Geometrie nelineárních útvarů – cvičení

1 Geometrie křivek

1.1 Parametrické a obecné rovnice křivek, singulární body, tečný vektor

Křivky v $\mathbb{R}^2$ zadané parametricky lze vykreslit v programu Maple jednoduchým příkazem

`plot([x(t),y(t),t=a..b]);` konkrétně např. `plot([2*cos(t),3*sin(t),t=0..2*Pi]);`

Pro vykreslení křivek v $\mathbb{R}^3$ lze použít příkaz

`with(plots): spacecurve([x(t), y(t), z(t)], t = a .. b);`

Poznámka k následujícím úlohám:
Vyloučení parametru t při hledání obecné rovnice křivky nemusí být vždy jednoduché. V mnohých případech doporučuji podívat se na výsledek a odhadnout, jak rovnice vhodně upravovat, sčítat, umocňovat apod., aby nakonec parametr vypadl. Je-li parametrizace dána polynomickými či racionálními funkcemi, lze k vyloučení parametru (v případě ploch dvou parametrů) použít teorii Gröbnerových bází. Teorie je použitelná i pro parametrizace dané goniometrickými funkcemi, použijí-li se vhodné substituce a přidají-li se dodatečné rovnice vyjadřující platnost některých goniometrických identit.

Při převádění z obecného na parametrické vyjádření je často výhodné použití polárních souřadnic, viz příklad 12.

1. Uvažujme křivku $r(t) = \left[R\cos(t^3); R\sin(t^3)\right]$, kde $t \in \mathbb{R}$. Obrazem $r(\mathbb{R})$ je kružnice o poloměru R. **a)** Najděte její singulární body, **b)** najděte regulární parametrizaci, jejímž obrazem bude stejná kružnice.

Řešení: **a)** Singulární bod je v $t_0 = 0 \Rightarrow r(t_0) = [1; 0]$ **b)** např. $r(t) = [R\cos(t); R\sin(t)]$

2. Křivka zvaná *traktrix* (mj. se jedná o evolventu řetězovky, viz příklad 10, podsekce 1.2) je dána parametrizací $r(t) = \left[a\left(\ln\tan\frac{t}{2} + \cos t\right); a\sin t\right]$, kde $t \in (0, \pi)$. Nalezněte její obecnou rovnici.

Řešení: $x = \ln\tan\left(\frac{1}{2}\arcsin y\right) + \sqrt{a^2 - y^2}$

3. *Descartesův list* je dán parametrickým vyjádřením $r(t) = \left[\frac{3at}{1+t^3}; \frac{3at^2}{1+t^3}\right]$, kde $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Najděte obecnou rovnici Descartesova listu.

Řešení: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

4. *Dioklova kisoida* je dána parametrickým vyjádřením $r(t) = \left[\frac{at^2}{1+t^2}; \frac{at^3}{1+t^2}\right]$, kde $t \in \mathbb{R}$. Najděte její obecnou rovnici.

Řešení: $y^2(a - x) = x^3$

5. *Strofoida* je dána parametrickým vyjádřením $r(t) = \left[\frac{-a(1-t^2)}{1+t^2}; \frac{-at(1-t^2)}{1+t^2}\right]$, kde $t \in \mathbb{R}$. Najděte obecnou rovnici strofoidy.

Řešení: $(a - x)y^2 = (a + x)x^2$

6. *Nikomédova konchoida* je dána obecnou rovnicí $(x - a)^2(x^2 + y^2) = b^2x^2$. Napište obecnou rovnici i parametrické vyjádření Nikomédovy konchoidy v polárních a kartézských souřadnicích.

Řešení: $\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm b$, $r_{\mathrm{pol}}(t) = [\rho, \varphi] = \left[\frac{a}{\cos t} \pm b; t\right]$, kde jsme položili $\varphi = t$,
dosadíme-li do definice polárních souřadnic ($x = \rho\cos t$ a $y = \rho\sin t$), dostáváme parametrické vyjádření v kartézských souřadnicích $r_{\mathrm{kart}}(t) = [x, y] = [a \pm b\cos t; a\ \tan t \pm b\sin t]$.

7. Po pevné kružnici k_1 poloměru R_1 se **zvenku** valí bez prokluzování další kružnice k_2 o poloměru R_2. Pevně zvolený bod na k_2 pak opisuje křivku zvanou *epicykloida*, jejíž parametrické vyjádření může být např.

$$x = (R_1 + R_2)\cos\frac{R_2}{R_1}t - R_2\cos\left(t + \frac{R_2}{R_1}t\right),$$
$$y = (R_1 + R_2)\sin\frac{R_2}{R_1}t - R_2\sin\left(t + \frac{R_2}{R_1}t\right).$$

Valí-li se bez prokluzování kružnice k_2 o poloměru $R_2 < R_1$ **zvnitřku** pevné kružnice k_1, opisuje pevně zvolený bod na k_2 křivku zvanou *hypocykloida*, jejíž parametrické vyjádření může být např.

$$x = (R_1 - R_2)\cos\frac{R_2}{R_1}t + R_2\cos\left(t - \frac{R_2}{R_1}t\right),$$
$$y = (R_1 - R_2)\sin\frac{R_2}{R_1}t - R_2\sin\left(t - \frac{R_2}{R_1}t\right).$$

a) Uvažujme epicykloidu, pro kterou $R_2 = R_1 = R$. Taková křivka se nazývá *kardioida* nebo též *srdcovka*. Najděte její parametrické vyjádření, křivku načrtněte a najděte její singulární body.

Řešení: $r(t) = [2R\cos t - R\cos 2t; 2R\sin t - R\sin 2t]$; singulární body dostaneme pro $t = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; Pro obrázek viz worksheet krivky.mw, získáme jej např. volbou $R_2 = R_1 = 1$.

b) Uvažujme epicykloidu, pro kterou $R_2 = \frac{R_1}{2}$. Taková křivka se nazývá *nefroida*. Najděte její parametrické vyjádření, křivku načrtněte a najděte její singulární body.

