Anuloid

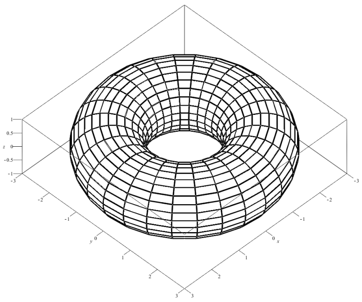
Uvažujme anuloid s parametrizací $r(u,v) = [(R_2 + R_1\cos u)\cos v; (R_2 + R_1\cos u)\sin v; R_1 \sin u]$.

1. Určete, zda je tato parametrizace anuloidu regulární.

   Řešení: Ano, Jacobiho matice J_r je regulární ve všech bodech.

2. Načrtněte souřadnicovou síť na anuloidu vytvářenou touto parametrizací.

   Řešení: Pro $R_1 = 1$ a $R_2 = 2$ viz obrázek.



3. Určete tečný prostor anuloidu v bodě $r\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Napište parametrické rovnice tečné roviny anuloidu v tomto bodě.

   Řešení: Tečný prostor je definován jako lineární obal tečných vektorů k souřadnicovým křivkám. Vychází: $\frac{\partial r}{\partial u}\big|_{(u,v)=(0,\frac{\pi}{2})} = (0, 0, R_1)$, $\frac{\partial r}{\partial v}\big|_{(u,v)=(0,\frac{\pi}{2})} = (-R_1 - R_2, 0, 0)$, přičemž pro zapsání vektorového prostoru generovaného těmito vektory můžeme použít jejich libovolné násobky. Máme tedy $T_{r\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} r(\mathbb{R}^2) = [\![(0,0,1),(1,0,0)]\!]$. Tento vektorový prostor je zaměřením hledané tečné roviny, která prochází bodem $r\left(0;\frac{\pi}{2}\right) = [0, R_1 + R_2, 0]$, její parametrické vyjádření je $T = [0, R_1 + R_2, 0] + [\![(0,0,1),(1,0,0)]\!]$.

4. Vypočtěte první fundamentální formu anuloidu v této parametrizaci.

   Řešení: $g_{11} = R_1^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = (R_2 + R_1 \cos u)^2$, resp. $\mathbf{I} = R_1^2 \mathrm{d}u^2 + (R_2 + R_1\cos u)^2 \mathrm{d}v^2$.

5. Najděte normálové vektorové pole anuloidu v této parametrizaci.

   Řešení: $\mathbf{n} = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ nebo opačný vektor.

6. Vypočtěte druhou fundamentální formu anuloidu v této parametrizaci.

   Řešení: $h_{11} = R_1$, $h_{12} = h_{21} = 0$, $h_{22} = R_2\cos u + R_1\cos^2 u$, resp. $\mathbf{II} = R_1 \mathrm{d}u^2 + (R_2 \cos u + R_1 \cos^2 u)\mathrm{d}v^2$.

7. Vypočtěte třetí fundamentální formu anuloidu v této parametrizaci.

   Řešení: $k_{11} = 1$, $k_{12} = k_{21} = 0$, $k_{22} = \cos^2\vartheta$, resp. $\mathbf{III} = \mathrm{d}\vartheta^2 + \cos^2\vartheta \mathrm{d}\varphi^2$.

8. Spočtěte tvarový operátor (Shape operator) anuloidu.

   Řešení: Označíme-li g a h matice koeficientů první a druhé fundamentální formy, pak
   $S = g^{-1}h = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{R_2 + R_1 \cos u} \end{pmatrix}$.

9. Určete Gaussovu a střední křivost anuloidu.

Řešení: $K = \det S = \frac{\det h}{\det g} = \frac{\cos u}{R_1(R_2+R_1\cos u)}$, $\quad H = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} S = \frac{1}{2}\frac{R_2+2R_1\cos u}{R_1(R_2+R_1\cos u)}$

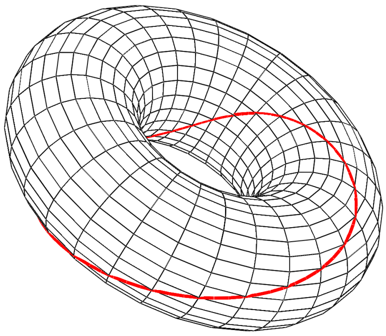
10. Spočtěte hlavní křivosti anuloidu a pomocí nich určete Gaussovu a střední křivost anuloidu.

    Řešení: Hlavní křivosti určíme jako vlastní hodnoty tvarového operátoru: $\kappa_1 = \frac{1}{R_1}, \kappa_2 = \frac{\cos\vartheta}{R_2+R_1\cos\vartheta}$. $K = \kappa_1\kappa_2 = \frac{\cos u}{R_1(R_2+R_1\cos u)}$, $H = \frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2) = \frac{1}{2}\frac{R_2+2R_1\cos u}{R_1(R_2+R_1\cos u)}$.

11. Spočtěte všechny Christoffelovy symboly anuloidu v této parametrizaci.

    Řešení: $\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 0$, $\quad \Gamma^1_{22} = \frac{\sin u(R_2+R_1\cos u)}{R_1}$, $\quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\frac{R_1\sin u}{R_2+R_1\cos u}$

12. Určete délku křivky $u(t) = t$, $v(t) = t$ na anuloidu (viz obrázek) pro $t \in \langle 0; 2\pi\rangle$. Prostorová křivka je tedy parametrizována funkcí $\bar{r}(t) = [(R_2+R_1\cos t)\cos t; (R_2+R_1\cos t)\sin t; R_1\sin t]$



    Řešení: $l = \int_0^{2\pi}\sqrt{R_1^2+R_2^2+2R_1R_2\cos t+R_1^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$. Integrál nelze vyjádřit elementárními funkcemi, dá se zapsat (dosti nehezky) pomocí eliptických integrálů. Pro $R_1 = 1$ a $R_2 = 2$ vychází délka křivky 14,21.

13. Vypočtěte povrch anuloidu integrováním plošného elementu $\mathrm{d}A = \sqrt{\det g}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ v patřičných mezích.

    Řešení: $4\pi^2 R_1 R_2$