- $L = 1,5Y - 300i$;
- $G_a = 1500$;
- $TA_a = 1000$;
- $TR_a = 500$;
- $\frac{M}{P} = 3000$;
- $t = 0,2$.

Vláda chce dosáhnout zvýšení rovnovážné úrovně produktu (HDP, HNP) o 600 jednotek. Navrhněte mix fiskální a monetární politiky, jež tento cíl zajistí. Při návrhu fiskální politiky použijte současně změnu vládních nákupů a změnu daňové sazby, případně podle vlastního uvážení změnu autonomních daní a transferů. Fiskální expanzi doplňte navýšením reálné peněžní zásoby. Spočítejte rovnovážné úrovně celkového produktu a úrokové míry ve výchozím a konečném stavu po navržených změnách, i všechny rovnovážné stavy průběžné. Situaci znázorněte rovněž graficky.

Řešení.

Máme zadány údaje:

$$\begin{array}{rclrclrcl} C_a &=& 200 & TA_a &=& 1000 & k &=& 1,5 \\ c &=& 0,7 & TR_a &=& 500 & h &=& 300 \\ I_a &=& 800 & G_a &=& 1500 & \frac{M}{P} &=& 3000 \\ b &=& 30 & t &=& 0,2 & & & \end{array}$$

Nejdříve si vypočítáme rovnovážné úrovně důchodu Y_0^* a úrokové míry i_0^* ve výchozím stavu. K tomu potřebujeme všechny multiplikátory a hodnotu celkových autonomních výdajů.

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{1}{1-c(1-t)} = \frac{1}{1-0,7(1-0,2)} = \frac{1}{1-0,56} = \frac{1}{0,44} = 2,27$$

$$\gamma_0 = \frac{\bar{\alpha}_0}{1+\bar{\alpha}_0\frac{bk}{h}} = \frac{2,27}{1+\frac{2,27\cdot 30\cdot 15}{300}} = \frac{2,27}{1,3405} = 1,69$$

$$\beta_0 = \gamma_0 \cdot \frac{b}{h} = \frac{1,69\cdot 30}{300} = 0,169$$

$$\bar{A}_0 = c(TR_a - TA_a) + C_a + I_a + G_a = 0,7(500-1000) + 200 + 800 + 1500 = 2150$$

Vypočítáme rovnovážnou úroveň důchodu ve výchozím stavu.

$$Y_0^* = \gamma_0 \cdot \bar{A}_0 + \beta_0\frac{M}{P} = 1,69 \cdot 2150 + 0,169 \cdot 3000 = 3633,5 + 507 = 4140,5$$

Dále spočítáme úroveň rovnovážné úrokové míry.

$$i_0^* = \frac{1}{h}\left(kY_0^* - \frac{M}{P}\right) = \frac{1,5\cdot 4140,5 - 3000}{300} = 10,7$$

Rovnovážná úroveň důchodu ve výchozím stavu je 4140,5 peněžních jednotek a rovnovážná úroková míra je 10,7 %.
Naším cílem je zvýšení agregátního důchodu o 600 jednotek. Musíme navrhnout nějaké fiskální změny, resp. fiskální expanzi. Máme předně změnit vládní nákupy G_a a daňovou sazbu t. Víme, že budeme vládní nákupy zvyšovat a daňovou sazbu snižovat, aby se jednalo o fiskální expanzi. Navrhujeme tedy následující změny. Snížíme daňovou sazbu o $0,02$, tedy nová daňová sazba je $t_1 = 0,2 - 0,02 = 0,18$. Dále zvýšíme vládní výdaje na nákupy statků a služeb o 200, tedy $\triangle G_a = 200$. Nyní vypočítáme, jak se změní rovnovážná úroveň důchodu a úrokové míry. Protože se změnila daňová sazba, musíme přepočítat všechny multiplikátory, a musíme přepočítat i autonomní výdaje, protože vládní nákupy jsou jejich součástí.

