Geometrie lineárních útvarů – cvičení

Afinní prostory

1. Uvažujme množinu $\mathcal{A} \neq \emptyset$, vektorový prostor $\mathbf{V}$ nad polem $\mathbb{R}$, zobrazení $+\colon \mathcal{A} \times \mathbf{V} \to \mathcal{A}$ a zobrazení $-\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbf{V}$. Ověřte, že množina $\mathcal{A}$ spolu se zobrazeními $+$ a $-$ tvoří afinní prostor, je-li:

a) $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$,
$+\colon \mathcal{A} \times \mathbf{V} \to \mathcal{A}\colon\ [a_1; a_2] + (u_1; u_2) = \left[a_1 + u_1; (a_2^k + u_2)^{\frac{1}{k}}\right]$,
$-\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbf{V}\colon [b_1; b_2] - [a_1; a_2] = \left(b_1 - a_1; b_2^k - a_2^k\right)$, kde $k \in \mathbb{N}$.
Řešení: ne

b) totéž, co v **a)** , ale k je liché přirozené číslo.
Řešení: ano

c) $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$,
$+\colon \mathcal{A} \times \mathbf{V} \to \mathcal{A}\colon\ [a_1; a_2] + (u_1; u_2) = \left[\frac{u_1}{a_1}; \frac{u_2}{a_2}\right]$,
$-\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbf{V}\colon [b_1; b_2] - [a_1; a_2] = (b_1 \cdot a_1; b_2 \cdot a_2)\,.$
Řešení: ne

d) $\mathcal{A} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2\}$, $\mathbf{V} = \mathbb{R}$,
$+\colon \mathcal{A} \times \mathbf{V} \to \mathcal{A}\colon\ [a_1; a_2] + (u) = \left[a_1 - u; (a_1 - u)^2\right]$,
$-\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbf{V}\colon [b_1; b_2] - [a_1; a_2] = (a_1 - b_1)\,.$
Řešení: ano

e) $\mathcal{A} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 = 1 \wedge x < 0\}$, $\mathbf{V} = \mathbb{R}$,
$+\colon \mathcal{A} \times \mathbf{V} \to \mathcal{A}\colon\ [a_1; a_2] + (u) = \left[-\sqrt{1 + (a_2 - u)^2}; a_2 - u\right]$,
$-\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbf{V}\colon [b_1; b_2] - [a_1; a_2] = (a_2 - b_2)\,.$
Řešení: ano

f) $\mathcal{A} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x^3 - y^2 = 1 \wedge y < 0\}$, $\mathbf{V} = \mathbb{R}$,
$+\colon \mathcal{A} \times \mathbf{V} \to \mathcal{A}\colon\ [a_1; a_2] + (u) = \left[a_1 - u; -\sqrt{(a_1 - u)^3 - 1}\right]$,
$-\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbf{V}\colon [b_1; b_2] - [a_1; a_2] = (a_1 - b_1)\,.$
Řešení: ne

g) $\mathcal{A} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$, $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$,
$+\colon \mathcal{A} \times \mathbf{V} \to \mathcal{A}\colon\ [a_1; a_2] + (u_1; u_2) = \left[\frac{-u_2 a_2 + a_1 a_2 - 1 + 10^{u_1}}{a_2}; \frac{a_2}{10^{u_1}}\right]$,
$-\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbf{V}\colon [b_1; b_2] - [a_1; a_2] = \left(\log \frac{a_2}{b_2}; a_1 - b_1 - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2}\right).$
Řešení: ano

Poznámka: Ve všech následujících úlohách budeme pracovat v klasickém afinním prostoru (ověřte, že se skutečně jedná o afinní prostor!), který jsme zvyklí používat ze střední školy:

$\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$,
$+\colon \mathcal{A} \times \mathbf{V} \to \mathcal{A}\colon\ [a_1; a_2; \ldots; a_n] + (u_1; u_2; \ldots; u_n) = [a_1 + u_1; a_2 + u_2; \ldots; a_n + u_n]$,
$-\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbf{V}\colon [b_1; b_2; \ldots; b_n] - [a_1; a_2; \ldots; a_n] = (b_1 - a_1; b_2 - a_2; \ldots; b_n - a_n)\,.$