Řešení: $r(t) = [(3/2)R_1\cos((1/2)t) - (1/2)R_1\cos((3/2)t), (3/2)R_1\sin((1/2)t) - (1/2)R_1\sin((3/2)t)]$; singulární body jsou v $t = 2k\pi$, pro $t = 0, 4\pi, 8\pi, 12\pi, \ldots$ máme bod $r(0) = [R_1, 0]$, pro $t = 2\pi, 6\pi, 10\pi, \ldots$ máme bod $r(2\pi) = [-R_1, 0]$

c) *Steinerova křivka* je hypocykloida, pro níž platí $R_2 = \frac{R_1}{3}$. Napište její parametrické vyjádření a nakreslete ji.

Řešení: $r(t) = [(2R_1/3)\cos(t/3) + (R_1/3)\cos(2t/3); (2R_1/3)\sin(t/3) - (R_1/3)\sin(2t/3)]$

d) *Asteroida* je hypocykloida, pro níž platí $R_2 = \frac{R_1}{4}$. Napište její parametrické vyjádření a nakreslete ji.

Řešení: $r(t) = [(3R_1/4)\cos(t/4) + (R_1/4)\cos(3t/4); (3R_1/4)\sin(t/4) - (R_1/4)\sin(3t/4)]$, pomocí goniometrických identit lze dojít až ke tvaru $r(t) = \left[R_1\cos^3 t; R_1\sin^3 t\right]$

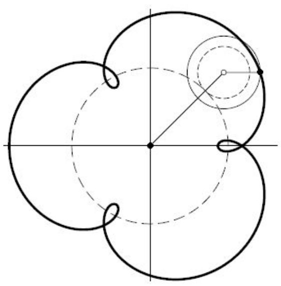
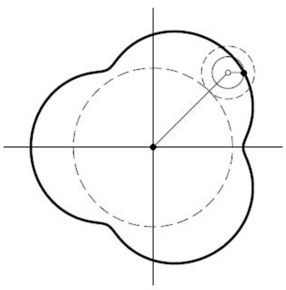
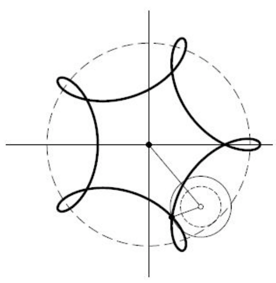
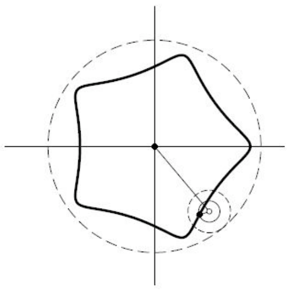
e) Jak vypadá hypocykloida pro $R_2 = \frac{R_1}{2}$?

Řešení: Jedná se o úsečku s parametrizací $r(t) = \left[R_1\cos\frac{t}{2}; 0\right]$, což lze chápat jako kmitavý pohyb ve směru osy x s rovnovážnou polohou v počátku. Toho se využívá i v technické praxi při transformaci rotačního pohybu na kmitavý přímočarý pohyb.

f) Promyslete si, jak by vypadaly epicykloida a hypocykloida pro různé volby R_1 a R_2. Zkuste si tyto případy vykreslit v Maplu, použijte worksheet krivky.mw. Můžete si měnit hodnoty $R2$ při pevně zvoleném $R1$ a získáváte tak různé epicykloidy a hypocykloidy vznikající valením různých kružnic po téže pevné kružnici.

Několik poznámek:

- Poměr $k = \frac{R_2}{R_1}$ je rozhodujícím faktorem, máme-li rozhodnout, zda je epicykloida resp. hypocykloida uzavřená (po určitém počtu oběhů valící se kružnice se křivka začne replikovat), či nikoliv. Pro $k \in \mathbb{Q}$ je křivka uzavřená, pro $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nikoliv.
- Epicykloidu i hypocykloidu lze podobně jako tomu bylo u cykloidy prodlužovat a zkracovat – máme tedy *prodlouženou (zkrácenou) epicykloidu* a *prodlouženou (zkrácenou) hypocykloidu* (viz obrázky).

- Někdy se provádí následující klasifikace, kdy se souhrnně hovoří o tzv. *trochoidách* neboli *cyklických křivkách*. Patří sem:
  - prostá, prodloužená a zkrácená cykloida,

- – prostá, prodloužená a zkrácená epicykloida (souhrnně tzv. *epitrochoidy*),
- – prostá, prodloužená a zkrácená hypocykloida (souhrnně tzv. *hypotrochoidy*),
- – *evolventa* (přímka se valí po kružnici),
- – *pericykloida* (kružnice valící se svou vnitřní stranou po vnější straně pevné kružnice).
- Možná jste si v dětství hráli s umělohmotnými ozubenými kolečky vybavenými otvory v různých místech, do nichž se zasunula tužka a „jezdilo se dokola“ kolem nehybného kolečka (případně uvnitř nehybného mezikruží), které se špendlíky připevnilo k podložce. Vznikaly pěkné ornamenty. Jaké křivky jste vlastně kreslili? Co muselo být splněno, aby se křivka po určité době začala replikovat?

8. *Pascalova závitnice (limacon)* je dána parametrickým vyjádřením $r(t) = [a\cos t - b\cos 2t; a\sin t - b\sin 2t]$. Nalezněte její obecnou rovnici v souřadnicích x, y a také v polárních souřadnicích ρ, φ. Jedná se o speciální případ některé z výše uvedených křivek. Které?

Řešení: $(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$; $\rho = a\cos\varphi \pm b$

9. *Witch of Agnesi* je křivka s parametrickými rovnicemi $r(t) = \left[2at; \frac{2a}{1+t^2}\right]$ pro $t \in \mathbb{R}$. Jak křivka vypadá a jak se konstruuje naleznete např. na http://en.wikipedia.org/wiki/Witch_of_Agnesi. Nalezněte její obecné vyjádření a singulární body.

