Soustavy rovnic

Seminář z matematiky
A. Hlaváč, 2009

V tomto textu se budeme zabývat na konkrétních příkladech nejrůznějšími soustavami lineárních rovnic s důrazem na geometrickou interpretaci. Nejprve uveďme jedno důležité tvrzení, jehož budeme hojně využívat.

Frobeniova věta. *Soustava m lineárních rovnic o n neznámých má alespoň jedno řešení právě tehdy, když* $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \bar{A}$, *kde A je matice soustavy a $\bar{A}$ je rozšířená matice soustavy.*

Je dobré si všimnout, že Frobeniova věta je pouze kritériem řešitelnosti, o počtu řešení nám neříká nic. Příklady budeme řešit tak, že na základě Frobeniovy věty rozhodneme, zda řešení existuje a pak se pokusíme jej nalézt. Začněme od nejjednoduššího případu.

1 Jedna rovnice o jedné neznámé

Uvědomme si, že jedna rovnice o jedné neznámé je speciálním případem soustavy m rovnic o n neznámých pro $m = n = 1$. Řešení je samozřejmě jednoduché, ale pojďme se na tento triviální případ podívat s ohledem na to, co víme o maticích a řešení soustav lineárních rovnic.

1.1 Příklad

$$2x = 5 \tag{1}$$

- Matice soustavy je $\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$, rozšířená matice je $\bar{A} = \left(\begin{array}{c|c} 2 & 5 \end{array}\right)$.
- Pro jejich hodnosti platí $\operatorname{rk} A = 1$, $\operatorname{rk} \bar{A} = 1$ a podle Frobeniovy věty soustava *má* řešení.
- Řešením je $x = \frac{5}{2}$.
- Geometrický význam: Rovnice (1) je vlastně „rovnicí bodu na přímce“. (Podobně jako máme rovnici přímky v rovině nebo rovnici roviny v trojrozměrném prostoru.) Pohybujeme se tedy v jednorozměrném prostoru (na přímce) a hledáme nularozměrný bod P, jehož jediná souřadnice x vyhovuje zadání. Hledaným bodem je $\mathsf{P}\left[\frac{5}{2}\right]$.

Poznámka: Všimněte si, že např. pro rovnici $0x = 1$ platí $\operatorname{rk} A = 0$ (hodnost nulové matice je 0) a $\operatorname{rk} \bar{A} = 1$, rovnice tedy *nemá* řešení. Naopak pro rovnici $0x = 0$ platí $\operatorname{rk} A = 0$ a $\operatorname{rk} \bar{A} = 0$, rovnice proto *má* řešení, je jich nekonečně mnoho a jsou to všechna $x = t$, kde $t \in \mathbb{R}$, tedy celá přímka (jednorozměrný prostor).

2 Soustavy dvou rovnic o dvou neznámých

2.1 Příklad

$$\begin{array}{rrcr} x & +2y & = & 3 \\ -x & -y & = & 1 \end{array}$$

- Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, rozšířená matice je $\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$.
- Pro jejich hodnosti platí $\operatorname{rk} A = 2$, $\operatorname{rk} \bar{A} = 2$ a podle Frobeniovy věty soustava *má* řešení.
- Řešení můžeme získat Gaussovou eliminační metodou nebo Cramerovým pravidlem a je jím uspořádaná dvojice $[x, y] = [-5, 4]$. (V případě takto jednoduché soustavy můžeme samozřejmě použít i běžnou sčítací nebo dosazovací metodu.)
- Geometrický význam: Každá z rovnic je rovnicí přímky v rovině. Vyřešením soustavy jsme získali souřadnice jejich průsečíku $\mathsf{Q}[-5, 4]$.

2.2 Příklad

$$\begin{array}{rrcr} x & +y & = & 4 \\ 2x & +2y & = & -1 \end{array}$$

• Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, rozšířená matice je $\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{array}\right)$.
• Pro jejich hodnosti platí $\mathrm{rk}\, A = 1$, $\mathrm{rk}\, \bar{A} = 2$ a podle Frobeniovy věty soustava *nemá* řešení.
• Kdybychom se pokoušeli soustavu řešit Gaussovou eliminační metodou, došli bychom k nesmyslu „$0 = 1$“. Pokud bychom chtěli použít Cramerovo pravidlo, determinant soustavy by vyšel nulový (matice soustavy je totiž singulární) a nemohli bychom jím tudíž dělit při počítání kořenů.
• Geometrický význam: Každá z rovnic je rovnicí přímky v rovině. Soustava nemá řešení, přímky nemají žádný společný bod a jsou tudíž rovnoběžné.