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{1}{1 - c(1 - t_1)} = \frac{1}{1 - 0,7(1 - 0,18)} = \frac{1}{1 - 0,574} = \frac{1}{0,426} = 2,35$$

$$\gamma_1 = \frac{\bar{\alpha}_1}{1 + \bar{\alpha}_1 \frac{bk}{h}} = \frac{2,35}{1 + \frac{2,35 \cdot 30 \cdot 15}{300}} = \frac{2,35}{1,3525} = 1,74$$

$$\beta_1 = \gamma_1 \cdot \frac{b}{h} = \frac{1,74 \cdot 30}{300} = 0,174$$

$$\bar{A}_1 = A_0 + \triangle A = A_0 + \triangle G_a = 2150 + 200 = 2350$$

Rovnovážná úroveň důchodu po fiskálních změnách bude následující.

$$Y_1^* = \gamma_1 \cdot \bar{A}_1 + \beta_1 \frac{M}{P} = 1,74 \cdot 2350 + 0,174 \cdot 3000 = 4089 + 522 = 4611$$

Dále vypočítáme rovnovážnou úroveň po fiskálních změnách.

$$i_1^* = \frac{1}{h}\left(kY_1^* - \frac{M}{P}\right) = \frac{1,5 \cdot 4611 - 3000}{300} = 13,06$$

Rovnovážná úroveň důchodu po fiskálních změnách je 4611 peněžních jednotek a rovnovážná úroveň úrokové míry po fiskálních změnách je 13,06 %.
Teď je čas zamyslet se nad tím, zda fiskální expanze byla dostatečná pro dosažení našeho cíle. Chceme zvýšit rovnovážnou úroveň důchodu o 600 jednotek oproti původní hodnotě. Rovnovážná úroveň důchodu ve výchozím stavu byla 4140,5 jednotek. Přičteme-li k této hodnotě 600 jednotek, získáme konečnou úroveň rovnovážného produktu.

$$Y_2^* = Y_0^* + 600 = 4140,5 + 600 = 4740,5$$

A my jsme dosáhli hodnoty pouze 4611 jednotek. Musíme tedy navýšit peněžní nabídku $\frac{M}{P}$. Vše ostatní zůstane nezměněno.

$$\gamma_2 = \gamma_1 = 1,74$$

$$\beta_2 = \beta_1 = 0,174$$

$$\bar{A}_2 = \bar{A}_1 = 2350$$

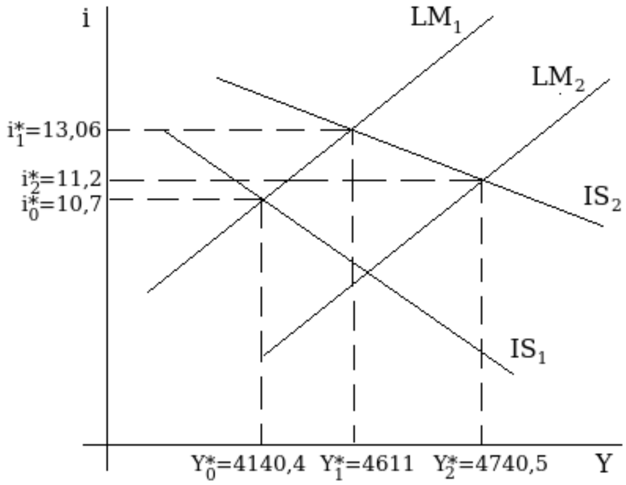
Nyní známe všechny hodnoty k tomu, abychom mohli najít novou úroveň reálných peněžních zůstatků $\left(\frac{M}{P}\right)_2$.

$$\begin{aligned}
Y_2^* &= \gamma_2 \cdot \bar{A}_2 + \beta_2 \left(\tfrac{M}{P}\right)_2 \\
4740,5 &= 1,74 \cdot 2350 + 0,174 \left(\tfrac{M}{P}\right)_2 \\
4740,5 &= 4089 + 0,174 \left(\tfrac{M}{P}\right)_2 \\
651,5 &= 0,174 \left(\tfrac{M}{P}\right)_2 \\
\left(\tfrac{M}{P}\right)_2 &= 3744
\end{aligned}$$

Nabídka peněz se musí zvýšit o $\left(\frac{M}{P}\right)_2 - \frac{M}{P} = 3744 - 3000 = 744$.
Nakonec vypočítáme konečnou rovnovážnou úroveň úrokové míry.

$$i_2^* = \frac{1}{h}\left(kY_2^* - \left(\frac{M}{P}\right)_2\right) = \frac{1,5 \cdot 4740,5 - 3744}{300} = 11,2$$

Pro dosažení zvýšení agregátního důchodu o 600 peněžních jednotek na úroveň 4740,5 jsme použili zvýšení vládních nákupů o 200 peněžních jednotek a snížení daňové sazby o 0,02, fiskální expanzi jsme doplnili navýšením reálné peněžní o 744 peněžních jednotek. Výsledná rovnovážná úroková míra je na úrovni 11,2 %.
Nakonec si fiskální i monetární expanzi znázorníme graficky pomocí posunů křivky IS a LM, viz obrázek 7.8.