Řešení: $y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$; singulární body nejsou

10. Studujte vlastnosti známých spirál (rovnice jsou uvedeny v polárních souřadnicích ρ, φ):

- *Archimedova spirála* $\rho = a\varphi$,
- *logaritmická spirála* $\rho = a^\varphi$,
- *hyperbolická spirála* $\rho = \frac{a}{\varphi}$,
- *Fermatova spirála* $\rho^2 = a^2\varphi$,
- *Lituuova spirála* $\rho^2 = \frac{a^2}{\varphi}$,
- *sinová spirála* $\rho^m = a^m \sin(m\varphi)$.

11. *Řetězovka* je křivka s obecnou rovnicí $y = a\cosh\frac{x}{a}$. Vrchol řetězovky leží v bodě $(0, a)$. Ukažte, že v tomto vrcholu má řetězovka styk třetího řádu s parabolou o rovnici $y = \frac{x^2}{2a} + a$. Styk třetího řádu křivek $r(t)$ a $\mathbf{s}(t)$ v bodě t_0 znamená splnění rovnic $r(t_0) = s(t_0)$, $\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{\mathbf{s}}(t_0)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t_0) = \ddot{\mathbf{s}}(t_0)$, $\dddot{\mathbf{r}}(t_0) = \dddot{\mathbf{s}}(t_0)$.

12. Napište parametrické vyjádření *lemniskáty* s obecnou rovnicí $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Řešení: Je výhodné použít polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$ a $y = \rho\sin\varphi$, parametrizace má pak tvar $r_{\text{kart}}(\varphi) = \left[a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi; a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\right]$, obrázek v Maplu získáme příkazem

```
plot([2*sqrt(cos(2*phi))*cos(phi),2*sqrt(cos(2*phi))*sin(phi),phi=-Pi/4..5*Pi/4]);
```

1.2 Délka křivky, evolventa, parametrizace obloukem

1. Spočtěte délku oblouku cykloidy $r(t) = [R(t - \sin t); R(1 - \cos t)]\,, t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Řešení: $8R$

2. Spočtěte délku kardioidy $r(t) = [2R\cos t - R\cos 2t; 2R\sin t - R\sin 2t]\,, t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Řešení: $16R$

3. Spočtěte délku oblouku logaritmické spirály $r(t) = [a^t\cos t, a^t\sin t]$, $a > 1$,
a) pro $t \in \langle t_1, t_2\rangle$, **b)** pro $t \in \langle -\infty, t_2\rangle$.

Řešení: **a)** $\frac{\sqrt{1+\ln^2 a}}{\ln a}(a^{t_2} - a^{t_1})$, **b)** $\frac{\sqrt{1+\ln^2 a}}{\ln a}a^{t_2}$, jedná se tedy o konstantní násobek průvodiče.

4. Určete délku jednoho závitu šroubovice $r(t) = [R\cos t; R\sin t; at]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Řešení: $2\pi\sqrt{R^2 + a^2}$

5. Určete délku oblouku křivky $r(t) = [a\cosh t; a\sinh t; at]$, $a > 1$, pro $t \in \langle 0, 1\rangle$.

Řešení: $a\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

6. Určete délku oblouku křivky $r(t) = \left[a(t - \sin t); a(1 - \cos t); 4a\cos\frac{t}{2}\right]$ mezi dvěma následujícími průsečíky s rovinou xz.

Řešení: $8a\sqrt{2}$

7. Najděte evolventu (neboli involutu) šroubovice $r(t) = [\cos t; \sin t; t]$.

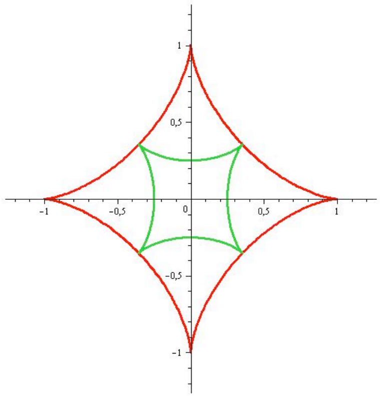
Řešení: $\tilde{r}(t) = [\cos t + (t - t_0)\sin t; \sin t - (t - t_0)\cos t; t_0]$ Všimněme si, že z-ová komponenta nezávisí na t a je tudíž konstantní – evolventa šroubovice je vždy rovinná křivka ležící v rovině $z = t_0$, tedy v rovině rovnoběžné s rovinou xy procházející bodem, kde začalo odvalování přímky.

8. Najděte evolventu semikubické (Neilovy) paraboly $r(t) = \left[t^2; at^3\right]$, $t > 0$.

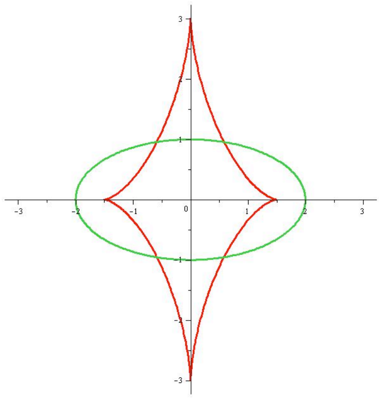
Řešení:

$$\tilde{r}(t) = \left[\; t^2 - \frac{\frac{2}{27}\frac{\left(4+9a^2t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2} - \frac{2}{27}\frac{\left(4+9a^2t_0{}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2}}{\sqrt{4+9a^2t^2}}; \quad at^3 - \frac{\frac{1}{9}\frac{\left(4+9a^2t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2} - \frac{1}{9}\frac{\left(4+9a^2t_0{}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2}}{\sqrt{4+9a^2t^2}}at \;\right]$$

9. **a)** Ukažte, že involutou asteroidy $r(t) = \left[\cos^3 t; \sin^3 t\right]$ s počátkem odvalování v $t = \frac{\pi}{4}$ je opět asteroida (jinak umístěná), viz obrázek.



b) Ukažte, že involutou „zploštělé“ asteroidy $r(t) = \left[\frac{3}{2}\cos^3 t; -3\sin^3 t\right]$ s počátkem odvalování v $t_0 = 0$, přičemž k funkci $\int_{t_0}^{t} \|\dot{\mathbf{r}}(\tau)\| \mathrm{d}\tau$ přičteme integrační konstantu $\frac{1}{2}$, je elipsa s parametrickým vyjádřením $\tilde{r}(t) = [2\cos t; \sin t]$, viz obrázek.



