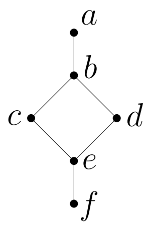
Matematická analýza I – 3. cvičení

Relace, zobrazení:

1. Na obrázku je diagramem zadána relace $\prec$ na množině $M = \{a, b, c, d, e, f\}$. Je definována takto: $x \prec y$ právě tehdy, když x leží níže nebo ve stejné horizontální rovině jako y a zároveň existuje zdola nahoru směřující posloupnost na sebe navazujících úseček z bodu x do bodu y. Je relace $\prec$ uspořádání, tedy relace, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní?

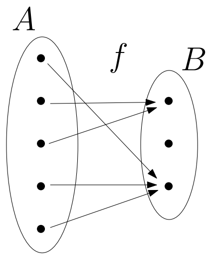


2. Jsou dány množiny $A = \{1, 2\}$ a $B = \{x, y, z\}$.

   (a) Nakreslete uzlový a kartézský graf relace $\psi = \{[1, x], [1, y], [2, z]\} \subset A \times B$ a zapište výčtem prvků relaci ψ^{-1}.

   (b) Je relace ψ z předcházející podúlohy zobrazením? Je relace ψ^{-1} zobrazením?

3. Na obrázku je zadáno zobrazení $f \subseteq A \times B$. Určete, zda toto zobrazení je nebo není injektivní, surjektivní, bijektivní.



4. Dokažte, že zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x + 1)^3$ je bijektivní.

5. Nechť $A = B = \mathbb{R}$. Je dána relace $g = \{[x, y] \in A \times B : y = \frac{1}{x^2}\}$.

   (a) Načrtněte kartézský graf této relace.

   (b) Zdůvodněte, proč tato relace není zobrazení.

   (c) Vhodnou úpravou množiny A vytvořte relaci g' tak, aby funkční předpis $y = \frac{1}{x^2}$ zůstal zachován a aby relace g' byla zobrazením.

   (d) Vhodnou úpravou množiny A vytvořte relaci g'' tak, aby funkční předpis $y = \frac{1}{x^2}$ zůstal zachován a aby relace g'' byla bijektivním zobrazením.

6. U následujících relací $f_i \subset A \times B$, kde A, B jsou podmnožiny $\mathbb{R}$ načrtněte kartézské grafy a rozhodněte, zda se jedná o zobrazení z A do B. Pokud ano, zapište toto zobrazení v podobě funkčního předpisu $f_i(x) = \dots$. Určete také, zda je zobrazení injektivní, surjektivní, bijektivní.

   (a) $f_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

   (b) $f_2 = \{[x, y] \in \langle -1; 1\rangle \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$

   (c) $f_3 = \{[x, y] \in \langle 0; 1\rangle \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$

   (d) $f_4 = \{[x, y] \in \langle 0; 1\rangle \times \langle 0; 1\rangle : x^2 + y^2 = 1\}$

(e) $f_5 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 = y\}$

(f) $f_6 = \{[x, y] \in \langle 0; \infty) \times \mathbb{R} \colon x = y^2\}$

(g) $f_7 = \{[x, y] \in \langle 0; \infty) \times \langle 0; \infty) : x = y^2\}$

(h) $f_8 = \{[x, y] \in \{2\} \times \mathbb{R} \colon x = 2\}$

(i) $f_9 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon y = 2\}$

(j) $f_{10} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon y = \sin x\}$

(k) $f_{11} = \{[x, y] \in \langle -1; 1\rangle \times \mathbb{R} \colon x = \sin y\}$

(l) $f_{12} = \{[x, y] \in \langle -1; 1\rangle \times \mathbb{R} \colon y = \arcsin x\}$

(m) $f_{13} = \{[x, y] \in \langle -1; 1\rangle \times \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle : y = \arcsin x\}$

(n) $f_{14} = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \colon y = 2^x\}$

(o) $f_{15} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon x + y = 1\}$

(p) $f_{16} = \{[x, y] \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \colon xy = 1\}$

(q) $f_{17} = \mathbb{R}^2$

(r) $f_{18} = \emptyset \times \mathbb{R}$

(s) $f_{19} = \emptyset \times \emptyset$

7. Najděte bijektivní zobrazení mezi množinou $\mathbb{R}$ a množinou $(-1; 1)$.

8. Najděte bijektivní zobrazení mezi množinou $\mathbb{N}$ a množinou $\mathbb{Z}$.

9. Najděte bijektivní zobrazení mezi množinou $\mathbb{N}$ a množinou $\mathbb{Q}$.

10. Může být relace $\emptyset$ zobrazením? Může být relace $\emptyset$ bijektivním zobrazením? (Nápověda: Viz poslední dvě podúlohy úlohy 6.)