Sféra

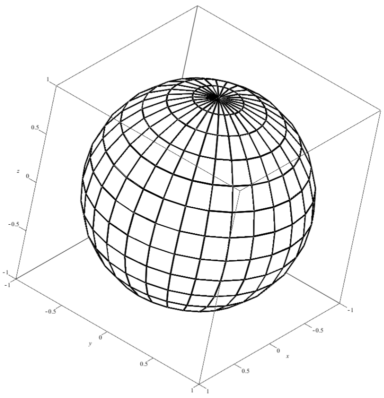
Uvažujme sféru s parametrizací $r(\vartheta, \varphi) = [R\cos\vartheta\cos\varphi; R\cos\vartheta\sin\varphi; R\sin\vartheta]$.

1. Určete, zda je tato parametrizace sféry regulární.

   Řešení: Parametrizace není regulární pro $\vartheta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$ (severní a jižní pól). Jacobiho matice má v těchto bodech hodnost 1.

2. Načrtněte souřadnicovou síť na na sféře vytvářenou touto parametrizací.

   Řešení: Pro $R = 1$ viz obrázek.



3. Najděte tečný prostor ke sféře v bodě $r\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$. Najděte tečnou rovinu sféry v tomto bodě.

   Řešení: $T_{r\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)} r(\mathbb{R}^2) = \left[\!\left[\left(-1; -1; \sqrt{2}\right), (-1; 1; 0) \right]\!\right]$, $\tau = \left[\frac{R}{2}; \frac{R}{2}; \frac{R\sqrt{2}}{2}\right] + \left[\!\left[\left(-1; -1; \sqrt{2}\right), (-1; 1; 0) \right]\!\right]$

4. Vypočtěte první fundamentální formu sféry v této parametrizaci.

   Řešení: $g_{11} = R^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = R^2\cos^2\vartheta$, resp. $\mathbf{I} = R^2 \mathrm{d}\vartheta^2 + R^2\cos^2\vartheta \mathrm{d}\varphi^2$.

5. Najděte normálové vektorové pole sféry v této parametrizaci.

   Řešení: $\mathbf{n} = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, \sin\vartheta)$ nebo opačný vektor.

6. Vypočtěte druhou fundamentální formu sféry v této parametrizaci.

   Řešení: $h_{11} = R$, $h_{12} = h_{21} = 0$, $h_{22} = R\cos^2\vartheta$, resp. $\mathbf{II} = R\mathrm{d}\vartheta^2 + R\cos^2\vartheta \mathrm{d}\varphi^2$.

7. Vypočtěte třetí fundamentální formu sféry v této parametrizaci.

   Řešení: $k_{11} = 1$, $k_{12} = k_{21} = 0$, $k_{22} = \cos^2\vartheta$, resp. $\mathbf{III} = \mathrm{d}\vartheta^2 + \cos^2\vartheta \mathrm{d}\varphi^2$.

8. Spočtěte tvarový operátor sféry.

   Řešení: Označíme-li g a h matice koeficientů první a druhé fundamentální formy, pak $S = g^{-1}h = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}$.

9. Určete Gaussovu a střední křivost sféry.

   Řešení: $K = \det S = \frac{\det h}{\det g} = \frac{1}{R^2} = \text{konst} > 0 \Rightarrow$ jedná se o sférickou plochu, $H = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, S = \frac{1}{R} = \text{konst} \Rightarrow$ jedná se o plochu s konstantní střední křivostí.

10. Spočtěte hlavní křivosti sféry a pomocí nich určete Gaussovu a střední křivost sféry.

Řešení: Hlavní křivosti určíme jako vlastní hodnoty tvarového operátoru: $\kappa_{1,2} = \frac{1}{R} \Longrightarrow$ hlavní křivosti jsou konstantní ve všech bodech sféry. $K = \kappa_1\kappa_2 = \frac{1}{R^2}$, $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{R}$.

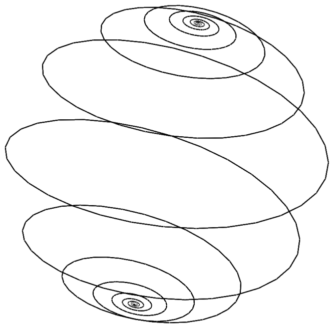
11. Spočtěte všechny Christoffelovy symboly sféry v této parametrizaci.

Řešení: $\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 0, \quad \Gamma^1_{22} = \sin\vartheta\cos\vartheta, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\tan\vartheta$

12. Určete délku **a)** libovolného poledníku, **b)** 45. rovnoběžky.

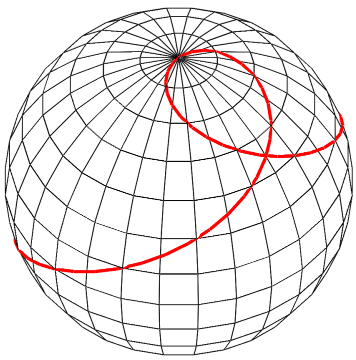
Řešení: **a)** $2\pi R$, **b)** $\sqrt{2}\pi R$

13. Určete délku loxodromy $\vartheta(t) = t$, $\varphi(t) = (\operatorname{arctanh}\sin t)\tan\alpha$ pro $t \in \langle t_1; t_2\rangle$. *Loxodroma* na sféře je křivka, která protíná všechny poledníky pod konstantním úhlem α (viz obrázek).



Řešení: $l = R\frac{1}{\cos\alpha}(t_2 - t_1) = R\frac{1}{\cos\alpha}(\vartheta_2 - \vartheta_1)$

14. Určete délku křivky $\vartheta(t) = t$, $\varphi(t) = 2t$ na sféře (viz obrázek) pro $t \in \langle 0; 2\pi\rangle$. Prostorová křivka je tedy parametrizována funkcí $\bar{r}(t) = [\cos t\cos 2t; \cos t\sin 2t; \sin t]$



Řešení: $l = R\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 4R\sqrt{5}\,\mathrm{E}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, kde E představuje úplný eliptický integrál II. druhu. Pro $R = 1$ vychází délka křivky 10,54.

15. Vypočtěte povrch sféry integrováním plošného elementu $\mathrm{d}A = \sqrt{\det g}\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$ v patřičných mezích.

Řešení: $4\pi R^2$