Derivace funkcí jedné reálné proměnné

Z definice derivace vypočtěte derivace funkcí v bodě x_0:

1. $f(x) = c$, kde $c \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = \sqrt{x}$
4. $f(x) = x^n$
5. $f(x) = \sin x$
6. $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$
7. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$

Zderivujte funkce:

1. $f(x) = 3x^2 - 158x + 241$
2. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[5]{x} + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^4} - \frac{1}{x^3\sqrt{x}}$
3. $f(x) = \cos x + 3^x$
4. $f(x) = \mathrm{e}^x \tan x$
5. $f(x) = \frac{x^2+\cot x}{2^x}$

Odvoďte pravidla pro derivování funkcí:

1. $f(x) = \tan x$
2. $f(x) = \arcsin x$
3. $f(x) = \arccos x$
4. $f(x) = \arctan x$
5. $f(x) = \log_a x$

Zderivujte funkce:

1. $f(x) = (3x^2 - 158x + 241)^{100}$
2. $f(x) = \sqrt{\cos x} + \sin\left(\sqrt[5]{x+5}\right) + \ln\ln x$
3. $f(x) = \frac{5}{6}\log_3 \frac{x^2+1}{x^2-1}$
4. $f(x) = \log^4 x^3$
5. $f(x) = \sin^n x \cos x$, kde $n \in \mathbb{N}$
6. $f(x) = \sin(\cos(\tan x)))$
7. $f(x) = 2^{x\cos(x^3)}$
8. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$
9. $f(x) = \ln\cos 10^{\sqrt{2x-3}}$
10. $f(x) = \mathrm{tg}\, \mathrm{e}^{\sqrt{3x^2-2}}$
11. $f(x) = \frac{\sin^3 5x}{\sqrt{2x^3-3x+1}}$
12. $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{tg}\, x}}{\cos x^2}$
13. $f(x) = \frac{x^3}{g(\sin x+1)}$, kde $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce diferencovatelná pro každé $x \in \mathbb{R}$

Odvoďte vztahy pro derivace funkcí:

1. $f(x) = \sinh x$
2. $f(x) = \cosh x$
3. $f(x) = \tanh x$

Derivujte funkce:

1. $f(x) = x^x$
2. $f(x) = x^{x^x}$
3. $f(x) = x^{\sin 3x}$
4. $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$

Spočítejte druhé derivace funkcí:

1. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$
3. $f(x) = (x+30)^2$
4. $f(x) = x^x$
5. $f(x) = x^2 \mathrm{sgn}\, x$ v bodě $x_0 = 0$

Spočítejte n-té derivace funkcí:

1. $f(x) = \mathrm{e}^x$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$
3. $f(x) = \sin x$
4. $f(x) = x^m$, kde $m \in \mathbb{N}$
5. $f(x) = a^x$, kde $a \in \mathbb{R}^+$

Tečny ke grafům funkcí a úhly křivek:

1. Pod jakým úhlem protínají grafy funkcí $y = \log x$, $y = \ln x$ a $y = \mathrm{tg}\, x$ osu x? $[23°29'; 45°; 45°]$
2. Pod jakým úhlem seče graf funkce $f_1(x) = \frac{1}{x}$ graf funkce $f_2(x) = \sqrt{x}$? $[71°34']$
3. Napište rovnici tečny a normály ke křivce $y = 2\sqrt{2}\sin x$ v bodě $\left[\frac{\pi}{4}; y_0\right]$. $\left[t:\ 2x - y + 2 - \frac{\pi}{2} = 0 \quad n:\ x + 2y - 4 - \frac{\pi}{4} = 0\right]$
4. Najděte tečnu ke grafu funkce $y = \frac{3x-4}{2x-3}$, která je rovnoběžná s přímkou $2x + 2y + 3 = 0$. $[t_1:\ x + y - 2 = 0 \quad t_2:\ x + y - 4 = 0]$

Několik fyzikálních úloh:

1. Dráha hmotného bodu konajícího rovnoměrně zrychlený pohyb závisí na čase vztahem $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$. Jak na čase závisí rychlost a zrychlení hmotného bodu?
2. Dráha hmotného bodu závisí na čase vztahem $s(t) = 2 + \mathrm{e}^{-t}$. Jak na čase závisí rychlost a zrychlení hmotného bodu?
3. Okamžitá výchylka tlumených kmitů s nulovou počáteční fází závisí na čase podle vztahu $y = y_m \mathrm{e}^{-bt}\sin(\omega t)$. Určete závislost okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení tohoto pohybu na čase.
4. Křivka vyjadřující Maxwellovo rozdělení rychlostí molekul ideálního plynu, jehož molekuly mají hmotnost m_0, je dána funkčním předpisem
$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m_0}{kT}\right)^3}\, v^2 \mathrm{e}^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}\,.$$
Určete pro danou teplotu T nejpravděpodobnější rychlost v_p, která odpovídá maximu funkce f.