2.3 Příklad

$$\begin{array}{rrcr} 3x & -2y & = & 1 \\ -9x & +6y & = & -3 \end{array}$$

• Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$, rozšířená matice je $\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ -9 & 6 & -3 \end{array}\right)$.
• Pro jejich hodnosti platí $\mathrm{rk}\, A = 1$, $\mathrm{rk}\, \bar{A} = 1$ a podle Frobeniovy věty soustava *má* řešení.
• Použijeme-li Gaussovu eliminační metodu, upravujeme standardně rozšířenou matici:
$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ -9 & 6 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.
Jedna z rovnic nám tedy „vypadla“ (je lineární kombinací druhé rovnice) a dostáváme tak jednu rovnici o dvou neznámých
$3x - 2y = 1$.
Velmi důležité!!! Pokud nám po převedení na schodovitý tvar zůstane k rovnic o l neznámých a $k < l$, musíme pro vyjádření neznámých použít $l - k$ nezávislých parametrů, které tradičně označujeme písmeny $t, s, r, \ldots$. Vlastně děláme to, že „přebytečné neznámé“ položíme rovny parametrům. V našem případě je $k = 1$ a $l = 2$, musíme proto zavést jeden parametr. Položíme $y = t$, kde $t \in \mathbb{R}$. Tedy
$3x - 2t = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t$.
Soustava má tedy *nekonečně mnoho řešení* a jsou jimi uspořádané dvojice $[x, y] = \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3}t, t\right]$, kde $t \in \mathbb{R}$. Všimněte si také, že pokud řešení napíšeme pěkně pod sebe

$$\begin{array}{rcll} x & = & \frac{1}{3} & +\frac{2}{3}t \\ y & = & & t\,, \end{array} \tag{2}$$

dostáváme parametrické rovnice přímky, která má obecný tvar $3x - 2y - 1 = 0$.
Poznámka: Kdyby se někdo rozhodl vzít za parametrickou neznámou x, tak je to také v tomto případě možné. Kdybychom položili $x = s$, řešení bychom zapsali ve tvaru $[x, y] = \left[s, -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}s\right]$, kde $s \in \mathbb{R}$. Obecně však *není jedno*, které neznámé položíme rovny parametrům! (Viz sekce 8.)
Ještě poznamenejme, že přestože zadaná soustava má řešení (má jich nekonečně mnoho), **nemůžeme k jejímu řešení použít Cramerovo pravidlo!** Matice soustavy je singulární, její determinant je tudíž nulový a nemůžeme jím dělit.
• Geometrický význam: Každá z rovnic je rovnicí přímky v rovině. Soustava má nekonečně mnoho řešení, přímky jsou tedy totožné. Jinak řečeno obě rovnice zadávají tutéž přímku s parametrickými rovnicemi (2).

3 Soustavy tří rovnic o třech neznámých

Projděme si postupně příklady na různé možnosti, které mohou nastat. V geometrické interpretaci se pak bude jednat o vzájemnou polohu tří rovin v prostoru.

3.1 Příklad

$$\begin{array}{rrrcr} 5x & +5y & +z & = & 2 \\ 3x & -4y & -3z & = & 1 \\ -2x & +y & +z & = & -1 \end{array}$$

• Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, rozšířená matice je $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$.
• Pro jejich hodnosti platí $\mathrm{rk}\, A = 3$, $\mathrm{rk}\, \bar{A} = 3$ a podle Frobeniovy věty soustava *má* řešení.
• Řešení můžeme získat Gaussovou eliminační metodou nebo Cramerovým pravidlem a je jím uspořádaná

trojice $[x, y, z] = [1, -1, 2]$.
• Geometrický význam: Každá z rovnic je rovnicí roviny v trojrozměrném prostoru. Vyřešením soustavy jsme získali souřadnice bodu, který je všem třem rovinám společný – jejich průsečík $\mathsf{R}[1, -1, 2]$. Je tedy jasná i jejich vzájemná poloha (roviny mají jediný společný bod R).

3.2 Příklad

$$\begin{array}{rrrcr} x & -y & +2z & = & 3 \\ 2x & & +z & = & 1 \\ & -2y & +3z & = & 5 \end{array}$$

• Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, rozšířená matice je $\bar{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right)$.
• Pro jejich hodnosti platí $\operatorname{rk} A = 2$, $\operatorname{rk} \bar{A} = 2$ (ověřte to!) a podle Frobeniovy věty soustava *má* řešení.
• Použijeme-li Gaussovu eliminační metodu, upravujeme standardně rozšířenou matici:
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
Jedna rovnice nám „vypadla“ (obdobně jako u příkladu 2.3), protože byla lineární kombinací ostatních rovnic, a získali jsme tak soustavu dvou rovnic o třech neznámých
$$\begin{array}{rrrcr} x & -y & +2z & = & 3\,, \\ & 2y & -3z & = & -5\,. \end{array}$$
Postupujeme analogicky jako u příkladu 2.3 a budeme tedy potřebovat $3 - 2 = 1$ parametr. Položíme $z = t$, kde $t \in \mathbb{R}$. Dosadíme do rovnic a dostaneme:

$$\begin{array}{rcrr} x & = & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}t \\ y & = & -\frac{5}{2} & +\frac{3}{2}t \\ z & = & & t\,. \end{array} \tag{3}$$

Soustava má tedy *nekonečně mnoho řešení* a jsou to všechny uspořádané trojice $[x, y, z] = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}t, t\right]$, kde $t \in \mathbb{R}$. (Zkuste si dosadit za t libovolné reálné číslo a udělat zkoušku.)
Poznamenejme také, že podobně jako v příkladu 2.3 zde není možné použít Cramerovo pravidlo, neboť matice soustavy je singulární (ověřte to!).

• Geometrický význam: Každá z rovnic je rovnicí roviny v trojrozměrném prostoru. Řešením soustavy je nekonečně mnoho bodů, které tvoří jednorozměrný podprostor, tedy přímku. Její parametrické rovnice jsou uvedeny výše (3). Jedná se tedy o případ, kdy tři roviny mají společnou průsečnici a žádné dvě z nich nesplývají. Zkuste si promyslet, proč jsou normálové vektory těchto tří rovin lineárně závislé.

