Příklad s šroubovicí

Uvažujme šroubovici $r(t) = [a\cos t; a\sin t; bt]$.

1. Najděte její singulární body.

   Řešení: Nejsou.

2. Určete délku jednoho závitu šroubovice.

   Řešení: $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$.

3. Najděte tečný vektor šroubovice v obecném bodě $r(t)$.

   Řešení: $\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t; a\cos t; b)$.

4. Najděte tečnu šroubovice v bodě $r(\frac{\pi}{2})$.

   Řešení: $t = \left[0; a; b\frac{\pi}{2}\right] + [\![(-a; 0; b)]\!]$.

5. Najděte evolventu (neboli involutu) šroubovice, počátek odvalování volte v bodě $r(0)$.

   Řešení: $\tilde{r}(t) = [a\cos t + at\sin t; a\sin t - at\cos t; 0]$.

6. Parametrizujte šroubovici obloukem, počátek měření délky oblouku volte v bodě $r(0)$.

   Řešení:

   $$r(s) = \left[a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}; a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right].$$

7. Najděte inflexní body šroubovice.

   Řešení: Nejsou.

8. Najděte normálový vektor šroubovice v obecném bodě $r(t)$.

   Řešení: $\mathbf{N}(t) = (-\cos t; -\sin t; 0)$.

9. Najděte normálu šroubovice v bodě $r(\frac{\pi}{2})$.

   Řešení: $n = \left[0; a; b\frac{\pi}{2}\right] + [\![(0; -1; 0)]\!]$.

10. Najděte evolutu (fokální křivku) šroubovice.

    Řešení: $\hat{r}(t) = \left[-\frac{b^2}{a}\cos t; -\frac{b^2}{a}\sin t; bt\right]$

11. Popište Frenetův repér šroubovice

    (a) s využitím vztahu $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$,

    (b) Gram-Schmidtovou ortonormalizací soustavy vektorů $\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}$ (viz též skripta, str. 15).

    Řešení: $\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t; a\cos t; b)$, $\mathbf{N}(t) = (-\cos t; -\sin t; 0)$, $\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t; -b\cos t; a)$.

12. Najděte binormálu šroubovice v bodě $r(\frac{\pi}{2})$.

    Řešení: $b = \left[0; a; b\frac{\pi}{2}\right] + [\![(b; 0; a)]\!]$.

13. Napište parametrické rovnice oskulační, normálové a rektifikační roviny šroubovice v bodě $r(\frac{\pi}{2})$.

Řešení: $\rho_{\mathrm{osk}} = \left[0; a; b\frac{\pi}{2}\right] + [\![(-a; 0; b), (0; -1; 0)]\!]$, $\rho_{\mathrm{norm}} = \left[0; a; b\frac{\pi}{2}\right] + [\![(0; -1; 0), (b; 0; a)]\!]$, $\rho_{\mathrm{rekt}} = \left[0; a; b\frac{\pi}{2}\right] + [\![(-a; 0; b), (b; 0; a))]\!]$.

14. Spočtěte křivost κ a poloměr křivosti R šroubovice v obecném bodě $r(t)$. Křivost počítejte

(a) z definice křivosti $\kappa = \frac{\|\dot{\mathbf{T}}\|}{\|\dot{\mathbf{r}}\|}$,

(b) z definice zobecněných křivostí $\chi_k = \frac{\dot{\mathbf{e}}_k \cdot \mathbf{e}_{k+1}}{\|\dot{r}\|}$, kde položíme $k = 1$,

(c) s využitím vztahu pro výpočet křivosti pouze z derivací parametrizace $\kappa = \frac{\sqrt{(\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}})(\ddot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}})-(\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}})^2}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}$,

(d) s využitím vztahu

$$\kappa = \frac{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}.$$

Řešení: $\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}$, $R = \frac{a^2+b^2}{a}$

15. Spočtěte torzi šroubovice
(a) z definice zobecněných křivostí $\chi_k = \frac{\dot{\mathbf{e}}_k \cdot \mathbf{e}_{k+1}}{\|\dot{r}\|}$, kde položíme $k = 2$,
(b) s využitím vztahu

$$\tau(t) = \frac{\det\begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{pmatrix}}{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|^2}.$$

Řešení: $\tau = \frac{b}{a^2+b^2}$.

16. Jak se pozná, že je nějaká křivka rovinná?

17. Ukažte, že šroubovici lze zadat také obecnými rovnicemi jako průnik dvou ploch. Těmi mohou být např. helikoid s obecnou rovnicí $y \cos\frac{z}{b} = x \sin\frac{z}{b}$ a rotační válcová plocha s obecnou rovnicí $x^2 + y^2 = a^2$.