10. Najděte involutu řetězovky $r(t) = [t; \cosh t]$, počátek odvíjení zvolte v $t_0 = 0$.

Řešení: $\tilde{r}(t) = \left[t - \tanh t; \frac{1}{\cosh t}\right]$, jedná se o traktrix v poněkud jiné parametrizaci než v příkladu 2 podsekce 1.1.

11. Parametrizujte šroubovici $r(t) = [R\cos t; R\sin t; at]$ obloukem.

Řešení: Je třeba nalézt funkci $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\mathrm{r}}(\tau)\| \mathrm{d}\tau$, kde $t_0 \in I$ je libovolně zvolený bod, a tu pak invertovat. V našem případě $s(t) = (t - t_0)\sqrt{R^2 + a^2}$, hledáme inverzní funkci – vyjádříme t pomocí s. Vyjde nám $t(s) = \frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}} + t_0$, což můžeme dosadit do původní parametrizace a dostáváme hledanou parametrizaci obloukem

$$r(s) = \left[R\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}} + t_0\right); R\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}} + t_0\right); a\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}} + t_0\right)\right].$$

Speciálně, pro $t_0 = 0$, vychází

$$r(s) = \left[R\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}; R\sin\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}; \frac{as}{\sqrt{R^2+a^2}}\right].$$

1.3 Normálový vektor, křivost, oskulační kružnice, evoluta, Frenetův repér

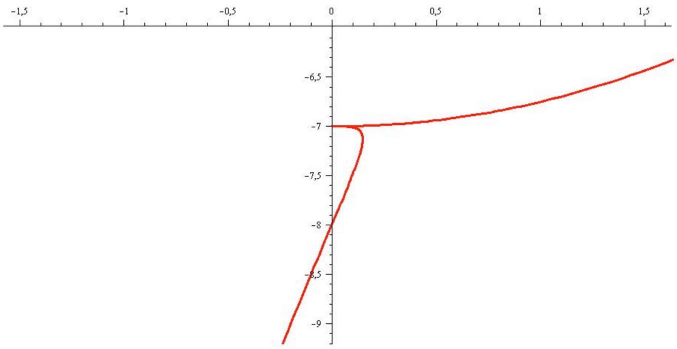
1. Uvažujme křivku $r(t) = \left[t^3 + t^2; t^5 - 7\right]$, kde $t \in \mathbb{R}$.

a) Najděte její singulární body.

Řešení: Singulární bod dostáváme pro $t_0 = 0 \Rightarrow r(t_0) = [0; -7]$.

b) Najděte její inflexní body.

Řešení: Rovnice $\dot{\mathbf{T}}(t) = 0$ má dvě řešení $t_1 = 0, t_2 = -1$. První řešení odpovídá singulárnímu bodu (viz předchozí podúloha), avšak tečný vektor $\mathbf{T}$ je definován pouze v regulárních bodech. Inflexní bod křivky tedy dostáváme pouze pro $t_2 = -1 \Rightarrow r(t_2) = [0; -8]$, viz obrázek níže.



c) Najděte normálový vektor této křivky v obecném bodě $r(t)$ a pak v bodě $r(1)$.

Řešení: $\mathbf{N}(t) = \left(-\frac{5t^3}{\sqrt{25t^6+9t^2+12t+4}}; \frac{3t+2}{\sqrt{25t^6+9t^2+12t+4}}\right)$, $\quad \mathbf{N}(1) = \left(-\frac{\sqrt{50}}{10}; \frac{\sqrt{50}}{10}\right)$

d) Spočtěte křivost κ a poloměr křivosti (poloměr oskulační kružnice) R této křivky v obecném bodě t a pak v bodě $t = 1$. Křivost počítejte z definice křivosti $\kappa(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|}$.

Řešení: $\kappa(t) = \frac{30t(t+1)}{(25t^6+9t^2+12t+4)^{\frac{3}{2}}}$, $\quad \kappa(1) = \frac{3\sqrt{50}}{125}$, $\quad R(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$, $\quad R(1) = \frac{1}{\kappa(1)}$.

e) Předchozí podúlohu **d)** řešte s využitím užitečného vztahu pro výpočet křivosti pouze z derivací parametrizace: $\kappa = \frac{\sqrt{(\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}})(\ddot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}})-(\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}})^2}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}$.

2. Určete poloměr křivosti logaritmické spirály $r(t) = [a^t\cos t; a^t\sin t]$.

Řešení: $R(t) = a^t\sqrt{1+\ln^2 a}$

3. Napište parametrické rovnice evoluty elipsy $r(t) = [2\cos t, \sin t]$. *Evoluta* je množina středů všech oskulačních kružnic dané křivky, její parametrizace má tedy tvar (načrtněte si obrázek) $\hat{r}(t) = r(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{N}(t)$. Sestrojíme-li k výsledné křivce evolventu (neboli involutu), dostaneme (při vhodné volbě počátku odvalování a přičtení vhodné integrační konstanty) původní křivku – viz příklad 9 v podsekci 1.2.

Řešení: Jedná se o „zploštělou“ asteroidu $r(t) = \left[\frac{3}{2}\cos^3 t; -3\sin^3 t\right]$, viz obrázek k příkladu 9 v podsekci 1.2.

4. Najděte evolutu kružnice.

Řešení: Evolutou je jediný bod – střed kružnice.