Obrázek 7.8. Znázornění fiskální a monetární politiky na příkladě 7.3

Příklady k procvičení 7.2

(1) Stav uzavřené třísektorové ekonomiky je charakterizován následujícími údaji:
- $C = 235 + 0,65Y_D$;
- $I = 845 - 33i$;
- $L = 2Y - 465i$;
- $G_a = 1678$;
- $TA_a = 1432$;
- $TR_a = 700$;
- $\frac{M}{P} = 4567$;
- $t = 0,1$.

Vláda chce dosáhnout zvýšení rovnovážné úrovně produktu (HDP, HNP) o 900 jednotek. Navrhněte mix fiskální a monetární politiky, jež tento cíl zajistí. Při návrhu fiskální politiky použijte současně změnu transferových plateb a změnu daňové sazby, případně podle vlastního uvážení změnu autonomních daní a vládních nákupů. Fiskální expanzi doplňte navýšením reálné peněžní zásoby. Spočítejte rovnovážné úrovně celkového produktu a úrokové míry ve výchozím a konečném stavu po navržených změnách, i všechny rovnovážné stavy průběžné. Situaci znázorněte rovněž graficky.

(2) Stav uzavřené třísektorové ekonomiky je charakterizován následujícími údaji:
- $C = 450 + 0,8Y_D$;
- $I = 900 - 50i$;
- $L = 7Y - 43i$;
- $G_a = 2000$;
- $TA_a = 3000$;
- $TR_a = 550$;
- $\frac{M}{P} = 5000$;
- $t = 0,3$.

Vláda chce dosáhnout zvýšení rovnovážné úrovně produktu (HDP, HNP) o 200 jednotek. Navrhněte mix fiskální a monetární politiky, jež tento cíl zajistí. Při návrhu fiskální politiky použijte současně změnu transferových plateb a autonomních daní, případně podle vlastního uvážení změnu daňové sazby a vládních nákupů. Fiskální expanzi doplňte navýšením reálné peněžní zásoby. Spočítejte rovnovážné úrovně celkového produktu a úrokové míry ve výchozím a konečném stavu po navržených změnách, i všechny rovnovážné stavy průběžné. Situaci znázorněte rovněž graficky.

Kontrolní otázky 7.2

(1) Charakterizujte fiskální a monetární politiku. Jaké má fiskální i monetární politika nástroje k regulaci stavu ekonomiky?
(2) Vysvětlete, co je multiplikátor fiskální a co monetární politiky.
(3) Jaké máme druhy fiskální politiky? Popište je a uveďte, čím jich můžeme dosáhnout.
(4) Jaké máme druhy monetární politiky? Popište je a uveďte, čím jich můžeme dosáhnout.
(5) Znázorněte druhy fiskální i monetární politiky graficky (pomocí posunů a změn sklonů křivek IS a LM).

Problém k zamyšlení 7.2

Uzavřená třísektorová ekonomika se nachází ve stavu rozpočtového schodku. Promyslete si, co všechno byste mohli navrhnout za fiskální nebo monetární změny, abyste rozpočtový schodek snížili. K řešení tohoto problému využijte modelu IS-LM.

