

Matematická analýza I – 1. cvičení

Podmínky pro získání zápočtu:

1. Každých 14 dnů se píše písemka z veškerého do té doby probraného učiva.
2. Na zápočet je potřeba 60 % bodů z celkového počtu bodů získatelných za semestr.
3. Pokud bude bodový zisk menší než 60 % a zároveň větší nebo roven 20 %, má student možnost opravné písemky z učiva celého semestru; k získání zápočtu je potřeba alespoň 70% úspěšnost na této opravné písemce.
4. Bude-li bodový zisk z řádných písemek menší než 20 %, student nemá na zápočet nárok.
5. Budou vypsány maximálně 2 opravné termíny.

Výroková logika

1. Jsou dány dva výroky a, b . Sestavte tabulku vyjadřující pravdivostní ohodnocení výroků $\neg a, \neg b, a \wedge b, a \vee b, a \Rightarrow b, a \Leftrightarrow b$ v závislosti na pravdivostním ohodnocení výroků a, b .
2. Tabulkovou metodou dokažte platnost De Morganových zákonů $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$ resp. $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$. Dokažte též platnost pravidel pro negování implikace a ekvivalence.
3. Negujte výroky:
 - (a) Kočka je bílá.
 - (b) Jablíčko není nezdravé.
 - (c) Dnes prší a zároveň svítí sluníčko.
 - (d) Koupím si jablko nebo hrušku.
 - (e) Jestliže někdo lže, pak také krade.
 - (f) Půjdu na oslavu tehdy a jen tehdy, když tam půjde Linda.
4. Jsou dány tři výroky a, b, c . Pomocí vhodné tabulky najděte pravdivostní ohodnocení složeného výroku $(\neg a \Leftrightarrow (b \wedge c)) \Rightarrow (a \vee \neg(a \wedge b))$ v závislosti na pravdivostním ohodnocení výroků a, b, c .
5. Je dán výrok a . Pomocí tohoto výroku s využitím logických operací utvořte co nejjednodušší tautologii a co nejjednodušší kontradikci.
6. Přečtěte správně symbolický zápis kvantifikovaných výroků. Pokuste se též posoudit pravdivostní hodnotu těchto výroků.
 - (a) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$
 - (b) $\exists n \in \mathbb{Z}: 0 < n \leq 1$
 - (c) $\forall y \in \mathbb{R}: |y| > 1 \Rightarrow y^2 > 1$
 - (d) $\forall x, y \in \mathbb{Z}: x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \wedge y = 0)$
 - (e) $\forall x \geq 0 \exists y \leq 0: x + y = 0$
 - (f) $\exists x \geq 0 \forall y \leq 0: x + y = 0$

7. Negujte kvantifikované výroky a je-li to možné, výrok i jeho negaci запиšte symbolicky. Posuďte také pravdivostní hodnotu uvedených výroků.
- (a) Existuje alespoň jeden trojúhelník, který je pravoúhlý.
 - (b) Druhá mocnina každého reálného čísla je číslo nezáporné.
 - (c) Úhlopříčky každého čtyřúhelníku jsou navzájem kolmé.
 - (d) Existuje alespoň jedno reálné číslo, jehož součin s nulou je číslo nenulové.
 - (e) Každá kočka je černá.
 - (f) Alespoň šest přirozených čísel splňuje nerovnost $x - 40 < 0$.
 - (g) Číslo 92 má nejvýše pět dělitelů.
 - (h) Rovnice $x^5 - x + 2 = 0$ má právě tři kořeny v množině komplexních čísel.
8. Negujte kvantifikované výroky z úlohy 6.

Důkazové techniky

1. Dokažte přímo větu: $\forall x \in \mathbb{N}: x \geq 2 \Rightarrow 6x + 3 > 13$
2. Dokažte nepřímo větu: $\forall x \in \mathbb{Z}: x^2$ je liché $\Rightarrow x$ je liché
3. Dokažte větu z úlohy 2 sporem.
4. Dokažte sporem větu: Všechna prvočísla větší než 2 jsou lichá.