5. Napište parametrické rovnice oskulační roviny σ šroubovice $r(t) = [\cos t; \sin t; 3t]$ v bodě $r(0)$. Oskulační rovina v bodě $r(t_0)$ je rovina určená tečnou a normálou v tomto bodě, jedná se tedy o rovinu $r(t_0) + [\![\mathbf{T}(t_0), \mathbf{N}(t_0)]\!]$.

Řešení: $\sigma = [1,0,0] + \left[\!\!\left[\left(0, \frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10}\right), (-1,0,0)\right]\!\!\right] = [1,0,0] + [\![(0;1;3), (-1;0;0)]\!]$

6. Napište parametrické rovnice oskulační roviny σ křivky $r(t) = [\cos t; \sin t; \mathrm{e}^t]$ v bodě $r(0)$.

Řešení: $\sigma = [1,0,1] + \left[\!\left[\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right]\!\right] = [1,0,1] + [\![(0;1;1), (-2;-1;1)]\!]$

7. Spočtěte křivost hyperboly $r(t) = [a\cosh t; b\sinh t]$.

Řešení: $\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2\sinh^2 t + b^2\cosh^2 t)^{\frac{3}{2}}}$, ve vrcholu hyperboly ($t=0$), vychází $\kappa = \frac{a}{b^2}$.

8. Ukažte, že křivost *klotoidy* s parametrizací $r(t) = \left[\int_0^t \cos \pi s^2 \mathrm{d}s; \int_0^t \sin \pi s^2 \mathrm{d}s\right]$ je přímo úměrná délce oblouku.

Řešení: Délka oblouku měřená od $t_0 = 0$ je t, křivost vychází $2\pi t$.

9. Spočtěte poloměr oskulační kružnice sinusoidy $y = \sin x$ pro $x = \frac{\pi}{2}$.

Řešení: $R = 1$

Poznámka: Počítáme-li křivost a torzi přímo z definice, může to být někdy dosti pracné. Pro jejich výpočet lze užít níže uvedených vztahů, s jejichž pomocí spočteme křivost κ a torzi τ rovnou z derivací parametrizace. (Ve worksheetu Frenetuvreper.mw naleznete jak výpočet z definice, tak výpočet využívající níže uvedených vzorečků.)

Je-li $r(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, pak platí:

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3} \quad \text{nebo též} \quad \kappa(t) = \frac{\sqrt{(\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}})(\ddot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}})^2}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}, \tag{1}$$

$$\tau(t) = \frac{\det\begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{pmatrix}}{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|^2}. \tag{2}$$

10. Popište Frenetův repér šroubovice $r(t) = [a\cos t; a\sin t; bt]$. Spočtěte její křivost a torzi.

Řešení: $\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t; a\cos t; b)$, $\mathbf{N}(t) = (-\cos t; -\sin t; 0)$, $\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t; -b\cos t; a)$, $\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}$, $\tau = \frac{b}{a^2+b^2}$.

11. Popište Frenetův repér křivky $r(t) = \left[t; t^2; t^3\right]$. Spočtěte její křivost a torzi – využijte vztahů (1) a (2).

Řešení: $\mathbf{T}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}; \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}; \frac{3t^2}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}\right)$,
$\mathbf{N}(t) = \left(-\frac{t(2+9t^2)}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}\sqrt{1+9t^2+9t^4}}; -\frac{9t^4-1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}\sqrt{1+9t^2+9t^4}}; \frac{3t(2t^2+1)}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}\sqrt{1+9t^2+9t^4}}\right)$,
$\mathbf{B}(t) = \left(\frac{3t^2}{\sqrt{9t^4+9t^2+1}}; -\frac{3t}{\sqrt{9t^4+9t^2+1}}; \frac{1}{\sqrt{9t^4+9t^2+1}}\right)$, $\kappa(t) = \frac{2\sqrt{9t^4+9t^2+1}}{(1+4t^2+9t^4)^{\frac{3}{2}}}$, $\tau(t) = \frac{3}{9t^4+9t^2+1}$.

12. Popište Frenetův repér křivky $r(t) = \left[t; t^2; t+1\right]$. Spočtěte její křivost a torzi.

Řešení: $\mathbf{T}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2+4t^2}}; \frac{2t}{\sqrt{2+4t^2}}; \frac{1}{\sqrt{2+4t^2}}\right)$, $\mathbf{N}(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{1+2t^2}}; \frac{1}{\sqrt{1+2t^2}}; -\frac{t}{\sqrt{1+2t^2}}\right)$, $\mathbf{B}(t) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\kappa(t) = \frac{1}{(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\tau(t) = 0 \Longrightarrow$ jedná se o rovinnou křivku.

13. Najděte tečnu ke křivce $r(t) = \left[t^2; t; \mathrm{e}^t\right]$ rovnoběžnou s rovinou $x - 2y - 5 = 0$.

Řešení: Např. $[1,1,\mathrm{e}] + (2,1,\mathrm{e})$

14. Na prostorové křivce $r(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ uvažujme bod $r(t_0)$.

- Rovina určená bodem $r(t_0)$ a vektory $\mathbf{T}(t_0)$ a $\mathbf{N}(t_0)$ se nazývá *oskulační rovina.*
- Rovina určená bodem $r(t_0)$ a vektory $\mathbf{N}(t_0)$ a $\mathbf{B}(t_0)$ se nazývá *normálová rovina.*
- Rovina určená bodem $r(t_0)$ a vektory $\mathbf{T}(t_0)$ a $\mathbf{B}(t_0)$ se nazývá *rektifikační rovina.*

Napište parametrické rovnice oskulační, normálové a rektifikační roviny šroubovice $r(t) = [a\cos t; a\sin t; bt]$ v bodě $r(0)$. (Směrové vektory rovin nemusejí být nutně jednotkové, lze použít vhodné násobky vektorů $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ a $\mathbf{B}$.)

Řešení: $\rho_{\text{osk}} = [a, 0, 0] + [\![(-1, 0, 0), (0, a, b)]\!]$, $\rho_{\text{norm}} = [a, 0, 0] + [\![(-1, 0, 0), (0, -b, a)]\!]$, $\rho_{\text{rekt}} = [a, 0, 0] + [\![(0, a, b), (0, -b, a)]\!]$.