Závěrečná část

Literatura

[1] ALLEN, R. G. D.: *Matematická ekonomie*, Academia Praha, 1971.
[2] ALLEN, R. G. D.: *Matematická ekonomie II*, Academia Praha, 1971.
[3] BAUEROVÁ, D.; HRBÁČ, L.: *Matematická ekonomie I a II*, VŠB Ostrava, 1996.
[4] BRANSON, W. A.: *Macroeconomic Theory and Policy*, Harper & Row Publishers, New York, 1989.
[5] DORNBUSCH, R.; FISCHER, S.: *Makroekonomie*, SPN a Nadace Economics, Praha, 1994
[6] DOŠLÁ, Z.; DOŠLÝ, O.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, Masarykova univerzita v Brně, Brno, 1994.
[7] DOŠLÁ, Z.; DOŠLÝ, O.: *Metrické prostory*, Masarykova univerzita v Brně, Brno, 2000.
[8] DOŠLÁ, Z.; KUBEN, J.: *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*, Masarykova univerzita v Brně, Brno, 2003.
[9] GANDOLFO, G.: *Economic Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1997.
[10] GILLMAN, L.; McDOWELL,R.H.: *Matematická analýza*, SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1983.
[11] HOŘEJŠÍ, B.; SOUKUPOVÁ, J.; MACÁKOVÁ, L.; SOUKUP, J.: *Mikroekonomie*, 4. rozšířené vydání, Management Press, Praha, 2007.
[12] NOVÁK, V.: *Integrální počet v R*, Masarykova univerzita v Brně, Brno, 2001.
[13] RÁB, M.: *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*, Masarykova univerzita v Brně, Brno, 1998.
[14] OŠŤÁDALOVÁ, E.; POLOUČKOVÁ, A.: *Diferenciální a diferenční rovnice*, VŠB-TU Ostrava, Ostrava, 2003.
[15] PRÁGEROVÁ, A.: *Diferenční rovnice*, SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1971.
[16] SAMUELSON, P.A.; NORDHAUS, W. D.: Ekonomie, Svoboda, Praha, 1995.
[17] SOJKA, M.: *Monetární politika evropské centrální banky a její teoretická východiska pohledem postkeynesovské ekonomie*, Politická ekonomie, 2010, vydání 1, s. 3 - 19.
[18] THE OFFICIAL WEB SITE OF THE NOBEL PRIZE: *John R. Hicks - autobiography*, 1972, dostupné z <`http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1972/hicks-autobio.html`>
[19] TURNOVSKY, S. J.: *Methods of Macroeconomic Dynamics*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, Massachusetts Institute of Technology, 2000.
[20] ZIMMERMANN, K.: *Úvod do matematické ekenomie*, Karolinum, Praha, 2002.

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Výsledky příkladů k procvičení

Příklady k procvičení 2.1

(2) konstantní v každém bodě definičního oboru; funkce, která má extrém, v bodě extrému

(3) v intervalech $[0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je sklon klesající, v intervalech $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je sklon klesající

Příklady k procvičení 2.2

(1) (a) $Af = 2 + \frac{5}{x}$, $Mf = 2$, (b) $Af = x$, $Mf = 2x$

(2) (a) $Af = 1$ pro $x < 3$, $Af = \frac{6}{x} - 1$ pro $x \geq 3$, $Mf = 1$ pro $x < 3$, $Mf = -1$ pro $x \geq 3$, (b) Mf je nespojitá, Tf tedy nebyla diferencovatelná v bodě $x = 3$

(3) $18\frac{2}{3}$ jednotek výstupu

(4) (a) $T\pi(Q) = -40Q^3 - 60Q^2 + 111600 - 17800$, (b) $Q \in (0, 30)$, (c) $Q \in (30, \infty)$, (d) $Q = 30$, (e) $\pi''(30) < 0$, (f) $7320\frac{2}{3}$ zisk z jedné jednotky výstupu

Příklady k procvičení 2.3

(1) $E_{MY} = \frac{\frac{M_2 - M_1}{\frac{M_2 + M_1}{2}}}{\frac{Y_2 - Y_1}{\frac{Y_2 + Y_1}{2}}}$, $E_{MY} = \frac{M(M(Y))}{A(M(Y))}$, $E_{XY} = \frac{\frac{X_2 - X_1}{\frac{X_2 + X_1}{2}}}{\frac{Y_2 - Y_1}{\frac{Y_2 + Y_1}{2}}}$, $E_{XY} = \frac{M(X(Y))}{A(X(Y))}$

(2) (a) $|E_{DP}| = 0,71$; neelastická, (b) tržby se zvýší

(3) elastická v intervalu $x \in (3, 6)$, neelastická v intervalu $x \in (0, 3)$, jednotkově elastická v bodě $x = 3$

(4) (a) $|E_{DP}(3)| = \frac{3}{4}$, neelastická, (b) tržba se zvýší z 15 jednotek na 16 jednotek

