Matematická analýza I – 4. cvičení

Zobrazení:

1. Jsou dány množiny $A = \{\triangle, \sharp, \heartsuit\}$, $B = \{\alpha, \beta\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Dále jsou dána zobrazení $f\colon A \to B\colon f(\triangle) = \alpha, f(\sharp) = \alpha, f(\heartsuit) = \beta$ a $g\colon B \to C\colon g(\alpha) = 4, g(\beta) = 3$. Najděte zobrazení $g \circ f$ a diskutujte existenci zobrazení f^{-1} a g^{-1}.

2. Určete maximální definiční obory funkcí

   (a) $f(x) = \dfrac{5^x}{\sqrt{x^2 + x - 20}}$,

   (b) $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} \left(1 - x^2\right)$,

   (c) $h(x) = \operatorname{tg}\left(2^{x+1}\right)$.

3. Najděte funkční předpis, maximální definiční obor a obor hodnot pro funkce $f \circ g$ a $g \circ f$. Funkce f a g jsou definovány na maximální možné podmnožině množiny $\mathbb{R}$.

   (a) $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sin x$

   (b) $f(x) = 2^x, \quad g(x) = \operatorname{tg} x$

   (c) $f(x) = \ln x, \quad g(x) = 5$

   (d) $f(x) = 3^x, \quad g(x) = x^3$

   (e) $f(x) = \log_2 x, \quad g(x) = 2^x$

   (f) $f(x) = x^2, \quad g(x) = D(x)$, kde D je Dirichletova funkce definovaná předpisem

   $$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

4. Najděte funkční předpis pro funkci f^{-1}, je-li $f(x) = 2^{\sin(x^3+1)} - 1$.

Matematická indukce:

1. Dokažte matematickou indukcí, že pro všechna přirozená čísla n platí

   $$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Dokažte matematickou indukcí, že pro všechna přirozená čísla n platí

   $$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

3. Dokažte matematickou indukcí, že pro všechna přirozená čísla n platí, že 31 dělí $5^{n+1} + 6^{2n-1}$.

4. Dokažte matematickou indukcí, že pro všechna přirozená čísla n platí, že 9 dělí $10^n - 1$.

5. Dokažte matematickou indukcí, že pro všechna přirozená čísla n platí

   $$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

   pro libovolné $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Reálná čísla:

1. Najděte horní a dolní závory, supremum, infimum, maximum a minimum následujících množin v $\mathbb{R}$ resp. v $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$:

   $(0;1), \langle 0,1\rangle, \langle 0,1), (-\infty,1) \cup \{2\}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \emptyset$

Posloupnosti:

1. Mějme posloupnost $a_n = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Zjistěte, zda je tato posloupnost shora omezená, zdola omezená, omezená. Vyšetřete také její monotónnost, najděte hromadné body a limitu.

2. Uvažujme posloupnost

$$a_n = \begin{cases} \cos(n\frac{\pi}{2}) & \text{pro } n \text{ sudé}, \\ \frac{1}{n} & \text{pro } n \text{ liché}. \end{cases}$$

   Nalezněte její hromadné body a limitu.

3. Dokažte, že posloupnost $a_n = \dfrac{-2n}{3n+1}, n \in \mathbb{N}$ je nerostoucí a určete její limitu L. Dále určete, pro které $n_0 \in \mathbb{N}$ platí, že pro všechna $n > n_0$ je $|a_n - L| < \varepsilon$, kde $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$.

4. Uvažujme posloupnost $a_n = \dfrac{3}{\frac{5}{2} + 2\sin n}, n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že je tato posloupnost omezená.

5. Vypočtěte limity posloupností:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3}{2n^2-1} - \dfrac{n^2}{2n+1} \right)$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n - \sqrt{n(n+8)} \right)$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-6}{n} \right)^{3n}$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n - \sqrt{n(n+10)} \right)$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt{n+1}}{\sqrt{8n^3+n-1}+n}$