3.3 Příklad

(Soustava je téměř shodná s předchozí, ale liší se v absolutním členu u první rovnice.)

$$\begin{array}{rrrcr} x & -y & +2z & = & 7 \\ 2x & & +z & = & 1 \\ & -2y & +3z & = & 5 \end{array}$$

• Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, rozšířená matice je $\bar{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right)$.
• Pro jejich hodnosti platí $\operatorname{rk} A = 2$, $\operatorname{rk} \bar{A} = 3$ (ověřte to!) a podle Frobeniovy věty soustava *nemá* řešení.
• Kdybychom se pokoušeli soustavu řešit Gaussovou eliminační metodou, došli bychom k nesmyslu „$0 = 1$“, podobně jako v příkladu 2.2.
• Geometrický význam: Každá z rovnic je rovnicí roviny v trojrozměrném prostoru. Soustava nemá řešení, roviny tedy nemají žádný společný bod. Podíváme-li se na jejich normálové vektory, zjistíme, že žádné dvě roviny nejsou rovnoběžné. Jedná se tedy o vzájemnou polohu, kdy tři roviny vymezí v prostoru nekonečně dlouhý trojboký hranol. Nebo to taky někomu třeba může připomínat stan. Normálové vektory těchto tří rovin jsou stejné jako v předchozím příkladu 3.2 a jsou lineárně závislé (proč?). Pokud z těchto tří rovnic vybereme vždy dvě a vyřešíme je jako soustavu dvou rovnic o třech neznámých, dostaneme parametrické rovnice tří rovnoběžných přímek v prostoru (budou to hrany toho nekonečného hranolu). Zkuste si to!

3.4 Příklad

$$\begin{array}{rrrcr} x & -y & -z & = & 2 \\ 2x & -2y & -2z & = & 4 \\ -3x & +3y & +3z & = & -6 \end{array}$$

• Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, rozšířená matice je $\bar{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & 3 & -6 \end{array}\right)$.

• Pro jejich hodnosti platí rk $A = 1$, rk $\bar{A} = 1$ (ověřte to!) a podle Frobeniovy věty soustava *má* řešení.

• Matice soustavy je singulární, Cramerovo pravidlo nepřipadá v úvahu. Podle Frobeniovy věty však řešení existuje, dostaneme ho běžnou Gaussovou eliminací. Elementárními úpravami rozšířené matice soustavy dostaneme
$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & 3 & -6 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.
Dvě rovnice nám „vypadly“ a zůstala jedna rovnice o třech neznámých
$x - y - z = 2$.
Budeme tedy potřebovat $3 - 1 = 2$ parametry. Položíme $z = t$ a $y = s$, kde $s, t \in \mathbb{R}$. Dosadíme do rovnice, a dostáváme

$$\begin{array}{rcrrr} x & = & 2 & +s & +t \\ y & = & & s & \\ z & = & & & t\,. \end{array} \tag{4}$$

Soustava má *nekonečně mnoho řešení* a jsou to všechny uspořádané trojice $[x, y, z] = [2 + t + s, s, t]$, kde $s, t \in \mathbb{R}$.

• Geometrický význam: Každá z rovnic je rovnicí roviny v trojrozměrném prostoru. Soustava má nekonečně mnoho řešení, roviny jsou tedy totožné. Jinak řečeno všechny tři rovnice zadávají tutéž rovinu. Získali jsme navíc velmi jednoduchým způsobem její parametrické vyjádření (4).

3.5 Příklad

$$\begin{array}{rrrcr} x & -y & -z & = & 2 \\ 2x & -2y & -2z & = & 7 \\ -3x & +3y & +3z & = & 1 \end{array}$$

Soustava se podobá soustavě z příkladu 3.4, liší se jen pravé strany.

• Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, rozšířená matice je $\bar{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 7 \\ -3 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right)$.

• Pro jejich hodnosti platí rk $A = 1$, rk $\bar{A} = 2$ (ověřte to!) a podle Frobeniovy věty soustava *nemá* řešení.

• Při pokusu o použití Gaussovy eliminace bychom narazili opět na nepravdivé tvrzení „$0 = 1$“.

• Geometrický význam: Každá z rovnic je opět rovnicí roviny v trojrozměrném prostoru. Soustava nemá řešení, neexistuje tedy žádný bod společný všem třem rovinám. Roviny mají po řadě normálové vektory $\vec{n}_1 = (1, -1, -1)$, $\vec{n}_2 = (2, -2, -2)$, $\vec{n}_3 = (-3, 3, 3)$, ty jsou na první pohled kolineární, roviny jsou proto rovnoběžné! Zkuste ověřit, zda některá dvojice rovin nesplývá.

3.6 Příklad

$$\begin{array}{rrrcr} x & -y & -z & = & 2 \\ x & +3y & -z & = & 1 \\ -3x & +3y & +3z & = & -8 \end{array}$$

• Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, rozšířená matice je $\bar{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 & -8 \end{array}\right)$.

• Pro jejich hodnosti platí rk $A = 2$, rk $\bar{A} = 3$ (ověřte to!) a podle Frobeniovy věty soustava *nemá* řešení.