(5) (a) zvýší se o $13,4\%$, (b) zvýší se o 36%

Příklady k procvičení 3.1

(1) $P_t = 1\left(-\frac{3}{4}\right)^t + 3$, konverguje

(2) $P_t = -1\left(-\frac{3}{2}\right)^t + 4$, diverguje

(3) $P_t = -2(-1)^t + 3$, cyklus

(4) $P_t = 1\left(-\frac{4}{3}\right)^t + 3$, diverguje

(5) $P_t = -1\left(-\frac{2}{3}\right)^t + 4$, konverguje

(6) $P_t = -2(-1)^t + 3$, cyklus

Příklady k procvičení 3.2

(1) $P(t) = 2e^{-3t} + 3$, konverguje

(2) $P(t) = -1e^{-t} + 3$, konverguje

(3) $P(t) = -2e^{t} + 6$, diverguje

(4) $P(t) = -6e^{-\frac{1}{3}t} + 7$, konverguje

Příklady k procvičení 4.1

(1) $q_1 = 13\frac{1}{3}$ ks, $q_2 = 8$ ks
(2) $q_1 = 13\frac{1}{3}$ ks, $q_2 = 8$ ks

Příklady k procvičení 4.2

(1) $Q^* = 9$ jednotek výstupu
(2) (a) $FC(Q) = 500$, $VC(Q) = 0,2Q^3 - 3Q^2 + 50Q$, $AFC(Q) = \frac{500}{Q}$, $MFC(Q) = 0$, $AVC(Q) = 0,2Q^2 - 3Q + 50$, $MVC(Q) = 0,6Q^2 - 6Q + 50$, $AC(Q) = 0,2Q^2 - 3Q + 50 + \frac{500}{Q}$, $MC(Q) = 0,6Q^2 - 6Q + 50$, $AR(Q) = -0,1Q^2 + 10Q + 2$, $MR(Q) = -0,3Q^2 + 20Q + 2$, $T\pi(Q) = -0,3Q^3 + 13Q^2 - 48Q - 500$, $A\pi(Q) = -0,3Q^2 + 13Q - 48 - \frac{500}{Q}$, $M\pi(Q) = -0,9Q^2 + 26Q - 48$, (b) $Q_{BZ_1} = 9,84$ jednotek výstupu; $Q_{BZ_2} = 37,96$ jednotek výstupu; $Q_{maxT\pi} = 26,9$ jednotek výstupu; $Q_{maxA\pi} = 23,21$ jednotek výstupu; $Q_{BU_1} = 4,08$ jednotek výstupu; $Q_{BU_2} = 39,25$ jednotek výstupu

Příklady k procvičení 4.3

(1) (a)$MP_L = 288 + 120L - 12L^2$, $AP_L = 288 + 60L - 4L^2$, (b) $MP_L(2) = 480$, $AP_L(2) = 392$, (c) $L = 5$ jednotek práce
(2) $\frac{5}{6}$
(3) (a) 817,5 Kč/hod; (b) 375,76 jednotek produkce/hod
(4) (a) Cobb-Douglasova, klesající výnosy z rozsahu, (b) lineární, konstantní výnosy z rozsahu, (c) Cobb-Douglasova, rostoucí výnosy z rozsahu

Příklady k procvičení 5.1

(1) (a) $C_a = 300$, $c = 0,7$; $Y = 1000$, (b) $S(Y) = 0,3Y - 300$, $S_a = -300$, $s = 0,3$
(2) $C(Y) = 0,6Y + 867$, $S(Y) = 0,4Y - 867$

Příklady k procvičení 5.2

(1) (a) $I_a = 375$, $b = 25$
(2) $\Delta K = 100$
(3) (a) $K(t) = \frac{7}{4}t^4 + t^3 + 31$, (b) $\Delta K = \frac{11}{4}$

Příklady k procvičení 5.3

(1) (a) $k = 4$, $h = 37$, (b) $i = 12\%$
(2) (a) $k = 5$, $h = 21$, (b) $Y = 102$ mld. Kč

Příklady k procvičení 6.1

(1) (a) 4; (b) 10; (c) 3,12
(2) (a) 2,5; (b) 4,26; (c) 1,86
(3) (a) 1,82; (b) 1,36; (c) 1,41

(4) (a)

Úroveň důchodu	Úroveň spotřeby	Úroveň investic	Celkové výdaje
4200	3800	350	4150
4000	3650	350	**4000**
3800	3500	350	3850
3600	3350	350	3700
3400	3200	350	3550