Parametrické a obecné vyjádření podprostoru

1. V afinním prostoru $\mathbb{R}^3$ napište parametrické i obecné vyjádření
a) roviny $\rho = A + [\![\mathbf{u}, \mathbf{v}]\!]$, kde $A = [0; 0; 1]$, $\mathbf{u} = (1; 0; 1)$ a $\mathbf{v} = (1; -1; 0)$,
b) roviny ρ, která prochází body $A = [1; 2; 3]$, $B = [2; 3; 4]$ a $C = [2; 2; 3]$,
c) přímky $p = A + [\![\mathbf{u}]\!]$, kde $A = [1; 1; 1]$ a $\mathbf{u} = (1; 1; 1)$,
d) přímky p, která prochází body $A = [3; 2; 1]$ a $B = [1; 1; 3]$,
e) roviny ρ, která obsahuje přímky $p = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x - y + 5 = 0 \wedge x + y - z - 1 = 0\}$ a $q = [1; -2; 0] + [\![(2; 3; 1)]\!]$.

2. Napište parametrické vyjádření podprostoru $\mathcal{B}$ je-li:
a) $\mathcal{B} = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4; x_1 + x_3 + x_4 = 2 \wedge x_1 + x_3 - x_4 = 0\}$
Řešení: např. $[1; 0; 0; 1] + t_1(0; 1; 0; 0) + t_2(-1; 0; 1; 0)$

b) $\mathcal{B} = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4; x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \wedge x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1\}$
Řešení: např. $[-1; 2; 0; 0] + t_1(3; -1; 1; 0) + t_2(-4; 1; 0; 1)$

c) $\mathcal{B} = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4; x_2 = 1\}$
Řešení: např. $[0; 1; 0; 0] + t_1(1; 0; 0; 0) + t_2(0; 0; 1; 0) + t_3(0; 0; 0; 1)$

d) $\mathcal{B} = \{[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \in \mathbb{R}^5; x_1 = 1 \wedge x_2 = 2 \wedge x_3 = 3 \wedge x_5 = 5\}$
Řešení: např. $[1; 2; 3; 0; 5] + t(0; 0; 0; 1; 0)$

e) $\mathcal{B} = \{[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \in \mathbb{R}^5; 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \wedge 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 1\}$
Řešení: např. $[-1; 0; 0; -4; 0] + t_1(1; 1; 0; 6; 0) + t_2(0; 0; 1; 3; 0) + t_3(0; 0; 0; 2; 1)$

3. Nalezněte obecné (neparametrické) vyjádření podprostoru $\mathcal{B}$ v afinním prostoru $\mathbb{R}^4$, resp. $\mathbb{R}^5$ je-li:
a) $\mathcal{B} = [1; -1; 3; 4] + [\![(1; 0; -3; 0), (0; -1; 1; 3), (0; 1; 1; -1)]\!]$
Řešení: např. $3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4$

b) $\mathcal{B} = [1; -1; 0; 2] + [\![(3; 2; 0; 0), (1; 0; 1; -1)]\!]$
Řešení: např. $2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5; x_3 + x_4 = 2$

c) $\mathcal{B} = [1; 1; 1; 1] + [\![(1; 1; 1; 1)]\!]$
Řešení: např. $x_1 - x_2 = 0; x_1 - x_3 = 0; x_1 - x_4 = 0$

d) $\mathcal{B} = [1; 2; 3; 0; 5] + [\![(0; 0; 0; 1; 0)]\!]$
Řešení: např. $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3; x_5 = 5$

e) $\mathcal{B} = [2; 1; -3; 3; 1] + [\![(1; 1; 2; 1; 3), (1; 2; 1; 3; 1)]\!]$
Řešení: např. $3x_1 - x_2 - x_3 = 8; x_1 - 2x_2 + x_4 = 3; 5x_1 - 2x_2 - x_5 = 7$

f) $\mathcal{B} = [-1; 0; 0; -4; 0] + [\![(1; 1; 0; 6; 0), (0; 0; 1; 3; 0), (0; 0; 0; 2; 1)]\!]$
Řešení: např. $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2; 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 1$

4. Nalezněte obecné vyjádření rovin ρ a σ v afinním prostoru $\mathbb{R}^4$ tak, že
a) jsou rovnoběžné různé, **b)** jsou mimoběžné, **c)** průnikem ρ a σ je bod, **d)** průnikem ρ a σ je přímka.

5. V afinním prostoru $\mathbb{R}^5$ udejte příklad dvou nadrovin $\mathcal{N}_1$ a $\mathcal{N}_2$, které se neprotínají.