• Při pokusu o použití Gaussovy eliminace bychom narazili opět na nepravdivé tvrzení „$0 = 1$“.

• Geometrický význam: Každá z rovnic je opět rovnicí roviny v trojrozměrném prostoru. Soustava nemá řešení, neexistuje tedy žádný bod společný všem třem rovinám. Pokud se podíváme na první dvě rovnice, zjistíme, že normálový vektor druhé roviny je 2-násobkem normálového vektoru první roviny. Jedná se tedy o případ dvou rovnoběžných rovin proťatých třetí rovinou s nimi různoběžnou. Můžete si zkusit spočítat obě dvě průsečnice, musejí vyjít rovnoběžné!

4 Homogenní soustavy

Zajímavým případem soustavy m rovnic o n neznámých je tzv. *homogenní soustava.* Ta se vyznačuje tím, že na pravé straně všech rovnic jsou nuly. **Tato soustava je vždy řešitelná!** Přidáním sloupce samých nul se totiž hodnost matice nezmění a hodnost matice soustavy je vždy stejná jako hodnost rozšířené matice ($\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \bar{A}$). Jedním z řešení je vždy bod $[x_1, x_2, x_3, \dots] = [0, 0, 0, \dots]$, v případě např. tří rovnic o třech neznámých je vždy řešením bod $[x, y, z] = [0, 0, 0]$. Tento bod může být buď jediným řešením, nebo je jedním z nekonečně mnoha řešení soustavy. Nazýváme ho *triviálním řešením.*

4.1 Příklad

Uvažujme soustavu z příkladu 3.1, pouze nahraďme pravé strany nulami.

$$\begin{array}{rrrcr} 5x & +5y & +z & = & 0 \\ 3x & -4y & -3z & = & 0 \\ -2x & +y & +z & = & 0 \end{array}$$

• Podle toho, co víme o homogenních soustavách je bod [0,0,0] řešením. (Dosazením do soustavy je jasné, že tomu tak je.) Navíc je tento bod jediným řešením. (Zkuste si tuto soustavu vyřešit Gaussovou eliminací nebo Cramerovým pravidlem.)
• Geometrický význam: Každá z rovnic je rovnicí roviny v trojrozměrném prostoru. Jsou to tedy 3 vzájemně různoběžné roviny mající jediný společný bod, a to bod $\mathsf{O}[0, 0, 0]$ (počátek souřadného systému).

4.2 Příklad

Uvažujme nyní soustavu z příkladu 3.2, a opět nahraďme pravé strany nulami.

$$\begin{array}{rrrcr} x & -y & +2z & = & 0 \\ 2x & & +z & = & 0 \\ & -2y & +3z & = & 0 \end{array}$$

• Podle toho, co víme o homogenních soustavách je bod [0,0,0] řešením. (Dosazením do soustavy je jasné, že tomu tak je.) Tento bod však není jediným řešením! Zkuste si tento příklad vyřešit úplně stejným postupem jako příklad 3.2 a zjistíte, že řešením jsou všechny uspořádané trojice ve tvaru $[x, y, z] = \left[-\frac{1}{2}t, \frac{3}{2}t, t\right]$, kde $t \in \mathbb{R}$.
• Geometrický význam: Každá z rovnic je rovnicí roviny v trojrozměrném prostoru. Počátek souřadného systému (bod $\mathsf{O}[0, 0, 0]$) je určitě řešením. Avšak úplným řešením soustavy je jednodimenzionální podprostor, tedy přímka. Ta má parametrické rovnice
$x = -\frac{1}{2}t$, $y = \frac{3}{2}t$, $z = t$. Tato přímka zjevně prochází počátkem souřadného systému.

5 Soustavy čtyř rovnic o čtyřech neznámých

Upozorňuji, že se začínáme pohybovat v prostorech dimenze vyšší než 3. Snažit se něco si představit bude již komplikovanější, ne-li nemožné. Spíše se budeme pokoušet hledat analogie s prostory nižších dimenzí: 0 (bod), 1 (přímka), 2 (rovina) a 3 (trojrozměrný prostor).
Poznámka: Pokud by se někdo rozhodl studovat tuto problematiku podrobněji (nebo se v tomto textu začal trochu víc šťourat), tak připomínám, že pod pojmem „prostor“, resp. „podprostor“ mám na mysli afinní prostor, resp. podprostor. Pro středoškolskou představu je však intuitivní chápání tohoto pojmu, myslím, dostačující.

5.1 Příklad

Kvůli přehlednosti budeme neznámé číslovat dolními indexy.