(b) Důchod klesne o 600 mld. peněžních jednotek, snížení důchodu je větší než snížení investic. (c) o 200 mld. peněžních jednotek

(5) (a) $Y^* = 3425,695$ mld. Kč, $TA = 1720,278$ mld. Kč, $Y_D = 2330,417$ mld. Kč, $C(Y_D) = 2297,8128$ mld. Kč, (b) $Y^* = 3528,07$ mld. Kč, $TA = 1686,228$ mld. Kč, $Y_D = 2466,842$ mld. Kč, $C(Y_D) = 2400,1315$ mld. Kč, (c) $Y^* = 3971,5475$ mld. Kč, $TA = 1541,4643$ mld. Kč, $Y_D = 3055,0832$ mld. Kč, $C(Y_D) = 2841,3124$ mld. Kč, (d) $Y^* = 3459,82$ mld. Kč, $TA = 1733,928$ mld. Kč, $Y_D = 2375,892$ mld. Kč, $C(Y_D) = 2331,919$ mld. Kč, (e) $Y^* = 3505,775$ mld. Kč, $TA = 1752,31$ mld. Kč, $Y_D = 2378,465$ mld. Kč, $C(Y_D) = 2333,8488$ mld. Kč, (f) $Y^* = 3480,295$ mld. Kč, $TA = 1742,118$ mld. Kč, $Y_D = 2363,177$ mld. Kč, $C(Y_D) = 2322,3828$ mld. Kč, (g) $Y^* = 4285,9375$ mld. Kč, $\Delta Y = 860,2425$ mld. Kč

(6) (a) $Y^* = 2750,7725$ mld. Kč, $TA = 1450,309$ mld. Kč, $Y_D = 1925,4635$ mld. Kč, $C(Y_D) = 1994,0976$ mld. Kč, $NX(Y) = -364,1545$ mld. Kč, (b) $Y^* = 2825,585$ mld. Kč, $NX(Y) = -379,117$ mld. Kč, (c) $Y^* = 3061,01$ mld. Kč, $NX(Y) = -426,202$ mld. Kč, (d) $Y^* = 2775,71$ mld. Kč, $NX(Y) = -369,142$ mld. Kč, (e) $Y^* = 2809,2925$ mld. Kč, $NX(Y) = -375,8585$ mld. Kč, (f) $Y^* = 2790,6725$ mld. Kč, $NX(Y) = -372,1345$ mld. Kč, (g) $Y^* = 2826,5825$ mld. Kč, $NX(Y) = -322,3165$ mld. Kč, (h) $Y^* = 2826,5825$ mld. Kč, $NX(Y) = -322,3165$ mld. Kč, (i) $Y^* = 3450,25$ mld. Kč, $\Delta Y = 699,4775$ mld. Kč

Příklady k procvičení 6.2

(1) Robertsonovské, $Y_t = -2300 \cdot 0,8^t + 3200$
(2) Lundbergovské, $Y_t = 50 \cdot 0,7^t + 1400$
(3) Robertsonovské, $Y(t) = -330e^{-1,05t} + 1000$
(4) Lundbergovské, $Y(t) = 20e^{-1,25t} + 5080$

Příklady k procvičení 7.1

(1) (a) Y^* vzroste, i^* vzroste, (b) Y^* vzroste, i^* vzroste, (c) Y^* poklesne, i^* poklesne, (d) Y^* poklesne, i^* poklesne, (e) Y^* vzroste, i^* vzroste, (f) i^* vzroste, Y^* poklesne, (g) i^* poklesne, Y^* vzroste, (h) i^* vzroste, Y^* poklesne

(2) (a) $Y^* = 723,6$ mld. Kč, $i^* = 3,62\%$, rozpočtový schodek $-19,1$ mld. Kč, (b) $Y^* = 700,95$ mld. Kč, $i^* = 3,14\%$, rozpočtový schodek $-4,8$ mld. Kč, (c) $Y^* = 727,85$ mld. Kč, $i^* = 3,71\%$, rozpočtový schodek $-23,04$ mld., (d) $Y^* = 718,558$ mld. Kč, $i^* = 3,73\%$, rozpočtový schodek $-20,36$ mld., (e) $Y^* = 780,87$ mld. Kč, $i^* = 2,47\%$, rozpočtový schodek $-4,78$ mld.

Rejstřík