Vzájemná poloha podprostorů

1. V afinním prostoru $\mathbb{R}^4$ vyšetřete vzájemnou polohu:
a) přímek $p = [5; 7; 4; -5] + [\![(2; 3; 1; -2)]\!]$ a $q = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4; x_1 - x_2 = 0 \wedge x_1 + 2x_3 = 5 \wedge 3x_1 - 2x_4 = 5\}$
Řešení: protínají se v bodě $[1; 1; 2; -1]$

b) přímky $p = [0; 0; 6; 5] + [\![(1; 2; -3; 0)]\!]$ a roviny $\rho = [1; 0; 0; 2] + [\![(1; -1; 0; 0), (1; 2; 0; -1)]\!]$
Řešení: mimoběžné

c) rovin $\rho = [0; 3; 1; 3] + [\![(1; 1; -2; -2), (1; 5; -4; 0)]\!]$ a $\sigma = [-9; 2; 1; -5] + [\![(5; -1; 0; 2), (3; 1; 2; 0)]\!]$
Řešení: protínají se v bodě $[1; 0; 1; -1]$

d) rovin $\rho = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4; x_1 - x_2 + x_4 = 2 \wedge 2x_1 - x_2 = 0\}$ a $\sigma = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4; 2x_3 + 9x_4 = 35 \wedge x_1 - x_4 = -2\}$
protínají se v přímce $p = [1; 2; 4; 3] + [\![(2; 4; -9; 2)]\!]$

e) přímky $p = [3; 2; 0; -2] + [\![(1; 1; -1; 1)]\!]$ a nadroviny $\mathcal{N} = [2; 1; 1; 1] + [\![(1; 1; 1; 1), (1; 1; 1; -1), (1; 1; -1; -1)]\!]$
Řešení: $p \subseteq \mathcal{N}$

f) přímky $p = [0; 0; 0; 3] + [\![(1; 1; 1; 0)]\!]$ a nadroviny $\mathcal{N} = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4; x_4 = 0\}$
Řešení: $p \parallel \mathcal{N}$

g) nadrovin $\mathcal{N}_1 = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4; 2x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$ a $\mathcal{N}_2 = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4; 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2\}$
Řešení: protínají se v rovině $\rho = [0; 0; -1; -3] + [\![(1; 0; 2; 5), (0; 1; 1; 0)]\!]$

h) podprostoru $\mathcal{B} = [-2; 10; -1; 2; -1] + [\![(2; -8; 3; -5; 1)]\!]$ a podprostoru
$\mathcal{C} = [1; 1; 2; -1; 3] + [\![(1; -1; 0; 2; 3), (0; 2; -1; 3; 5)]\!]$
Řešení: různoběžné, průnikem je bod $[0; 2; 2; -3; 0]$

i) podprostoru $\mathcal{B} = [2; 0; 2; 0; 1] + [\![(2; 1; 0; 0; 0), (0; 0; 1; 2; 3;)]\!]$ a podprostoru $\mathcal{C} = [1; 0; 0; 1; 0] + [\![(1; 0; 0; 0; 0), (1; 1; 0; 0; 0), (1; 1; 0; 0; 1)]\!]$
Řešení: mimoběžné, mají společný směr $(0; 0; -2; 1; 0)$

j) podprostoru $\mathcal{B} = \{[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \in \mathbb{R}^5; x_1 + x_2 - 1 = 0\}$ a podprostoru $\mathcal{C} = \{[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \in \mathbb{R}^5; x_4 + x_5 - 2 = 0\}$
Řešení: různoběžné, průnikem je podprostor $[1; 0; 0; 2; 0] + [\![(-1; 1; 0; 0; 0), (0; 0; 1; 0; 0), (0; 0; 0; -1; 1)]\!]$

Vzdálenost podprostorů

1. Určete vzdálenost rovin ρ a σ, je-li:
a) $\rho = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4; x_1 + x_2 + 2x_3 - 4 = 0 \wedge 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 - 9 = 0\}$, $\sigma = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4; x_1 - 2x_2 - 2x_4 + 25 = 0 \wedge x_1 - x_3 + x_4 - 15 = 0\}$
Řešení: 10

b) $\rho = [4; 2; 2; 2; 0] + [\![(1; 2; 2; -1; 1), (2; 1; -2; 1; -1)]\!]$, $\sigma = \{[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \in \mathbb{R}^5; x_1 - x_2 = 0 \wedge x_1 - x_3 + x_4 + x_5 + 1 = 0 \wedge x_3 + x_4 - x_5 - 4 = 0\}$
Řešení: 0