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +x_4 & = & 3 \\ x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = & 5 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & -2x_4 & = & -4 \end{array}$$

• Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, rozšířená matice je $\bar{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & -4 \end{array}\right)$.
• Pro jejich hodnosti platí $\operatorname{rk} A = 4$, $\operatorname{rk} \bar{A} = 4$ (ověřte to!) a podle Frobeniovy věty soustava *má* řešení.
• Řešení můžeme získat Gaussovou eliminační metodou nebo Cramerovým pravidlem a je jím uspořádaná

čtveřice $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [1, -1, 0, 3]$.
• Geometrický význam:
Zastavme se na chvíli u pojmu *nadrovina*. Nadrovinou je obecně podprostor dimenze o jedna nižší než prostor, ve kterém pracujeme. Tedy
∗ nadrovinou v přímce (dim $= 1$) je bod (dim $= 0$),
∗ nadrovinou v rovině (dim $= 2$) je přímka (dim $= 1$),
∗ nadrovinou v trojrozměrném prostoru (dim $= 3$) je rovina (dim $= 2$),
∗ nadrovinou ve čtyřrozměrném prostoru (dim $= 4$) je trojrozměrný podprostor (dim $= 3$),
∗ nadrovinou v pětirozměrném prostoru (dim $= 5$) je čtyřrozměrný podprostor (dim $= 4$), atd.
Není na tom nic složitého, jen u dimenzí 1, 2 a 3 se dostáváme do kolize s tradičně používanými pojmy – neříkáme „jednorozměrná nadrovina v dvourozměrném afinním prostoru“, ale prostě řekneme *přímka v rovině.* U prostorů vyšších dimenzí už takovéto zjednodušené názvosloví nemáme a musíme prostě hovořit o *nadrovinách.*
Poznámka: Nadrovina je charakterizována *normálovým vektorem* analogicky např. s rovinou v trojrozměrném prostoru. Např. první rovnice v tomto příkladu určuje trojrozměrnou nadrovinu s normálovým vektorem $\vec{n} = (2, 2, -3, 1)$, který je na ni kolmý. Toho můžeme využít např. při vyšetřování vzájemné polohy nadrovin.

Když jsme řešili soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, měli jsme vlastně rovnice dvou přímek v rovině. Tedy rovnice dvou jednorozměrných nadrovin v dvourozměrném prostoru.

Když jsme řešili soustavy tří rovnic o třech neznámých, měli jsme vlastně rovnice tří rovin v trojrozměrném prostoru. Tedy rovnice tří dvourozměrných nadrovin v trojrozměrném prostoru.

Posuňme se bez zbytečných zábran ještě o dimenzi výše! Řešíme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých, máme tedy rovnice **čtyř trojrozměrných nadrovin v čtyřrozměrném prostoru**. A je to. Konečně víme, co vlastně z geometrického hlediska počítáme. ☺

Řešením zadané soustavy je tedy bod $\mathsf{S}[1, -1, 0, 3]$. Trojrozměrné nadroviny jsou v takové vzájemné poloze, že se protínají v jediném bodě, a tím je bod S.

5.2 Příklad

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -4x_4 & = & -4 \\ -x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & = & -1 \\ & x_2 & +x_3 & -3x_4 & = & -3 \\ 5x_1 & +2x_2 & & +4x_4 & = & 4 \end{array}$$

• Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, rozšířená matice je $\bar{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 2 & -4 & -4 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -3 \\ 5 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$.
• Pro jejich hodnosti platí rk $A = 3$, rk $\bar{A} = 3$ (ověřte to!) a podle Frobeniovy věty soustava *má* řešení.
• Jak asi lze tušit v analogii např. se soustavami 3 rovnic o 3 neznámých, bude mít soustava nekonečně mnoho řešení. Použijeme-li Gaussovu eliminační metodu, při převádění na schodovitý tvar nám jedna rovnice „vypadne“, neboť je lineární kombinací zbývajících tří rovnic. Takže se nám soustava redukuje na soustavu 3 rovnic o 4 neznámých. Potřebujeme $4 - 3 = 1$ parametr. Položíme jednu z neznámých rovnou parametru, takže např. $x_4 = t$, kde $t \in \mathbb{R}$, a ostatní neznámé vyjádříme pomocí t. Děláme to úplně stejně jako v příkladu 3.2, jen máme o jeden řádek a o jednu neznámou více. Dostáváme

$$\begin{array}{rcrr} x_1 & = & 0 & \\ x_2 & = & 2 & -2t \\ x_3 & = & -5 & +5t \\ x_4 & = & & t\,. \end{array} \tag{5}$$

Řešením jsou všechny uspořádané čtveřice $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [0, 2 - 2t, -5 + 5t, t]$, kde $t \in \mathbb{R}$.
Poznámka: Všimněte si také, že v tomto případě **nelze** vzít za parametrickou neznámou x_1. Tato neznámá je nulová pro všechna t a nemohli bychom pomocí ní vyjádřit ostatní neznámé! Jak tedy poznáme, které neznámé jsou *hlavní* a které jsou *parametrické*? Podívejte se do sekce 8.
• Geometrický význam: Každá z rovnic je opět rovnicí trojrozměrné nadroviny ve čtyřrozměrném prostoru.

Tyto čtyři trojrozměrné nadroviny jsou ve čtyřrozměrném prostoru umístěny tak, že jejich průnikem je přímka (jednorozměrný podprostor) s parametrickými rovnicemi (5). Z parametrických rovnic můžeme vyčíst souřadnice bodu a směrového vektoru úplně stejně, jak jsme zvyklí, jen přibude jedna souřadnice: $\mathsf{A}[0, 2, -5, 0]$, $\vec{u} = (0, -2, 5, 1)$.

5.3 Příklad

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & & +3x_4 & = & 1 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & & = & 2 \\ 2x_1 & +5x_2 & -x_3 & +9x_4 & = & 5 \\ & x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & 3 \end{array}$$

• Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, rozšířená matice je $\bar{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right)$.