15. Určete křivost a torzi křivky $r(t) = [a \cosh t; a \sinh t; at]$, kde $a > 0$.

Řešení: $\kappa(t) = \tau(t) = \frac{1}{2a \cosh^2 t}$

16. Prostudujte worksheet Frenetuvreper4D.mw. Je zadána křivka $r(t) = [\cos t, \sin 2t, \cos 2t, \sin t] \in \mathbb{R}^4$. Máme nalézt Frenetův repér této křivky a všechny možné zobecněné křivosti, tedy první druhou a třetí křivost. Při hledání Frenetova repéru je nutné použít Gram-Schmidtův ortonormalizační proces, s nímž má u složitějších křivek problém i Maple (zkuste si to). Křivosti pak počítáme z definice zobecněných křivostí. Náš příklad vychází docela pěkně, všechny tři křivosti vycházejí konstantní. Existují nějaké vzorce (analogické vztahům (1) a (2)), které by nám umožnily spočítat první, druhou a třetí křivost křivky v $\mathbb{R}^4$, případně další křivosti v prostorech vyšších dimenzí?

2 Geometrie ploch

Terminologická poznámka: Označíme-li K Gaussovu křivost a H střední křivost plochy, pak:

- je-li $K = \text{konst} > 0$, plocha se nazývá *sférická*,
- je-li $K = \text{konst} < 0$, plocha se nazývá *pseudosférická*,
- je-li $K = 0$, plocha se nazývá *rozvinutelná*,
- je-li $H = \text{konst}$, hovoříme o ploše s konstantní střední křivostí,
- je-li $H = 0$, plocha se nazývá *minimální*.

1. *Vivianiho křivka* je průnikem sféry o poloměru R a rotační válcové plochy o polovičním poloměru, přičemž válcová plocha prochází středem sféry. Křivka připomíná prostorově vyvedenou číslici 8.

a) Najděte parametrické vyjádření této křivky.
b) Ukažte, že Vivianiho křivka je též průnikem sféry a kuželové plochy, která má vrchol na rovníku, její osa je tečnou k poledníku a plocha prochází severním pólem sféry.

Řešení: Válcová plocha je popsána rovnicí $\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$, sféru můžeme parametrizovat sférickými souřadnicemi $x = R \cos \vartheta \cos \varphi, y = R \cos \vartheta \sin \varphi, z = R \sin \vartheta$. Dosazením parametrických rovnic sféry do rovnice válcové plochy dostáváme jednu rovnici o dvou neznámých ϑ a φ. Vyřešíme-li ji, zjistíme, že $\vartheta = \varphi$. Dosadíme-li pak zpět do parametrických rovnic sféry dostaneme parametrické vyjádření Vivianiho křivky $r(t) = \left[R \cos^2 t; R \cos t \sin t; R \sin t\right]$, kde jsme položili $\varphi = t$. Při hledání průniku sféry s kuželovou plochou postupujeme analogicky.

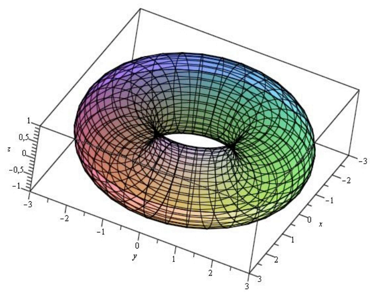
2. Uvažujme anuloid s parametrizací $r(u, v) = [(R_2 + R_1 \cos u) \cos v; (R_2 + R_1 \cos u) \sin v; R_1 \sin u]$.

a) Určete, zda je tato parametrizace anuloidu regulární.

Řešení: Ano, Jacobiho matice J_r je regulární ve všech bodech.

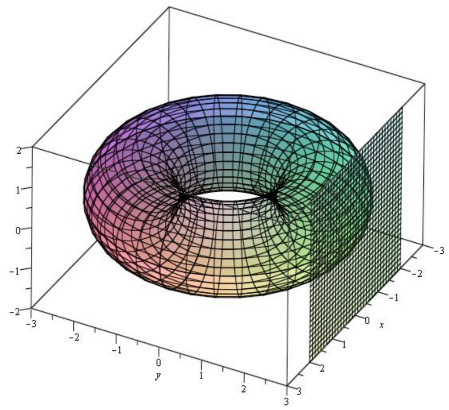
b) Načrtněte souřadnicovou síť na anuloidu vytvářenou touto parametrizací.

Řešení: Pro $R_1 = 1$ a $R_2 = 2$ viz obrázek.



c) Určete tečný prostor anuloidu v bodě $r(a)$, kde $a = (0, \frac{\pi}{2})$. Napište parametrické rovnice tečné roviny anuloidu v bodě $r(a)$.

Řešení: Tečný prostor je definován jako lineární obal tečných vektorů k souřadnicovým křivkám. Vychází: $\frac{\partial r}{\partial u}\big|_{(u,v)=(0,\frac{\pi}{2})} = (0,0,R_1)$, $\frac{\partial r}{\partial v}\big|_{(u,v)=(0,\frac{\pi}{2})} = (-R_1 - R_2, 0, 0)$, přičemž pro zapsání vektorového prostoru generovaného těmito vektory můžeme použít jejich libovolné násobky. Máme tedy $T_{r(a)}r(\mathbb{R}^2) = [\![(0,0,1),(1,0,0)]\!]$. Tento vektorový prostor je zaměřením hledané tečné roviny, která prochází bodem $r(a) = [0, R_1 + R_2, 0]$, její parametrické vyjádření je $T = [0, R_1 + R_2, 0] + [\![(0,0,1),(1,0,0)]\!]$. Pro $R_1 = 1$ a $R_2 = 2$ viz obrázek.



d) Vypočtěte první fundamentální formu anuloidu v této parametrizaci.