2. Určete vzdálenost přímek p a q, je-li:
a) $p = [6; 3; -3] + [\![(-3; 2; 4)]\!]$, $q = [-1; -7; 4] + [\![(-3; 3; 8)]\!]$
Řešení: 13

b) $p = [7; 5; 8; 1] + [\![(2; 0; 3; 1)]\!]$, $q = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4; x_1 - 4x_3 = -7 \wedge x_2 + 2x_3 = 5 \wedge x_4 = 3\}$
Řešení: 6

3. Určete vzdálenost bodu R od podprostoru B, je-li:
a) $R = [-9; 2; 1; -5]$, $\mathcal{B} = [1; 2; 0; 0;] + [\![(-1; 1; 1; 3), (0; -2; 1; -1)]\!]$
Řešení: $2\sqrt{30}$

b) $R = [4; 2; -5; 1]$, $\mathcal{B} = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4; 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \wedge 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12\}$
Řešení: 5

Orientovaný objem

1. V orientovaném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány orientované báze $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, kde $\mathbf{u}_1 = (1; -2; 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0; 1; 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1; 0; 1)$ a $\mathbf{v}_1 = (1; 1; 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0; 1; 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1; 1; k)$, $k \neq 1$. Určete parametr k tak, aby báze byly nesouhlasné.
Řešení: $k > 1$

Poznámka k následujícím úlohám:
Orientovaný objem Ω počítejte z definice, příslušný neorientovaný objem $|\Omega|$ pak jako kontrolu spočtěte pomocí Grammovy matice.

2. Ve 3-rozměrném euklidovském prostoru spočtěte orientovaný objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{u}_1 = (1; -3; 1)$, $\mathbf{u}_2 = (2; 1; -3)$ a $\mathbf{u}_3 = (1; 2; 1)$

a) vzhledem ke kladné ortonormální bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, kde $\mathbf{e}_1 = (1; 0; 0), \mathbf{e}_2 = (0; 1; 0), \mathbf{e}_3 = (0; 0; 1)$,
Řešení: 25

b) vzhledem ke kladné ortonormální bázi $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$, kde $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right), \tilde{\mathbf{e}}_2 = \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right), \tilde{\mathbf{e}}_3 = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$
Řešení: 25

3. Ve 4-rozměrném euklidovském prostoru spočtěte orientovaný objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ vzhledem ke kladné ortonormální bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$, kde $\mathbf{e}_1 = (1; 0; 0; 0), \mathbf{e}_2 = (0; 1; 0; 0), \mathbf{e}_3 = (0; 0; 1; 0), \mathbf{e}_4 = (0; 0; 0; 1)$, je-li:
a) $\mathbf{v}_1 = (7; 6; 7; 6), \mathbf{v}_2 = (7; 6; -7; -6), \mathbf{v}_3 = (9; 8; 9; 8), \mathbf{v}_4 = (9; 8; -9; -8)$
Řešení: -16

b) $\mathbf{v}_1 = (2; -1; 0; 1), \mathbf{v}_2 = (1; 1; 3; 0), \mathbf{v}_3 = (0; -1; 6; 2), \mathbf{v}_4 = (3; 2; 5; -3)$
Řešení: -70

Odchylky podprostorů

1. Nalezněte odchylku φ přímky $p = A + [\![\mathbf{u}]\!]$ a podprostoru $\mathcal{B}$, je-li:

a) $\mathbf{u} = (1; 0; 0; 0)$; $\mathcal{B} = [1; 2; 3; 56] + [\![(0; 1; 1; 1)]\!]$
Řešení: $\pi/2$

b) $\mathbf{u} = (2; 0; 0; 2; 1)$; $\mathcal{B} = \{[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \in \mathbb{R}^5; x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 7\}$
Řešení: $\pi/6$

c) $\mathbf{u} = (0; 1; -1; 0; 0)$; $\mathcal{B} = [2; 1; 1; 2; 2] + [\![(2; 1; 0; 1; -1), (3; 2; 0; 0; 1), (0; 1; 0; 1; 0), (1; 0; 0; 1; 3)]\!]$
Řešení: $\pi/4$

2. Vypočtěte odchylku φ nadrovin $\mathcal{N}_1 = \{[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] \in \mathbb{R}^6; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 - 12 = 0\}$ a $\mathcal{N}_2 = \{[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] \in \mathbb{R}^6; 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 - 2x_6 - 13 = 0\}$.
Řešení: $\cos\varphi = 5/\sqrt{210}$