• Pro jejich hodnosti platí $\operatorname{rk} A = 2$, $\operatorname{rk} \bar{A} = 2$ (ověřte to!) a podle Frobeniovy věty soustava *má* řešení.

• Jak asi lze tušit, bude mít soustava nekonečně mnoho řešení. Použijeme-li Gaussovu eliminační metodu, při převádění ma schodovitý tvar nám dvě rovnice „vypadnou“, neboť jsou lineární kombinací zbývajících rovnic. Takže se nám soustava redukuje na soustavu 2 rovnic o 4 neznámých. Potřebujeme tedy $4 - 2 = 2$ parametry. Položíme dvě neznámé rovny parametrům, takže např. $x_4 = t$, $x_3 = s$ kde $s, t \in \mathbb{R}$, a ostatní neznámé vyjádříme pomocí s a t. Děláme to úplně stejně jako v příkladu 3.4, jen máme o jeden řádek a o jednu neznámou více. Dostáváme

$$\begin{array}{rcrrr} x_1 & = & -5 & -2s & +3t \\ x_2 & = & 3 & +s & -3t \\ x_3 & = & & s & \\ x_4 & = & & & t\,. \end{array} \tag{6}$$

Řešením jsou všechny uspořádané čtveřice $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [-5 - 2s + 3t, 3 + s - 3t, s, t]$, kde $s, t \in \mathbb{R}$.

• Geometrický význam: Opět je každá z rovnic rovnicí trojrozměrné nadroviny ve čtyřrozměrném prostoru. Tyto čtyři trojrozměrné nadroviny jsou ve čtyřrozměrném prostoru umístěny tak, že jejich průnikem je rovina (dvourozměrný podprostor) s parametrickými rovnicemi (6). Tato rovina je určena bodem $A[-5, 3, 0, 0]$ a směrovými vektory $\vec{u} = (-2, 1, 1, 0)$ a $\vec{v} = (3, -3, 0, 1)$, což lze snadno vyčíst z parametrických rovnic.

5.4 Příklad

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +x_2 & -x_3 & & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & & +x_4 & = & 1 \\ -x_1 & & +x_3 & +x_4 & = & -1 \\ 3x_1 & & -2x_3 & & = & 3 \end{array}$$

Pro tuto soustavu platí $\operatorname{rk} A = 3$, $\operatorname{rk} \bar{A} = 4$ (přesvědčte se o tom!) a soustava tedy *nemá* řešení. Geometricky by se jednalo o případ, kdy čtyři nadroviny nemají žádný společný bod. Můžete se zamyslet nad tím, jaká by mohla být jejich vzájemná poloha.

Poznámka 1: Tak jako v 3-rozměrném prostoru neexistuje obecná rovnice přímky, neexistuje ve 4-rozměrném prostoru obecná rovnice roviny!
Přímku v 3-rozměrném prostoru můžeme zapsat *dvěma* obecnými rovnicemi (jako průsečnici dvou rovin). Stejně tak rovinu ve 4-rozměrném prostoru můžeme zapsat *dvěma* obecnými rovnicemi (jako průnik dvou trojrozměrných nadrovin).
Poznámka 2: Pokud bychom chtěli zapsat *přímku* ve 4-rozměrném prostoru, potřebovali bychom *tři* obecné rovnice! (Viz příklad (5.2)). Přímka ve 4-rozměrném prostoru tedy může být zadána jako průnik tří trojrozměrných nadrovin. Parametrické vyjádření je v tomto ohledu asi poněkud výhodnější.
Poznámka 3: Ve čtyřrozměrném prostoru nám mohou vycházet i poněkud „podivné“ věci, které nemají v trojrozměrném prostoru obdoby. Například se můžeme setkat se dvěma mimoběžnými rovinami. (Můžete si to zkusit představit ☺). Nebo se může stát, že dvě roviny mají jen jediný společný bod. Tuto situaci jsme si vlastně už spočítali v příkladu 5.1: Máme čtyři rovnice trojrozměrných nadrovin. Vezmeme některou dvojici rovnic a ta nám určuje 2-rozměrnou rovinu (viz Poznámka 1). Zbývající dvojice rovnic taktéž určuje (nějakou jinou) rovinu. Tyto 2 roviny mají jediný společný bod $\mathsf{S}[1, -1, 0, 3]$.

6 Soustavy pěti (a více) rovnic o pěti (a více) neznámých

Tyto soustavy budeme řešit zcela analogicky jako v předchozích příkladech, jen nám přibývají neznámé a v geometrické interpretaci se pak s každou další neznámou posouváme o dimenzi výše.

6.1 Příklad

$$\begin{array}{rrrrrcr} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & -2x_4 & +x_5 & = & 1 \\ 5x_1 & +2x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & -x_2 & -3x_3 & +2x_4 & & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +6x_3 & -x_4 & & = & 0 \\ 6x_1 & -4x_2 & & -3x_4 & & = & 0 \end{array}$$

Zkuste si soustavu vyřešit Gaussovou eliminací nebo Cramerovým pravidlem a přesvědčte se, že řešením je uspořádaná pětice $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = [1, 0, 0, 2, 3]$. Geometrický význam je takový, že řešíme průnik **pěti čtyřrozměrných nadrovin v pětirozměrném prostoru**. Tyto nadroviny jsou zvoleny tak, že jejich průnikem je jediný bod $\mathsf{T}[1, 0, 0, 2, 3]$.