Řešení: $g_{11} = R_1^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = (R_2 + R_1\cos u)^2$, resp. $\mathbf{I} = R_1^2 \mathrm{d}u^2 + (R_2 + R_1 \cos u)^2 \mathrm{d}v^2$.

e) Najděte normálové vektorové pole anuloidu v této parametrizaci. Nezapomeňte, že normálový vektor má být jednotkový!

Řešení: $\mathbf{n} = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ nebo opačný vektor.

f) Vypočtěte druhou fundamentální formu anuloidu v této parametrizaci.

Řešení: $h_{11} = R_1$, $h_{12} = h_{21} = 0$, $h_{22} = R_2 \cos u + R_1 \cos^2 u$, resp. $\mathbf{II} = R_1 \mathrm{d}u^2 + (R_2 \cos u + R_1 \cos^2 u)\mathrm{d}v^2$.

g) Spočtěte tvarový operátor (Shape operator) anuloidu.

Řešení: Označíme-li g a h matice koeficientů první a druhé fundamentální formy, pak
$S = g^{-1}h = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{R_2 + R_1 \cos u} \end{pmatrix}$.

h) Určete Gaussovu a střední křivost anuloidu.

Řešení: $K = \det S = \frac{\det h}{\det g} = \frac{\cos u}{R_1(R_2 + R_1 \cos u)}$, $\qquad H = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, S = \frac{1}{2}\frac{R_2 + 2R_1 \cos u}{R_1(R_2 + R_1 \cos u)}$

i) Spočtěte všechny Christoffelovy symboly anuloidu v této parametrizaci.

Řešení: $\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 0$, $\quad \Gamma^1_{22} = \frac{\sin u (R_2 + R_1 \cos u)}{R_1}$, $\quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\frac{R_1 \sin u}{R_2 + R_1 \cos u}$

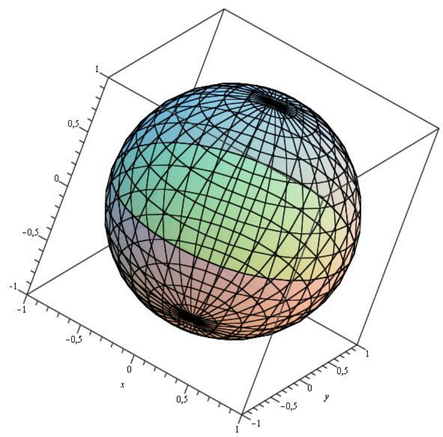
2. Uvažujme sféru s parametrizací $r(\vartheta, \varphi) = [R\cos\vartheta\cos\varphi; R\cos\vartheta\sin\varphi; R\sin\vartheta]$.

a) Určete, zda je tato parametrizace sféry regulární.

Řešení: Parametrizace není regulární pro $\vartheta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$ (severní a jižní pól). Jacobiho matice má v těchto bodech hodnost 1.

b) Načrtněte souřadnicovou síť na na sféře vytvářenou touto parametrizací.

Řešení: Pro $R = 1$ viz obrázek.



c) Vypočtěte první fundamentální formu sféry v této parametrizaci.

Řešení: $g_{11} = R^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = R^2 \cos^2 \vartheta$, resp. $\mathbf{I} = R^2 \mathrm{d}\vartheta^2 + R^2 \cos^2 \vartheta \mathrm{d}\varphi^2$.

d) Najděte normálové vektorové pole sféry v této parametrizaci.

Řešení: $\mathbf{n} = (\cos\vartheta \cos\varphi, \cos\vartheta \sin\varphi, \sin\vartheta)$ nebo opačný vektor.

e) Vypočtěte druhou fundamentální formu sféry v této parametrizaci.

Řešení: $h_{11} = R$, $h_{12} = h_{21} = 0$, $h_{22} = R\cos^2\vartheta$, resp. $\mathbf{II} = R\mathrm{d}\vartheta^2 + R\cos^2\vartheta \mathrm{d}\varphi^2$.

f) Spočtěte tvarový operátor sféry.

Řešení: Označíme-li g a h matice koeficientů první a druhé fundamentální formy, pak $S = g^{-1}h = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}$.

g) Určete Gaussovu a střední křivost sféry.

Řešení: $K = \det S = \frac{\det h}{\det g} = \frac{1}{R^2} = \text{konst} \Longrightarrow$ jedná se o sférickou plochu, $H = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, S = \frac{1}{R} = \text{konst} \Longrightarrow$ jedná se o plochu s konstantní střední křivostí.

h) Spočtěte hlavní křivosti sféry a pomocí nich určete Gaussovu a střední křivost sféry.

Řešení: Hlavní křivosti určíme jako vlastní hodnoty tvarového operátoru: $\kappa_{1,2} = \frac{1}{R} \Longrightarrow$ hlavní křivosti jsou konstantní ve všech bodech sféry. $K = \kappa_1\kappa_2 = \frac{1}{R^2}$, $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{R}$.

i) Spočtěte všechny Christoffelovy symboly sféry v této parametrizaci.

Řešení: $\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 0, \quad \Gamma^1_{22} = \sin\vartheta\cos\vartheta, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\tan\vartheta$

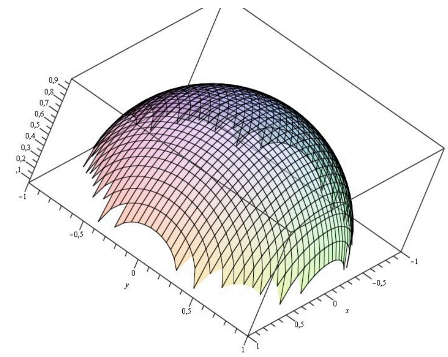
3. Uvažujme otevřenou polosféru (polosféru bez rovníku) s parametrizací $r(u,v) = \left[u; v; \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}\right]$, kde u a v splňují podmínku $u^2 + v^2 < R^2$.

a) Určete, zda je tato parametrizace otevřené polosféry regulární.

Řešení: Ano, Jacobiho matice je regulární pro všechna u a v splňující $u^2 + v^2 < R^2$.

b) Načrtněte souřadnicovou síť na na otevřené polosféře vytvářenou touto parametrizací.