7 Soustavy, kdy je počet rovnic vyšší než počet neznámých

Případy, kdy byl počet rovnic *menší* než počet neznámých, jsme již vyřešili. „Přebytečné neznámé“ jsme nahrazovali parametry. (Viz příklady 2.3, 3.2, 3.4, 4.2, 5.2, 5.3.) Co když bude rovnic *více* než je neznámých? Na takovýchto soustavách není nic složitého. Intuitivně je zřejmé, že nějaké rovnice jsou v soustavě jakoby „navíc“.

7.1 Příklad

Uvažujme soustavu čtyř rovnic o třech neznámých:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = & -15 \\ 4x_1 & +6x_2 & +5x_3 & = & 12 \\ 5x_1 & -2x_2 & +7x_3 & = & 37 \end{array}$$

- Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, rozšířená matice je $\bar{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & -2 & -15 \\ 4 & 6 & 5 & 12 \\ 5 & -2 & 7 & 37 \end{array}\right)$.
- Pro jejich hodnosti platí rk $A = 3$, rk $\bar{A} = 3$ (ověřte to!) a podle Frobeniovy věty soustava *má* řešení.
- Rozšířenou matici upravujeme standardně Gaussovou eliminací na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & -2 & -15 \\ 4 & 6 & 5 & 12 \\ 5 & -2 & 7 & 37 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

a zjistíme, že jedna z rovnic „vypadla“, což je dobře, neboť nám tak zůstala soustava tří rovnic o třech neznámých. Tu již umíme řešit a řešením je uspořádaná trojice $[x_1, x_2, x_3] = [1, -2, 4]$.

- Geometrický význam: Každá z rovnic je rovnicí roviny v trojrozměrném prostoru. Vyřešením soustavy jsme získali souřadnice jejich průsečíku $\mathsf{U}[1, -2, 4]$. Podle normálových vektorů je vidět, že žádné dvě roviny nejsou rovnoběžné. Jedná se tedy o čtyři navzájem různoběžné roviny, které se protínají v jediném bodě U. (Tyto čtyři roviny patří do tzv. *trsu rovin I. druhu.*)

7.2 Příklad

Použijme předchozí soustavu, jen ve 2. rovnici změňme pravou stranu:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & +6x_2 & +5x_3 & = & 12 \\ 5x_1 & -2x_2 & +7x_3 & = & 37 \end{array}$$

- Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, rozšířená matice je $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 12 \\ 5 & -2 & 7 & 37 \end{array}\right)$.
- Pro jejich hodnosti platí rk $A = 3$, rk $\bar{A} = 4$ (ověřte to!) a podle Frobeniovy věty soustava *nemá* řešení!
- Kdybychom použili Gaussovu eliminační metodu a upravovali rozšířenou matici, dopracovali bychom se k nepravdivému tvrzení, že $0 = 1$.
- Geometrický význam: Každá z rovnic je rovnicí roviny v trojrozměrném prostoru. Neexistuje tedy žádný bod, který by byl všem čtyřem rovinám společný. Co jsme vlastně provedli tím, že jsme vzali předchozí příklad 7.1, který měl řešení, a pouze změnili pravou stranu jedné rovnice? Z původní konfigurace, kdy se všechny 4 roviny protínaly v jediném bodě, jsme jednu rovinu rovnoběžně posunuli jinam. Vzájemná poloha čtyř rovin je nyní taková, že tyto roviny vymezují v prostoru trojboký jehlan.

7.3 Příklad

Zkusme i jednoduchý příklad soustavy dvou rovnic o jedné neznámé:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 5 \\ 2x & = & 13 \end{array}$$

Na první pohled je zřejmé, že takováto soustava nemá řešení. O tomtéž nás přesvědčí i Frobeniova věta, protože:

- Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, rozšířená matice je $\bar{A} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 5 \\ 2 & 13 \end{array}\right)$.
- Pro jejich hodnosti platí rk $A = 1$, rk $\bar{A} = 2$ a podle Frobeniovy věty soustava *nemá* řešení!
- Geometrický význam: Každou z rovnic lze chápat jako „rovnici bodu na přímce“, s tím jsme se už setkali u příkladu 1.1. Každá rovnice je vlastně rovnicí nularozměrné nadroviny v jednorozměrném prostoru! Každá rovnice je rovnicí jiného bodu (první rovnice je rovnicí bodu $\mathsf{V}[5]$ a druhá rovnice je rovnicí bodu $\mathsf{W}\left[\frac{13}{2}\right]$). Tyto body jsou určitě disjunktní a „nemají žádný společný bod“.

Poznámka: Uvozovky jsem použil proto, že tyto formulace se běžně nepoužívají, ale skutečně, i v tomto jednoduchém příkladu, hledáme průnik nadrovin – tentokráte nularozměrných.

7.4 Příklad

Vyřešíme ještě soustavu čtyř rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{array}{rrcr} x & +2y & = & -1 \\ 2x & -y & = & 2 \\ 3x & +y & = & 1 \\ 6x & +7y & = & -2 \end{array}$$

- Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, rozšířená matice je $\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & -2 \end{array}\right)$.
- Pro jejich hodnosti platí rk $A = 2$, rk $\bar{A} = 2$ (ověřte to!) a podle Frobeniovy věty soustava *má* řešení!
- Dvě rovnice nám tedy zmizely, neboť byly lineární kombinací ostatních rovnic, a dostali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, jejímž řešením je uspořádaná dvojice $[x, y] = \left[\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right]$.
- Geometrický význam: Každá z rovnic představuje rovnici přímky v rovině, každé dvě přímky jsou navíc různoběžné (viz jejich normálové vektory!). Řešením soustavy jsme hledali body, které mají všechny čtyři přímky společné. Takový bod jsme našli a je jím bod $\mathsf{X}\left[\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right]$, všechny čtyři přímky tedy procházejí bodem X. (Tyto přímky patří do tzv. *svazku přímek I. druhu*).

8 Hlavní a parametrické neznámé

Jak už bylo řečeno výše, řešíme-li soustavu, kde počet rovnic je menší než počet neznámých, občas může nastat problém rozhodnout, kterou neznámou můžeme resp. nemůžeme položit rovnu parametru. (Viz např. příklad 5.2).

Kritérium je velmi jednoduché, ilustrujme ho na příkladech:

8.1 Příklad

$$\begin{array}{rrrrcr} -x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 1 \\ -x_1 & +x_2 & +2x_3 & -2x_4 & = & -8 \end{array}$$

- Platí rk $A = 2$, rk $\bar{A} = 2$ (ověřte!), soustava tedy *má* řešení.
- Upravujme rozšířenou matici soustavy:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -8 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right).$$

Důležité! Hlavními neznámými budou ty neznámé, jejichž koeficienty jsou v upravené matici *hlavními prvky.* Připomeňme, že hlavním prvkem řádku matice se myslí **nejlevější nenulový prvek tohoto řádku**. Pokud naši upravenou matici přepíšeme zpátky jako soustavu rovnic, dostaneme

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & -1 \\ & & x_3 & -x_4 & = & -3 \end{array}$$

Hlavní prvky v matici odpovídají neznámým x_1 a x_3, toto budou tudíž hlavní neznámé. Zbylé neznámé budou parametrické a položíme tedy $x_4 = t$ a $x_2 = s$, kde $s, t \in \mathbb{R}$. Řešení pak zapíšeme ve tvaru

$$\begin{array}{rcrrr} x_1 & = & 2 & +s & \\ x_2 & = & & s & \\ x_3 & = & -3 & & +t \\ x_4 & = & & & t\,, \end{array} \tag{7}$$

řešením jsou tedy všechny uspořádané čtveřice ve tvaru $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [2+s, s, -3+t, t]$, kde $s, t \in \mathbb{R}$. Někdo by se v prvé chvíli třeba pokusil zvolit jako parametry neznámé x_3 a x_4, to by však nešlo, můžete si to zkusit.

- Geometrický význam: Počítáme průnik dvou trojrozměrných nadrovin ve čtyřrozměrném prostoru. Průnikem je dvourozměrný podprostor (rovina) s parametrickými rovnicemi (7).

8.2 Příklad

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & & +x_3 & & = & 0 \\ & x_2 & +2x_3 & & = & 0 \\ & & & x_4 & = & 0 \end{array}$$

- Soustava je homogenní (viz sekce 4), takže má určitě triviální řešení – bod $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [0, 0, 0, 0]$ (počátek souřadného systému). Může to však být jen jedno z nekonečně mnoha řešení.
- Platí rk $A = 3$, rk $\bar{A} = 3$, soustava tedy *má* řešení.
- Rozšířená matice soustavy je $\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$

Tato matice už je ve schodovitém tvaru, nemusíme ji proto už upravovat. Hlavními neznámými budou x_1, x_2 a x_4, jedinou parametrickou neznámou bude $x_3 = t$, kde $t \in \mathbb{R}$. Řešení můžeme psát ve tvaru

$$\begin{array}{rcrr} x_1 & = & & -t \\ x_2 & = & & -2t \\ x_3 & = & & t \\ x_4 & = & 0 & . \end{array} \tag{8}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení a jsou to všechny uspořádané čtveřice ve tvaru $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [-t, -2t, t, 0]$, kde $t \in \mathbb{R}$. Všimněte si, že bod $[0, 0, 0, 0]$ je opravdu řešením (zvolíme-li za $t = 0$).

- Geometrický význam: Řešíme průnik tří trojrozměrných nadrovin ve čtyřrozměrném prostoru. Výsledkem je jednorozměrný podprostor (přímka) s parametrickými rovnicemi (8) procházející počátkem.

Důležitá poznámka na závěr: Počet parametrů, které musíme zavést, abychom mohli vyjádřit řešení nějaké soustavy, je roven dimenzi podprostoru, který je řešením dané soustavy.
∗ Pokud jsme nepotřebovali žádný parametr, byl řešením nularozměrný podprostor – jediný bod.
∗ Pokud jsme potřebovali jeden parametr, byl řešením jednorozměrný podprostor – přímka.
∗ Pokud jsme museli zavést dva parametry, byl řešením dvourozměrný podprostor – rovina.
∗ Pokud bychom potřebovali tři parametry, byl by řešením trojrozměrný podprostor – trojrozměrná nadrovina, atd.
Toto dobře koresponduje s tím, co znáte z analytické geometrie – v parametrických rovnicích přímky se vyskytuje jeden parametr, v rovnicích roviny jsou parametry dva.