Řešení: Pro $R = 1$ viz obrázek.



c) Vypočtěte první fundamentální formu otevřené polosféry v této parametrizaci.

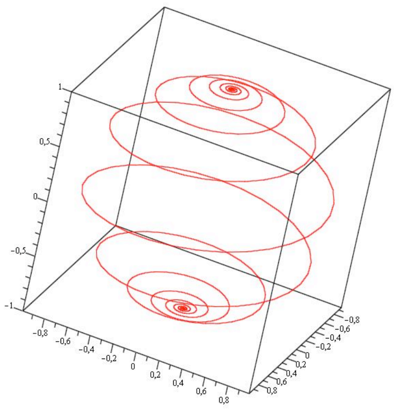
Řešení: $\mathbf{I} = \frac{R^2-v^2}{R^2-u^2-v^2}\mathrm{d}u^2 + \frac{2uv}{R^2-u^2-v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \frac{R^2-u^2}{R^2-u^2-v^2}\mathrm{d}v^2$

4. Uvažujme *helikoid, katenoid, pseudosféru* a rotační válcovou plochu. U všech těchto ploch spočtěte první a druhou fundamentální formu, Gaussovu a střední křivost, případně též Christoffelovy symboly. Určete též, zda je některé z těchto ploch nepatří do některé z výše uvedených tříd ploch (sférické, pseudosférické, rozvinutelné, minimální plochy, plochy s konstantní střední křivostí). Všechny výpočty naleznete ve worksheetech helikoid.mw, katenoid.mw, pseudosfera.mw, valec.mw.

5. Určete délku křivky $u(t) = t$, $v(t) = 2t$, kde $t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ na ploše, jejíž první fundamentální forma má tvar $\mathbf{I} = \mathrm{d}u^2 + \frac{1}{4}\cos v \mathrm{d}v^2$.

Řešení: $\sqrt{2}$

6. *Loxodroma* na sféře je křivka, která protíná všechny poledníky pod stejným úhlem (viz obrázek).



Sféru parametrizujme obvyklým způsobem pomocí sférických souřadnic, $r(\vartheta, \varphi) = [R\cos\vartheta\cos\varphi; R\cos\vartheta\sin\varphi; R\sin\vartheta]$, v nichž má první fundamentální forma tvar $\mathbf{I} = R^2\mathrm{d}\vartheta^2 + R^2\cos^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2$. Lze poměrně snadno odvodit, že loxodroma má rovnici

$$\varphi - \varphi_0 = \tan\alpha(\operatorname{arctanh}(\sin\vartheta) - \operatorname{arctanh}(\sin\vartheta_0)), \tag{3}$$

přičemž se většinou řeší dva typy úloh:

1. Jsou zadány dva body $r(\vartheta_1, \varphi_1)$ a $r(\vartheta_2, \varphi_2)$, kterými má loxodroma procházet, z rovnice (3) jsme pak schopni určit úhel α, pod kterým loxodroma protíná všechny poledníky,
2. je dána odchylka od poledníků α a jeden bod $r(\vartheta_0, \varphi_0)$, kterým má loxodroma procházet, v rovnici (3) pak vystupuje ϑ jako parametr, přičemž φ je jeho funkcí.

Určete délku loxodromy mezi body $r(\vartheta_1, \varphi_1)$ a $r(\vartheta_2, \varphi_2)$.

Řešení: Nejprve určíme úhel α, ze vztahu (3) dostáváme

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\operatorname{arctanh}(\sin\vartheta_2) - \operatorname{arctanh}(\sin\vartheta_1)}\right).$$

Loxodroma je podle (3) vlastně zadána rovnicemi $\vartheta(t) = t$ a $\varphi(t) = \tan\alpha(\operatorname{arctanh}(\sin t) - \operatorname{arctanh}(\sin t_1)) + \varphi_1$, kde α, $t_1 = \vartheta_1$ a φ_1 jsou konstanty. Bod $r(\vartheta_1, \varphi_1)$ považujeme za výchozí a budeme od něj počítat délku loxodromy až do bodu $r(\vartheta_2, \varphi_2)$. Spočtěme $\mathrm{d}\vartheta$ a $\mathrm{d}\varphi$:

$$\mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}\varphi = \tan\alpha\frac{1}{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \tan\alpha\frac{1}{\cos t}\mathrm{d}t.$$

Nyní stačí dosadit do vztahu pro délku křivky na podvarietě (předpokládáme $\alpha, \vartheta \in (0, \frac{\pi}{2})$, ať se vyhneme absolutním hodnotám):

$$l = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{R^2\mathrm{d}\vartheta^2 + R^2\cos^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2} = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{R^2\mathrm{d}t^2 + R^2\cos^2 t\left(\tan\alpha\frac{1}{\cos t}\mathrm{d}t\right)^2} =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} R\sqrt{1+\tan^2\alpha}\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} R\frac{1}{\cos\alpha}\mathrm{d}t = R\frac{1}{\cos\alpha}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t = R\frac{1}{\cos\alpha}(t_2 - t_1).$$

Jestliže jsme za parametr t označili přímo latitudu ϑ, potom $l = R\frac{1}{\cos\alpha}(\vartheta_2 - \vartheta_1)$. Kupř. pro $(\vartheta_1, \varphi_1) = (0,0)$ a $(\vartheta_2, \varphi_2) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ dostáváme $\alpha \doteq 41°42'$ a $l \doteq 1{,}052R$.

7. Spočtěte Lieovu závorku vektorových polí $\xi = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + xyz\frac{\partial}{\partial z}$ a $\eta = \ln x\frac{\partial}{\partial x} + z^2\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$.

Řešení: $[\xi, \eta] = -\frac{xz^2 - y}{x}\frac{\partial}{\partial x} + (\ln x + 2xyz^2)\frac{\partial}{\partial y} + (-yz\ln x - xz^3 - xy)\frac{\partial}{\partial z}$